

高中各科知识精要指导丛书

天门

教学考

3+X 高考数学总复习

TIANMEN

(第二、三轮复习)



天门市教研室 编

华中师范大学出版社

走进高校的台阶 / 决胜高考的秘招 / 3+X 备考的课堂

总主编 刘祥国 姚洪波
副总主编 谢虎成 马之棠 熊中庭

天门教学考

高中数学总复习
(第二、三轮复习)

天门市教研室 编

本册主编
本册编委

刘兵华
汪中海
代承红
张德尚
陈峰
钱红林

李社红
石水峰
肖会仁
刘庆平
刘兵华

马振标
熊衍彪
肖家怀
方运法

廖鹏根
卢么中
蒋良臣
吴兰俊

国家教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

2002年·武汉

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

天门教学考——3+X 高考数学总复习/天门市教研室编,本册主编刘兵华.

—武汉:华中师范大学出版社,2002.1

(天门教学考/总主编刘祥国,姚洪波)

ISBN 7-5622-2321-1/G·1131

I. 3...

II. 刘...

III. 数学课—高中—教学参考书

IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 86967 号

天 门 教 学 考
3+X 高考数学总复习
(第二、三轮复习)

© 天门市教研室 编
本册主编 刘兵华

华中师范大学出版社出版发行

(武昌桂子山 邮编:430079 电话:027-87876240)

新华书店湖北发行所经销

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

责任编辑:彭守权

责任校对:张 钟

封面设计:新视点

督 印:方汉江

开 本:787×960 1/16

版 次:2002 年 1 月第 2 版

印 数:1-10 100

印 张:13.75 字数:276 千字

2002 年 1 月第 1 次印刷

定 价:14.00 元

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

出版说明

天门,古称竟陵,是江汉平原上一颗璀璨的明珠。1983年高考录取人数居全国县市之首而被著名作家秦牧誉为“高考状元县”,1984年高考上线数首过千人大关,以后逐年递增。1993年《人民日报》记者杜若原盛赞天门高考,“江汉才子出天门”的佳话广为流传。2000年高考过省线数4783人,居湖北省榜首,且湖北省高考理科第一、二名均被该市考生夺得。2001年高考过省线数5500余人。该市的高中毕业生一直被清华、北大、中科大、复旦、南开等名校看好。

天门的成功,不仅在于重点中学摘金挂银,更为可贵的是普通高中也不甘落后,全市所辖八所高中2001年过省线最少的学校(参加高考的学生仅600余人)也超过了400余人,体现出强劲的整体优势。

天门的成功,不仅在于把优秀的学生培养成了一枝独秀的高考“状元”,更为可贵的是他们帮助大批基础较差成绩一般的学生圆了大学之梦。

天门的成功,与天门市教研室科学的教学指导是密不可分的。他们举教学改革之旗,向教学研究要质量,向科学备考要成绩,以挖掘学生的智力潜能为目标,把课题研究与复习指导紧密结合,摸索出了一套独特的教、学、考的成功经验。这些经验经全国各地众多取“经”者使用,证明不仅天门适用,在外地也行之有效。

为了满足广大考生的需求,我们约请天门市教研室组织全市各科中心教研组骨干教师编写了这套丛书。本丛书总结了天门市近年来“U·P·A复习教学法”和“3+X”的研究成果,体现了天门市高中复习备考的成功经验,是“天门经验”的第一次完整公开出版。本套书按高考复习要求分为两个系列,“三优设计”系列为九门课的第一轮复习,“总复习”系列为九门课的第二、三轮复习,各为九册。也就是说,每门课的复习有两册书。

三优设计系列 各册以单元或章节为单位编写,下设四个栏目:

