中国管理现代化研究会主编

《现代管理方法丛书》

线　性　规　划

苏敬之　张文杰　杨瑾卿　编

中　国　铁　道　出　版　社

1 9 8 8年·北京

内 容 简 介

本书面向具有中等文化程度的广大管理干部，着重于普及“线性规划”的基本概念、原理和方法，以及讨论“线性规划”各分支问题的经济内容、解题思路和求解方法，并列举了属于常规性质的和特殊情况的大量例题。它便于读者自学，并可结合所从事的专业进行研究、应用，以提高实际经营管理水平。主要内容包括：导论、线性规划的数学原理，分派问题的规划，单纯形法，对偶原理及其应用，灵敏度分析，线性规划的应用示例、运输问题的特殊解法。

现代管理方法丛书
线 性 规 划
苏敬之 张文杰 杨瑾卿 编
中国铁道出版社出版
责任编辑 胡彝珣 封面设计 刘景山
新华书店总店科技发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092毫米$\frac{1}{32}$ 印张：7.75字数：176 千
1 9 8 8 年6月 第1版 第1次印刷
印数：0001－6,0000 册 定价：1.90 元

序

国民经济和社会事业，不论是全国的、各部门的、各地区的，以至企业和事业单位，都是结构不同层次不同的大小系统。它们的管理者，必须有系统观念，掌握现代管理方法。中国管理现代化研究会组织编写“现代管理方法丛书”，对于当前以增强企业活力为中心的体制改革的深化，是非常必要的。

系统是各种基本要素相互作用形成的整体，并与外部环境交流信息和能量产生一定功能。

对一定范围内的人、物系统的管理，就是要对人、物系统内各基本要素（如人财物等）经过信息传递、变换、反馈、协调和控制，在与外部环境交流能量中保持平衡，使系统发挥最大功能，达到管理的预期目标。

比方，对外开放，对内搞活，是一个国民经济系统管理问题。我国技术落后，要发展国民经济，实现国家现代化，达到发达国家水平，就要解决技术水平问题。如果在科学技术上没有足够的进展，在当代世界科技发展一日千里情形下，我国经济与发达国家的差距非但不能缩小而且可能趋向扩大。解决技术进步的问题的办法之一是引进技术，而引进技术又是与引进资金是分不开的。因为我们不但缺技术，还缺资金，外国的技术输出也总是与资本输出分不开的。我们到2000年能借用几百亿美元，这种开放政策，正是有系统科学的思想根据。即是要发展（国民经济）系统，不能封闭，并要使系统从外部环境交换和吸收能量。

但是，借债是要还本付息的，而且利息常常是复利。用

得好，回收多，还债早，技术进步，经济发展；用得不好，效益很低，浪费很大，甚至可能陷入债坑。前途和结果如何，要看管理是好是坏。管理的另一任务是对内搞活，把人的（不只是管理者）积极性调动起来，使物能得到充分利用。目前，特别重视搞活大中型企业问题，就是在解决大中型企业管理问题上做文章。我国的现状是，技术落后，管理更落后。这表明管理改革的加倍重要。

先进的管理方法，只能是建立在系统科学的基础上。我们是小生产者、小摊贩占相当优势的国家，小生产、小商贩的思想和习气，是与系统思想格格不入的，从而是与现代化管理背道而驰的。在小生产和小商贩的思想指导下，多是短期经济行为，常常不顾社会效益，对于社会化大生产管理，也只能头痛医头，朝三暮四，缺乏总体设计，贻误大局。这在各个层次的系统上，道理是一样的。如果根据系统科学，运用系统工程（它们的基础是唯物辩证法），就会如毛泽东同志所说："战争指挥员活动的舞台，必须建筑在客观条件的许可之上，然而他们凭借这个舞台，却可以导演出很多有声有色、威武雄壮的戏剧来。"."现代管理方法"这一套丛书，对于有声有色、威武雄壮戏剧的导演来说，是一个得力的助手和有效的工具。这套丛书的出版，一定会受到管理者的欢迎。