【三维目标】 根据大纲要求和考纲要求,从知识、能力、方法和观点等角度设置目标,提高复习的目的性和针对性。

【三点解析】 通过重点解析、难点剖析、考点分析(或疑点辨析),帮助学生正确理解和掌握所学的知识。

【三法导学】 通过例题解析等多种手段进行教法、学法、练法的指导,帮助学生灵活运用所学的知识。在学法部分系统地介绍学习方法,在练法中系统地介绍解题方法。

【三级训练】

A级—双基过关。循着教材知识点顺序命题,主要训练学生对知识的识记和理解。

B级—能力提高。主要训练学生灵活运用知识的能力。

C级—综合创新。为技巧性、综合性练习。

总复习系列 含第二、三轮复习。各册分两大部分:第一部分“3+X课堂”是各册的主体,是专为第二轮复习设计的。第二轮复习以单元或专题为单位,下设四个栏目:

知识网络—织网子。遵循学生认知心理,从整体出发,将单元知识构成一张简明的网,以揭示各部分知识之间及与其他学科之间的内在联系,从而建立完整的、立体的、开放的知识系统。

学法导航—教法子。方法得当,事半功倍。学习有“窍门”,教学有“绝招”,这“窍门”、“绝招”,其实就是学习的规律和方法,本不神秘,考生一旦把握,受益多多。

考题精析—引路子。一道好题就是一大知识板块,就是一类解题方法。本书通过对经典考题的分析,点拨思路,指导方法,规范程序,训练技巧,以求举一反三,触类旁通。

创新演练—练脑子。知识在演练中深化,方法在应用中活化,技能在训练中强化。本书通过适度的、新颖的、精巧的习题训练,使学生开阔视野,拓展思维,巩固提高。

第二部分“3+X考场”为第三轮复习,即模拟测试题。它既是模拟训练,又是实战演习,同时也体现了作者对今年高考走向的分析和预测。

一、二、三轮复习各有侧重。第一轮为全面复习,强调基本知识与技能强化与巩固;第二轮为重点把握,追求知识的综合化与思维的灵巧化;第三轮为综合训练,全面检测知能水平,巩固一、二轮复习成果。三轮复习三个台阶,体现循序渐进与学习运用的逻辑关系。

复习备考本无捷径可走,但规律和方法是有的。我们组编本丛书的目的不在于猜题押宝,而是想帮助您探索规律、优化方法、少走弯路、提高效率。但愿它能给您启迪,伴您成功。

华中师范大学出版社

2001年12月

目 录

第一编 3 + X 课堂

第一单元 集合映射与函数

.....	(1)
一、知识网络	(1)
1. 知能链结	(1)
2. 目标强化	(1)
二、学法导航	(2)
三、考题精析	(2)
四、创新演练	(4)

第二单元 函数的性质与反函数

.....	(6)
一、知识网络	(6)
1. 知能链结	(6)
2. 目标强化	(6)
二、学法导航	(7)
三、考题精析	(7)
四、创新演练	(8)

第三单元 幂函数、指数函数与

对数函数

一、知识网络	(11)
1. 知能链结	(11)
2. 目标强化	(11)
二、学法导航	(11)

三、考题精析	(12)
--------------	------

四、创新演练	(13)
--------------	------

第四单元 三角函数的图像与性质

.....	(16)
一、知识网络	(16)
1. 知能链结	(16)
2. 目标强化	(16)
二、学法导航	(17)
三、考题精析	(17)
四、创新演练	(19)

第五单元 三角函数的基本公式

.....	(21)
一、知识网络	(21)
1. 知能链结	(21)
2. 目标强化	(21)
二、学法导航	(22)
三、考题精析	(22)
四、创新演练	(24)

第六单元 解不等式

.....	(26)
一、知识网络	(26)
1. 知能链结	(26)
2. 目标强化	(26)
二、学法导航	(27)

三、考题精析	(27)
四、创新演练	(29)
第七单元 不等式的应用	
.....	(32)
一、知识网络	(32)
1. 知能链结	(32)
2. 目标强化	(32)
二、学法导航	(32)
三、考题精析	(33)
四、创新演练	(35)
第八单元 等差数列与等比数列	
.....	(38)
一、知识网络	(38)
1. 知能链结	(38)
2. 目标强化	(38)
二、学法导航	(39)
三、考题精析	(39)
四、创新演练	(41)
第九单元 数列的极限、数学归纳法	
.....	(43)
一、知识网络	(43)
1. 知能链结	(43)
2. 目标强化	(43)
二、学法导航	(44)
三、考题精析	(44)
四、创新演练	(46)
第十单元 复数的概念与运算	
.....	(49)
一、知识网络	(49)
1. 知能链结	(49)
2. 目标强化	(49)
二、学法导航	(49)
三、考题精析	(49)

四、创新演练	(51)
第十一单元 复数与几何	
.....	(54)
一、知识网络	(54)
1. 知能链结	(54)
2. 目标强化	(54)
二、学法导航	(54)
三、考题精析	(55)
四、创新演练	(56)
第十二单元 排列、组合、二项式定理	
.....	(59)
一、知识网络	(59)
1. 知能链结	(59)
2. 目标强化	(59)
二、学法导航	(59)
三、考题精析	(60)
四、创新演练	(61)
第十三单元 直线与平面	
.....	(64)
一、知识网络	(64)
1. 知能链结	(64)
2. 目标强化	(64)
二、学法导航	(65)
三、考题精析	(65)
四、创新演练	(68)
第十四单元 多面体与旋转体	
.....	(72)
一、知识网络	(72)
1. 知能链结	(72)
2. 目标强化	(72)
二、学法导航	(73)
三、考题精析	(73)
四、创新演练	(75)

第十五单元 直线与圆

..... (79)

一、知识网络..... (79)

1. 知能链结 (79)

2. 目标强化 (79)

二、学法导航..... (79)

三、考题精析..... (80)

四、创新演练..... (82)

第十六单元 圆锥曲线

..... (85)

一、知识网络..... (85)

1. 知能链结 (85)

2. 目标强化 (85)

二、学法导航..... (86)

三、考题精析..... (86)

四、创新演练..... (89)

第十七单元 参数方程、极坐标

..... (92)

一、知识网络..... (92)

1. 知能链结 (92)

2. 目标强化 (92)

二、学法导航..... (92)

三、考题精析..... (93)

四、创新演练..... (94)

第十八单元 怎样解题

..... (97)

一、知识网络..... (97)

1. 知能链结 (97)

2. 目标强化 (99)

二、学法导航..... (99)

三、考题精析..... (99)

四、创新演练 (102)

第十九单元 选择题的解法

..... (105)

一、知识网络 (105)

1. 知能链结 (105)

2. 目标强化 (105)

二、学法导航 (106)

三、考题精析 (106)

四、创新演练 (108)

第二十单元 填空题的解法

..... (112)

一、知识网络 (112)

1. 知能链结 (112)

2. 目标强化 (112)

二、学法导航 (112)

三、考题精析 (112)

四、创新演练 (114)

第二十一单元 联系实际的教学

问题..... (116)

一、知识网络 (116)

1. 知能链结 (116)

2. 目标强化 (116)

二、学法导航 (117)

三、考题精析 (117)

四、创新演练 (123)

第二十二单元 函数与方程的思想

方法..... (126)

一、知识网络 (126)

1. 知能链结 (126)

2. 目标强化 (126)

二、学法导航 (126)

三、考题精析 (127)

四、创新演练 (128)

第二十三单元 分类讨论的思想方法

..... (131)

一、知识网络 (131)

1. 知能链结 (131)

2. 目标强化 (131)

二、学法导航 (131)

三、考题精析 (132)

四、创新演练 (134)

第二十四单元 归纳与猜想的思想

方法..... (136)

一、知识网络 (136)

1. 知能链结 (136)

2. 目标强化 (136)

二、学法导航 (137)

三、考题精析 (137)

四、创新演练 (139)

第二十五单元 整体思维的思想方法

..... (141)

一、知识网络 (141)

1. 知能链结 (141)

2. 目标强化 (141)

二、学法导航 (141)

三、考题精析 (142)

四、创新演练 (143)

第二十六单元 数形转化的思想方法

..... (145)

一、知识网络 (145)