一九八六年十二月五日

编写说明

坚持四项基本原则，增强企业活力，使企业真正成为自主经营、自负盈亏的社会主义商品生产者和经营者，具有自我改造和自我发展的能力，是我国经济体制改革在现阶段的中心任务。培育和造就千百万善于管理、勤于经营、富有战略观念和创新意识的企业经营者，承担经营企业的重任，是增强企业活力所迫切需要的。在有计划商品经济的活动舞台上，企业经营者要把科学技术作为一种思维工具，对企业的经营活动进行系统的多层次的考察分析和综合研究，作出正确的鉴别和判断，并运用现代化的方法和手段，健全企业的经营机制，使企业的经营能适应市场的需要，成为竞争中的胜利者。为了适应改革、搞活的需要，我中国管理现代化研究会在中国铁道出版社支持和帮助下，由何健文、罗汉奎、周子康、何同伟和张宗溥五位同志组成编委会，负责组织编写"现代管理方法丛书"。这套丛书是专业性的科普读物，具有中等文化水平的企业管理人员都可阅读，也可供大专院校管理专业的师生参考。这些现代管理方法在我国推广运用，都是行之有效的。丛书的编辑力求从我国的实践出发，

结合范例，由浅入深地介绍各种方法的原理、概念和运用，便于企业管理人员自学，能够学以致用；同时，也适当介绍国外的管理经验以丰富我们的知识。

我研究会多年来致力于推进我国的管理现代化事业，在全国各地举办各种类型，不同层次的研究班、培训班传播管理现代化知识，出版管理现代化丛书、文集，介绍国内外管理经验，新颖的观点和方法。“现代管理方法丛书”编辑出版的目的在于与广大的企业经营者共同努力，促进、推动企业的管理现代化事业。

参加丛书编写的人较多，在编辑工作上有不当之处，请读者给我们指出，并帮助我们改正。

中国管理现代化研究会理事长

一九八七年一月

目　　录

第一章　导　论

第一节　线性规划的经济内容

人们为了生活就必须进行生产，有生产就有管理。因此，长期以来人们总是以各种形式、用不同方法对生产企业进行着管理。

由于科学技术的进步和生产规模的发展，人们对企业管理的形式与方法也在不断更新。就世界范围来看，从18世纪末期算起，迄今企业管理已大体经历了三个阶段：即以经验管理为主的传统管理阶段；以作业、动作研究和时间利用研究为主的科学管理阶段；以作业组织研究和资源利用研究为主的现代管理阶段。当然，这三个阶段并不是完全互相排斥的，而是一个吸收、发展与提高的过程。

现代管理的重要特点之一是广泛采用运筹学方法解决企业的生产经营问题。运筹一词即“运用”和“筹划”的意思。我国古代早就有“运筹帷幄之中，决胜千里之外”的话，但是作为一门成熟的科学来说，它却只有短短几十年的历史。

运筹学方法对客观事物内部的数量关系进行定量分析，帮助企业的组织者与指挥者用科学的方法去安排生产和使用资源，以求自己所管理的企业取得最好的经济效果。

运筹学有许多分支：如概率论与数理统计，决策理论，对策理论，图与网络理论，价值工程理论，排队理论，规划理论等等。线性规划是规划论中最常用的一种方法。

为了初步了解线性规划，先得简单地介绍一下极大、极

小的概念。

【例 1】有一块正方形的白铁片，其每边的尺寸已知是60cm，现在要在四角截去一个同样大小的正方形，使得剩下来的白铁片所做成的一只开口的盒子可以有最大的容积，问每边各应截去多少？