1. 知能链结 (145)

2. 目标强化 (145)

二、学法导航 (145)

三、考题精析 (146)

四、创新演练 (147)

第二编 3+X 考场

高考模拟测试(一)..... (150)

高考模拟测试(二)..... (153)

高考模拟测试(三)..... (157)

高考模拟测试(四)..... (161)

高考模拟测试(五)..... (165)

参考答案..... (168)

第一编 3 + X 课堂

第一单元 集合映射与函数

知识网络

知能链接

1. 本节知能考点是了解集合、映射、函数的概念和性质;能判定元素、集合等之间的关系,进行集合的交、并、补等运算;能判定一些对应是不是映射、函数,会求函数的解析式及定义域、值域.

2. 集合、对应、映射、函数与反函数是一系列的概念,它们都是高中代数特别是整个函数理论的基本概念;求函数解析式中所包含的待定系数法、换元法、配方法,求定义域中的解不等式,求值域中的判别式法、换元法、单调性法、基本不等式法等方法贯穿整个高中数学的始终,因而这一节无论从理论到方法都是中学数学的基石.

3. 集合部分为中学数学提供最原始的概念和符号语言,为运用数学语言(集合语言)进行阅读与叙述,运用集合思想、整体性(全体性)观点进行思维提供基础.

4. 一元二次函数是最重要的初等函数,运用二次函数的图像讨论二次函数、二次方程的根及二次不等式的解,并灵活运用其解决实际问题为重要考点.

目标强化

- 集合 $A = \{x + 2 > 0\}$; $B = \{x \mid x + 2 > 0\}$; $C = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$; $D = \{y \mid y = x + 2, x \in \mathbf{R}\}$ 中数集的个数是().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 下面六个关系式:① $\emptyset \subset \{a\}$; ② $a \subset \{a\}$; ③ $\{a\} \subseteq \{a\}$; ④ $\{a\} \in \{a, b\}$; ⑤ $a \in \{a, b, c\}$; ⑥ $\emptyset \in \{a, b\}$, 其中正确的是().
A. ① ② ③ ④ B. ③ ⑤ ⑥ C. ① ④ ⑤ D. ① ③ ⑤
- 已知 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 满足 $f(3) = f(1) + f(2)$ 的映射 $f: A \rightarrow B$ 的个数是().
A. 2 B. 4 C. 5 D. 7

4. 设函数 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ 的定义域为 $[n, n+1]$ ($n \in \mathbf{N}$), 那么 $f(x)$ 的值域内有 _____ 个整数.
5. 已知二次函数 $f(x) = x^2 + x + a$ ($a > 0$), 若 $f(m) < 0$, 则 $f(m+1)$ 的值是 ().
- A. 正数 B. 负数 C. 0 D. 符号与 a 有关

学法导航

集合为中学数学最原始的概念, 属不定义概念, 其根本特征是其整体性. 要注意运用数轴、韦恩图的直观辅助作用. 对应、映射、函数等都是反映两个个体(集合及其内的元素)之间的相互关系, 要掌握它们的区别与联系. 映射是特殊的对应, 其特殊性表现在存在性和惟一性. 函数又是特殊的映射. 对函数问题(特别是二次函数)中常用的数学方法也应注意归纳、学习, 加以掌握, 必将受益深远.

考题精析

【例 1】 已知全集 $I = \{\text{不大于 } 12 \text{ 的非负偶数}\}$, 集合 $M \cap N = \{2, 12\}$, $\overline{M \cup N} = \{6, 10\}$, $M \cap \overline{N} = \{8\}$, 求集合 M, N .

讲析 作出集合关系的韦恩图, 运用几何直观.

解 $I = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, 作出集合的韦恩图如图 1-1, 可以得出: $M = \{2, 8, 12\}$, $N = \{0, 2, 4, 12\}$.

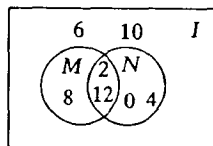


图 1-1

又解: $\because (M \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = M \cap (N \cup \overline{N}) = M \cap I = M$,

$\therefore M = (M \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \{2, 12\} \cup \{8\} = \{2, 8, 12\}$.

同理: $(\overline{M \cup N}) \cup (M \cap \overline{N}) = (\overline{M \cap N}) \cup (M \cap \overline{N}) = \overline{N} \cap (\overline{M \cup N} \cup M) = \overline{N}$,

$\therefore \overline{N} = (\overline{M \cup N}) \cup (M \cap \overline{N}) = \{6, 10\} \cup \{8\} = \{6, 8, 10\}$.

$\therefore N = \overline{\overline{N}} = \{0, 2, 4, 12\}$.

【例 2】 向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止, 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图像如图 1-2 所示, 那么水瓶的形状是 ().

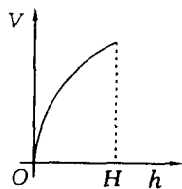
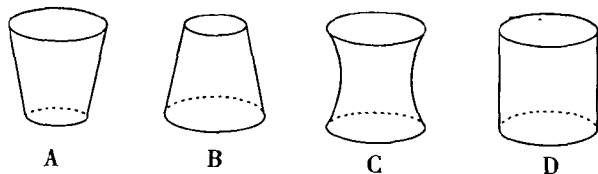


图 1-2

讲析 本题虽只是一个选择题,但考查知识相当全面、巧妙,如果企图求出体积的函数关系式再与函数图像比较,则不仅麻烦,且 C 的体积不会求,本题应利用选择题的特殊性采用间接算法求解.

解法一 从图 1-2 所反映的体积 V 随水深 h 的变化趋势看,增加相同的高度 h ,体积开始(底部)增加快,而后增加慢(图像开始陡,而后平缓),故开始截面半径大、水瓶粗,而往后(靠近顶部)时,水瓶变细.故答案只能取 B.

解法二(特例法、特值法) 考查特殊位置——水深为总高度一半时,体积应占总容积的比.在 A 中 $V_{\text{中}} < \frac{1}{2} V_{\text{顶}}$, B 中 $V_{\text{中}} > \frac{1}{2} V_{\text{顶}}$, 而 C、D 中 $V_{\text{中}} = \frac{1}{2} V_{\text{顶}}$, 因图像上 $V_{\text{中}} > \frac{1}{2} V_{\text{顶}}$, 故应选 B.

说明:两种解法都是间接算法中的筛选法(或说淘汰法),因为选择题只须选择,可以不直接求解.

【例 3】 若二次函数 $f(x) = 4x^2 - 2(p-2)x - 2p^2 - p + 1$ 在区间 $[-1, 1]$ 内至少存在一点 C , 使 $f(C) > 0$, 求实数 p 的取值范围.

讲析 等价于最大值 > 0 .

解法一(间接法,先求其补集) 令 $\begin{cases} f(-1) \leq 0, \\ f(1) \leq 0, \end{cases}$ 得 $p \leq -3$ 或 $p \geq \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 满足题意的范围是 $-3 < p < \frac{3}{2}$.

解法二(直接法)

由题意有 $f(-1) > 0$ 或 $f(1) > 0$ (因最大值必在端点处取得),

解得: $-3 < p < \frac{3}{2}$.

【例 4】 设 $f(x) = x^2 + px + q$, $A = \{x | x = f(x)\}$, $B = \{x | f[f(x)] = x\}$,

(1) 求证 $A \subseteq B$; (2) 如果 $A = \{-1, 3\}$, 求 B .

讲析 严密的证明只能利用 $A \subseteq B$ 的定义,其过程中又要用 $x \in A, x \in B$ 的定义.

(1) **证明** 对于任意 $x_0 \in A$, 则 $x_0 = f(x_0)$,

$\therefore f[f(x_0)] = f(x_0) = x_0$,

$\therefore x_0 \in B, \therefore A \subseteq B$.

(2) $\because A = \{-1, 3\}$,

$\therefore x = f(x) = x^2 + px + q$ 的根为 $-1, 3$,

由韦达定理得: $p = -1, q = -3, \therefore f(x) = x^2 - x - 3$.