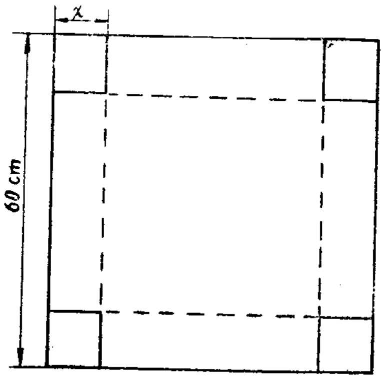

图 1-1

解 以x代表所截去的小正方形每边之长，于是根据长方体的求积公式，便得到：

$$V=x(60-2x)^2$$

V是将要制成的开口盒子的容积，如何来求得它的极大值呢？解决这一类问题的普遍方法是利用微分学的原理，但是也可以用浅显易懂的初等数学知识去加以处理。

现将上例稍加变换，便可得到：

$$4V=4x(60-2x)(60-2x)$$

由于现在乘上的只是一个常数"4"，因此显然可知当$4V$为极大时，V也必为极大。又因为从初等数学中可知："当若干个正数的和等于一个常数，则当这些正数都相等时，其乘积为极大"。例如要把正数15分成三份，使其乘积为极大，那末这种分法便是把15等分成三份，每份都等于5，事实上$5\times5\times5>6\times5\times4$，$5\times5\times5>7\times6\times2$……等等。

现在 $4x+60-2x+60-2x=120=$常数

所以要使其乘积$4V$为极大，必须

$$4x=60-2x=60-2x$$

即

$$6x=60\ (\text{cm})$$

$$x=10\ (\text{cm})$$

这样截取白铁片所做成的盒子，其容积可达 $10\times(60-20)^2=16000(\text{cm}^3)$，比其它任何截取的方法都要好。

再举一个求极小值的例子。

【例 2】某厂每年需特种润滑油8000kg，定购费每次为 5 元，每年保管费用为物资储备的平均货币价值的25%，润滑油单价为 2 元，不许缺货，问全年分几批进货才能使全年定货费、存贮费用两者之和最少？

我们知道，全年总定货费用与定货次数成正比，与每次定货数量（批量）成反比，即：

$$K=\frac{N}{Q}C_K$$

式中 K——全年总定货费（包括手续费、运输费、验收费等）；

N——全年需要量；

Q——每次定货数量（批量）；

$\frac{N}{Q}$——全年定货次数；

C_K——每次定货费。

全年存贮费是货物在库内的总耗费，包括占用流动资金的利息，仓库及库内设备的折旧费、维修费、照明费，管理人员工资，库存中损耗费，保险费，贬值费等。存贮费与库存量成正比，即：

$$H=\frac{Q}{2}C_H$$

式中 H——全年存贮费；

$\frac{Q}{2}$——平均库存量；

C_H——每单位存贮量的存贮费。

在不许缺货因而不发生缺货损失（因缺货使产品失去市场造成损失或因缺货而采取应急措施所支付的额外费用）的情况下，总费用以及分项费用与每次定货数量之间的关系如图1—2所示。

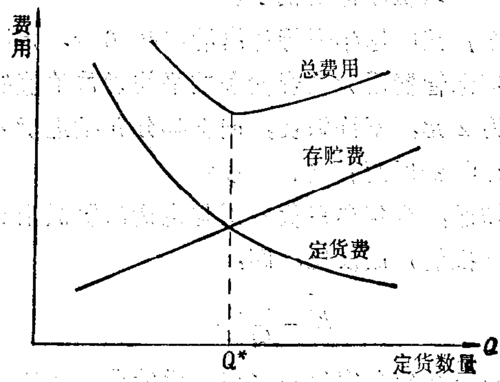

图 1—2

从图中可以看出，在需求量一定的条件下，欲使定货费减少，定货次数越少越好，即每批定货数量越多越好；而欲使存贮费减少，则定货次数越多越好，即每批定货数量越少越好。所以，欲使总费用达到极小值，须使定货费与存贮费相等，对应此处的每次定货数量（批量）为最佳Q^*。