由 $A \subseteq B$ 知: $f[f(x)] = x$ 中含有 $f(x) - x$ 的因式,

而由 $f[f(x)] = x$ 得:

$$f^2(x) - f(x) - 3 - x = \cdots = [f(x) - x][f(x) + x] = 0.$$

$\therefore f(x) - x = 0$ 或 $f(x) + x = 0$. 将 $f(x) = x^2 - x - 3$ 代入解得:

$$x = -1, 3 \text{ 或 } x = \pm\sqrt{3}, \therefore B = \{-\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}, 3\}.$$

创新演练

一、选择题:

- 已知集合 $M = \{\text{直线}\}, N = \{\text{圆}\}$, 则 $M \cap N$ 中的元素的个数为().
A. 0 B. 0, 1, 2 其中之一 C. 无穷 D. 无法确定
- 设 $M = \{x | f(x) = 0\}, N = \{x | g(x) = 0\}$, 则 $\{x | f(x)g(x) = 0\}$ 为().
A. M B. N C. $M \cup N$ D. 以上都不对
- 集合 $A = \{(x, y) | y = |x|, x \in \mathbf{R}\}, B = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \geq 0\}$, 则 A 与 B 的关系是().
A. $A \subset B$ B. $A \subseteq B$ C. $B \subset A$ D. 以上都不对
- $x \in A \cap B$ 的否命题是().
A. $x \notin A$ 且 $x \notin B$ B. $x \notin A \cup B$
C. $x \in A$ 但 $x \notin B$ D. $x \notin A$ 或 $x \notin B$
- 集合 $M = \left\{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}, N = \left\{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则().
A. $M = N$ B. $M \supset N$ C. $M \subset N$ D. $M \cap N = \emptyset$
- 已知映射 $f: A \rightarrow B$, 其中, 集合 $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象, 且对任意的 $a \in A$, 在 B 中和它对应的元素是 $|a|$, 则集合 B 中元素的个数是().
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
- 从集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 到集合 $B = \{3, 4\}$ 的映射 f 中满足条件 $f(3) = 3$ 的映射的个数是().
A. 2 B. 3 C. 4 D. 6
- 对于满足 $0 \leq p \leq 4$ 的所有实数 p , 使不等式 $x^2 + px > 4x + p - 3$ 都成立的 x 的取值范围是().
A. $(-\infty, 3)$ B. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- 当 $|x| \leq 1$ 时, 函数 $y = ax + 2a + 1$ 的值有正有负, 则实数 a 的取值范围是().
A. $a \geq -\frac{1}{3}$ B. $a \leq -1$
C. $-1 < a < -\frac{1}{3}$ D. 以上结论都不对

10. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$ 且 $f(-1) < 0, f(0) > 0$, 则().

A. $a + b + c < 0$ B. $b < a + c$ C. $c < 2b$ D. $a, b, c > 0$

二、填空题:

11. 已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $N = \{a, b, c\}$, 设集合 M 到集合 N 的不同映射的个数为 m , 若集合 N 中的每个元素在集合 M 中能找到原象的映射的个数为 n , 那么 $\frac{m}{n} =$ _____.

12. 下列从 M 到 N 的各种对应法则中, 是映射的为_____.

① $M = \{\text{直线 } Ax + By + C = 0\}, N = \mathbf{R}, f_1: \text{求直线 } Ax + By + C = 0 \text{ 的斜率}.$

② $M = \{\text{直线 } Ax + By + C = 0\}, N = \{\alpha | 0 \leq \alpha < \pi\}, f_2: \text{求直线 } Ax + By + C = 0 \text{ 的倾斜角}.$

③ $M = N = \mathbf{R}, f_3: \text{求 } M \text{ 中每个元素的正切}.$

④ $M = N = \mathbf{R}^-, f_4: \text{求 } M \text{ 中每个元素的算术平方根}.$

13. 函数 $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ 的值域为_____.

14. 将进货单价为 80 元的商品按 90 元一个售出时, 能卖出 400 个, 已知该商品每个涨价一元, 其销售就减少 20 个, 为了赚得最大利润, 售价应定为_____元.

三、解答题:

15. 已知函数 $f(x) = 2 + \log_3 x (x \in [1, 9])$, 求 $g(x) = [f(x)]^2 + f(x^2)$ 的最大值.

16. 用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形、上部为半圆形的框架(如图 1-3), 若矩形底边长为 $2x$, 求此框架围成的面积 y 与 x 的函数关系式, 并写出其定义域.

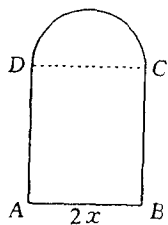


图 1-3

17. 已知 $f(x) = x^2 + 4x + 3, x \in \mathbf{R}$, 函数 $g(t)$ 表示 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上的最大值, 求 $g(t)$ 的表达式.

18. 设 $A = \{(x, y) | y^2 = x + 1\}, B = \{(x, y) | 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}, C = \{(x, y) | y = kx + b\}$, 问是否存在自然数 k, b , 使 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$? 证明你的结论.

第二单元 函数的性质与反函数

知识网络

知能链接

1. 本节知能考点是理解单调性、奇偶性、周期性的概念,并能判断和证明一些简单函数的单调性、奇偶性和周期性.弄清函数与反函数的相互关系.

2. 单调性、奇偶性、周期性都是函数的整体性质,是相对于某区间整体而言的.要特别注意其数学定义在判定、证明中的应用.单调性、奇偶性、周期性是讨论任何函数时的主要内容.

3. 函数与图像、曲线与方程、数与形、代数与几何是中学数学的主要内容,其相互联系与转化是贯穿中学数学始终的基本数学思想和方法.

目标强化

1. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, $f(x+2) = -f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$, 则 $f(-8.5)$ 等于().
A. 0.5 B. -0.5 C. 1.5 D. -1.5
2. 已知 $f(x) = \log_3 \frac{mx^2 + 8x + n}{x^2 + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $[0, 2]$, 求 m, n .
3. 设 $f(x)$ 是以 4 为周期的偶函数, 且 $f(-2) < f(-1)$, 则 $f(9)$ 与 $f(10)$ 的大小关系为_____.
4. 将函数 $y = 2^x$ 的图像(), 再作关于直线 $y = x$ 的对称图像, 可得到函数 $y = \log_2(x+1)$ 的图像.
A. 先向左平移一个单位
B. 先向右平移一个单位
C. 先向上平移一个单位
D. 先向下平移一个单位
5. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $f(2x - x^2)$ 的单调递增区间是().

A. $[1, 2)$

B. $[1, +\infty)$

C. $(0, 2)$

D. $(-\infty, 1]$

学法导航

1. 在代数上,单调性反映自变量与因变量的变化趋势之间的关系,在几何上单调性反映图像的增减性,在比较大小、求极值等问题中应用广泛.

2. 奇偶性在代数上反映互为相反数的自变量的函数值的关系,在几何上,奇偶性反映图像的对称性.注意复合函数单调性、奇偶性的有关结论.

3. 周期性反映图像的重复性,其应用主要体现在三角函数部分.

4. 函数图像从“形”的方面形象地反映函数的本质,知道图像就知道函数的单调性、奇偶性、周期性等性质,注意数形结合的思想与方法的培养与运用.

考题精析

【例 1】 证明: $f(x) = 2^{x^3+x}$ 为单调增函数.

讲析 课本外关于复合函数单调性的结论不能作为证明的依据,否则就会出现循环论证,它们只能作为判定和计算的依据,因此本题只能利用定义,用比较法进行证明.