由图

$$\frac{N}{Q}C_K = \frac{Q}{2}C_H$$

$$Q^2 = \frac{2NC_K}{C_H}$$

得

$$Q^* = \sqrt{\frac{2NC_K}{C_H}}$$

本题各项数字代入得

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 8000 \times 5}{2 \times 0.25}} = 400(\text{kg})$$

对应此点的总费用为200元，达到了极小值。

极大、极小问题的应用极其广泛，但在实用上，问题总是比较复杂的，所碰到的自变量一般不止一个，关于多变量函数的极大、极小问题，在大多数场合要用微分学的方法去处理。

上述有关极大、极小问题的两个例子都只有唯一的答案，也就是完全确定性条件下的唯一决策。在现实生活中许多问题可有多个可行解，要从中选取一个（有时可能是数个相互等价的）最优解（极大或极小），遇到这类极大、极小问题，微分学的方法也无能为力，更不用说初等数学了，而采用线性规划方法却可迎刃而解。

线性规划所研究的主要有两类经济问题，一类是已给定了一定数量的人力、物力和时间资源，问题是如何运用这些资源才能完成最大量的任务（产品产量、利润等）；另一类是已给定一项任务，问题是如何统筹安排，才能以最小量的资源消耗去完成这项任务。事实上这两方面的问题不过是一个问题的两种不同提法而已，因此，在这两方面问题的答案之间必然会存在一定的关系。这种关系就象数学中的“对偶性”关系一般，例如“在周长为一定的四边形中，以正方形的面积为极大”，其另一种提法是“在面积为一定的四边形中，以正方形的周长为极小”。同理，经济上也有类似的“对偶”问题，后面将要详细讨论。因此，只要其中一方面的问题有了解答，其另一方面也就不难同时解出。

第二节　线性规划问题的表述

现在来具体谈谈，究竟需要什么条件才能应用线性规划的方法。一般地说，必须有：

1．一定要能够将目标表述为最大化（极大）或最小化（极小）的要求，例如，求最小成本或人力、物力的最大利用；

2．一定要有达到目标的不同方法，即必须有选择的可能；

3．要求的目标是有约束（限制）条件的；

4．必须将约束条件用数学表示成为线性等式或线性不等式，并将目标函数表示成为线性函数。

附带说明一下“线性”一词的含义，它是数学上的常用词，说明两个变量具有一种特殊关系——按固定数量增加或减少的关系。如钢材消耗量随机器制造台数的增减而增减，假定每台机器耗用钢材500kg，每增产1台机器就要增加钢材消耗量500kg。又如栽培农作物时，发现施肥量与收获量有密切关系，假设每亩地每增施10kg肥料就得到大致相同的增产效果。用数学语言来说，任何一个二元（两个变量）一次代数方程在图形上都是一条直线，这就是“线性”的原始含义。当然，在涉及到多变量的规划问题中，线性的几何意义是高维空间的“超平面”。由于它牵涉到较高深的数学知识，这里就不说了。

以下结合具体例子说明上述条件。

【例3】某工厂生产A、B两种产品，都要消耗a、b、c三种原料，已知原料供应量有限制，两种产品的创利水平也不相同（见表1－1），问如何安排生产，才能使该厂获得最大利润。

表 1—1

原料 \ 产品 用料数量	A	B	每日供应量
a	6	2	180
b	4	10	400
c	3	5	210
每件产品利润（元）	31	22	

第一，这个问题的目标是求最大利润，即求极大值。

第二，工厂的生产可以有多种组合方案。例如，由于A产品利润大，可以只生产A产品，但这样一来，按原料a可生产30件（$180\div 6=30$），按原料b可生产100件，按原料c可生产70件，最后只能生产A产品30件，b，c两种原料将有大量剩余。如果只安排生产B产品，只能生产40件，a，c两种原料也将有大量剩余。两种生产安排都不能获得最大利润。显然，必须同时安排A，B两种产品的生产，才能充分利用a，b，c三种原料，而又可能获得最大的利润，至于A，B两种产品的生产如何搭配组合，又可以有多种情况。