证明 对任意 $x_1 < x_2$,

$$\therefore \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{2^{x_1^3+x_1}}{2^{x_2^3+x_2}} = 2^{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)} = 2^{(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+1\right]},$$

$$\text{又 } x_1 < x_2, \therefore x_1 - x_2 < 0, \text{ 且 } \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 1 > 0, \therefore \frac{f(x_1)}{f(x_2)} < 2^0 = 1.$$

又 $f(x) > 0$, $\therefore f(x_1) < f(x_2)$, $\therefore f(x)$ 为单调增函数.

注:也可由差值比较法证明.

【例 2】 已知 $f(x) = g(x) + a$, 其中 $g(x)$ 为奇函数, a 为与 x 无关的常数, 求证 $f(-x) = -f(x) + 2a$.

讲析 由 $g(x) = f(x) - a$ 为奇函数, 根据定义即得.

解 $\because g(x) = f(x) - a$ 为奇函数, $\therefore g(-x) = -g(x)$,

$$\therefore [f(-x) - a] = -[f(x) - a], \therefore f(-x) = -f(x) + 2a.$$

(本结论在计算问题中方便实用)

【例 3】 已知 $f(x) = x + \frac{p}{x}$ ($p > 0$), (1) 讨论其奇偶性; (2) 求其单调区间;

(3) 求 $y = \sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x}$ 的最小值.

讲析 (1), (2) 中用定义, (3) 中注意不等式中取等号的条件或 (2) 的结果.

解 (1) $\because f(-x) = (-x) + \frac{p}{(-x)} = -\left(x + \frac{p}{x}\right) = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 为奇函数.

(2) 在 $(-\infty, -\sqrt{p}] \cup [\sqrt{p}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $[-\sqrt{p}, 0) \cup (0, \sqrt{p}]$ 上单调递减.

(3) $y = \sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x}$, 由 $\sin^2 x \in (0, 1]$ 和 (2) 知 y 关于 $\sin^2 x$ 单调递减,

$\therefore y \geq 1 + \frac{4}{1} = 5$, 当 $\sin^2 x = 1$ 时取最小值 $y_{\min} = 5$.

【例 4】 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且对任意 $a, b \in [-1, 1]$, 当 $a + b \neq 0$, 都有 $\frac{f(a) + f(b)}{a + b} > 0$ 成立.

(1) 若 $a > b$, 试比较 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小;

(2) 解不等式: $f\left(x - \frac{1}{2}\right) < f\left(x - \frac{1}{4}\right)$;

(3) 证明: 若 $-1 \leq c \leq 2$, 则函数 $g(x) = f(x - c)$ 与 $h(x) = f(x - c^2)$ 存在公共定义域, 并求出这个公共定义域.

讲析 关键是利用条件得出单调性.

解 (1) 对于任意 $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, $\because f(x)$ 是奇函数和题设不等式得:

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f(-x_1) = \frac{f(x_2) + f(-x_1)}{x_2 + (-x_1)} \cdot (x_2 - x_1) > 0,$$

$\therefore f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的增函数. $\because a > b, a, b \in [-1, 1]$, $\therefore f(a) > f(b)$.

(2) 原不等式 $\Leftrightarrow -1 \leq x - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{4}$.

(3) $g(x)$ 的定义域为 $[c - 1, c + 1]$, $h(x)$ 的定义域为 $[c^2 - 1, c^2 + 1]$.

令 $c^2 - c \geq 0$, 得 $c \geq 1$ 或 $c \leq 0$, 又 $-1 \leq c \leq 2$,

$\therefore$ 若 $-1 \leq c < 0$ 或 $1 < c \leq 2$, 则 $c^2 > c$, 此时公共定义域为 $[c^2 - 1, c + 1]$;

若 $0 \leq c \leq 1$, 则 $c^2 \leq c$, 此时公共定义域为 $[c - 1, c^2 + 1]$.

创新演练

一、选择题:

1. 若函数 $f(x) = 1 + \frac{m}{a^x - 1}$ 是奇函数, 则 m 取值为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

2. 若奇函数 $y = f(x) (x \neq 0)$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = x - 1$, 那么使 $f(x - 1) < 0$ 的 x 的集合是().

A. $\{x | x < 0 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$

B. $\{x | 1 < x < 2\}$