第三，要求达到的目标是有约束条件的。利润虽然随产品产量的增加而增加，但每种产品都不能无限制的增加，本例就要考虑各种原料供应量的限制。假设每日生产A，B两种产品分别为x_1，x_2件，则由题意，问题的约束条件是：

$$\begin{cases} 6x_1+2x_2\leqslant 180 \\ 4x_1+10x_2\leqslant 400 \\ 3x_1+5x_2\leqslant 210 \\ x_i\geqslant 0\ (i=1,2) \end{cases}$$

约束方程组中，前三个方程式分别是a，b，c三种原

料供应量的约束，最后一个（$x_i \geqslant 0$）即产品不能为负数，否则便违背了经济常识。

第四，目标函数和约束条件都须用线性方程表述。上述约束方程组中的各个方程式都是线性的，如在下列平面图上以x_1表示横轴，以x_2表示纵轴，则各个方程式都是一条直线。

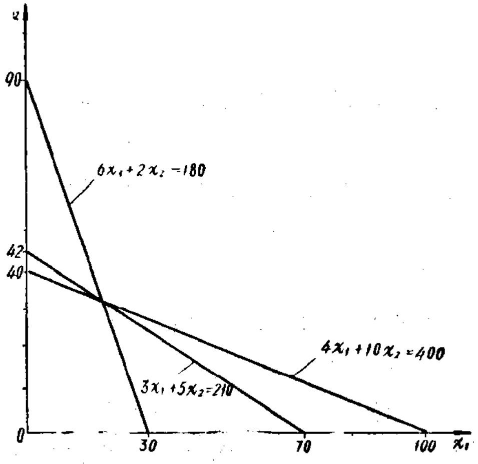

图 1—3

在上述约束条件下，目标函数$f(x_1, x_2)$也是线性方程式。目标是总利润，它是A，B两种产品产量x_1，x_2的函数，即

$$f(x_1, x_2)=31x_1+22x_2$$

要求这个函数取得极大值。

本例的最优解是$x_1=20$件，$x_2=30$件，这时可获得总利润1280元，a，c两种原料都刚好用完，b原料剩余20。至于怎样求出这个答案，第二章的例子将要详细说明有关方法。

再举一个运输问题的例子。

【例 4】设有三座矿山A_1，A_2，A_3生产矿石，它们的

日产量分别为70t，40t，90t。另有四个炼铁厂 B_1，B_2，B_3，B_4，它们每天分别需要矿石30t，60t，50t，60t。A_1，A_2，A_3向B_1，B_2，B_3，B_4运一吨矿石所需的运费由表1—2给出。

运　费　表　　　　表1—2

铁厂 运费(元) 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量(t)
A_1	3	11	3	10	70
A_2	1	9	[illegible]	8	40
A_3	7	4	10	5	90
需要量(t)	30	60	50	60	200

问怎样调拨矿石才能使总的运费最小。

设A_1，A_2，A_3向B_1，B_2，B_3，B_4运输的矿石为x_{ij}($i=1,2,3$，$j=1,2,3,4$）如表1—3所示。

运输问题的变量　　　　表1—3

铁厂 运量 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量(t)
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	70
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	40
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	90
需要量(t)	30	60	50	60	200

由表1—3可知，从A_1分别向B_1，B_2，B_3，B_4运输矿石的运量之和$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$应该等于$A_1$的日产量70t，而$B_1$从$A_1$，$A_2$，$A_3$得到的矿石运量之和$x_{11}+x_{21}+x_{31}$应该等于$B_1$每天的需要量30t……。因此，问题变成了求一组变量x_{ij}($i=1,2,3$；$j=1,2,3,4$）满足下列约束条件：