

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

计算机辅助几何设计与 非均匀有理B样条

CAGD & NURBS

施法中 编著

高等教育出版社

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

计算机辅助几何设计与 非均匀有理 B 样条

CAGD & NURBS

施法中 编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条/施法中编著. —北京:高等教育出版社,2001.8

ISBN 7-04-009934-9

I. 计... II. 施... III. 几何—计算机辅助设计
IV. TP391.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 26364 号

计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条
施法中 编著

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009
电 话 010-64054588 传 真 010-64014048
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16 版 次 2001 年 8 月第 1 版
印 张 33 印 次 2001 年 8 月第 1 次印刷
字 数 520 000 定 价 44.60 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

计算机辅助几何设计(Computer-Aided Geometric Design,简称 CAGD)的核心问题是要解决工业产品几何形状的数学描述。本教材从形状数学描述的实际要求出发,以作为标准形式的参数曲线曲面基本理论为基础,重点介绍自 20 世纪 80 年代中后期以来,在非有理贝齐尔方法与 B 样条方法基础上发展起来的,为 STEP 国际标准惟一采用的非均匀有理 B 样条(Non-Uniform Rational B-Spline,简称 NURBS)方法,其中包括了国际、国内及作者的最新研究成果。本书特点是系统性、新颖性,强调几何原理与面向工程应用。

本书可作为高等工科院校机械计算机辅助设计与制造专业硕士研究生教材,也可供从事计算机辅助设计与制造及计算机图形学工作的广大科技人员参考。

为配合本课程教学并辅助有关研究工作,编者组织人员用 Visual C++ 研制开发了一套配合全书主要内容的辅助教学和研究的多用途软件,在微型计算机 Windows 2000/NT 操作系统上运行,存储介质为光盘。需要者可直接与北京航空航天大学飞行器制造工程系(邮政编码:100083)梅平寓女士或北京航空航天大学 703 教研室施法中直接联系。联系电话:010-82317845(办),010-82313512(宅);施法中电子邮箱地址:shifzh@public.fhnet.cn.net。

前 言

几何在计算机辅助设计(Computer-Aided Design)、计算机辅助工程分析(Computer-Aided Engineering)和计算机辅助制造(Computer-Aided Manufacturing)中起着中心角色的作用。这三种计算机辅助技术各取英文首字母缩写,依次就是 CAD、CAE、CAM。按照国际流行的概念,计算机辅助几何设计(Computer-Aided Geometric Design,简称 CAGD)就是 CAD。

CAGD 是一门迅速发展的新兴学科。它的出现和发展既是现代工业发展的要求,又对现代工业的发展起到了巨大的促进作用。它使几何学从传统时代进入数字化定义的信息时代,焕发出勃勃生机。自 20 世纪 80 年代中期以后,国际上看准这一领域内最有发展前景的非均匀有理 B 样条(Non-Uniform Rational B-Spline,简称 NURBS)方法。国际标准化组织(International Standardization Organization,简称 ISO)于 1991 年正式颁布了关于工业产品几何定义的 STEP(Standard for The Exchange of Product model data,产品模型数据交换标准)作为国际标准,把 NURBS 方法作为定义产品形状的惟一数学方法。在对该方法的研究不断深入的同时,越来越多的商用 CAD/CAM 系统,如国际上著名的 CATIA、UGII、Pro/Engineer、I-DEAS、Solidworks、Solidedge、CIMATRON、MDT 等三维 CAD/CAM 软件及内核 ACIS 与 Parasolid,都先后开发、扩充了 NURBS 功能,国内也先后推出了分别以 ACIS 与 Parasolid 为内核的广州红地公司的金银花、北航-海尔公司的 CAXA 三维电子图板与制造工程师等三维 CAD 软件,迅速将科研成果转化为实际生产力。国际上对 NURBS 有突出贡献的皮格尔(Piegl)与蒂勒(Tiller)在所合著 *The NURBS Book* 一书序言中指出,NURBS 起着类似于科技英语和商贸英语角色的作用。当今,还可看到 NURBS 应用于可视艺术如电影、动画、娱乐、艺术、雕塑中的物体造型,在虚拟现实应用中制做场景等。可以预见,NURBS 将会在越来越广阔的范围内获得应用。

皮格尔在 1991 年指出,“关于 NURBS 的出版物与基础研究落后于开发工作”。我国自苏步青与刘鼎元合著颇有影响的《计算几何》一书于

1981 年出版以来,尚缺乏能反映本学科十多年来所取得的巨大进展并适合工科院校使用的教材。出于工科院校机械 CAD/CAM 专业研究生教学的需要,同时也为了满足公司、工厂、科研院所广大技术人员系统地学习本学科特别是 NURBS 方法的需要,笔者尝试编著本教材。

考虑到研究生的学业背景与基础有较大的差异,以及公司、工厂、科研院所技术人员的培训需要,本教材的编著力图做到以本科毕业生的知识水平为起点并具有研究生教学层次的深度与广度。

本教材主要介绍工业产品形状描述的数学方法。从主要面向工程应用出发,不以追求数学理论上严密完整为目的。因此,在选材上略去了所有繁琐的数学公式及其推导、证明,尽量提供给读者既几何直观又简单实用的结果,便于掌握和推广应用。本教材作为笔者多年从事研究生 CAGD 学位课教学及理论、实际研究工作的总结而奉献给广大读者,期望它能对本学科知识的传播、推广应用和发展起到积极作用。

本书自 1994 年 2 月初版以来,受到专家、同行与广大读者的欢迎、肯定和好评,许多高校将其作为研究生教学用书。1996 年 1 月初版书获中国航空工业总公司第四届航空高校优秀教材二等奖,2000 年 6 月入选为教育部研究生工作办公室推荐的研究生教学用书。

在此次修订再版之时,特别要提到 CAGD 学科领域的一个重要事件。这就是在本书初版后的第二年——1995 年,由当时关于 NURBS 研究的权威皮格尔和蒂勒合著的 *The NURBS Book*^[205] 一书公开出版,向全世界发行。这是国际业界同行们期待已久的事情。该书详细、系统且通俗明了地向读者介绍了关于 NURBS 的理论、概念、原理、算法及丰富的实践经验。全书图文并茂,包括 334 个由计算生成和绘制的图形,还向读者提供了名为 Nlib V1.0/V2.0 的 NURBS 程序库。这是两位作者长期进行 NURBS 理论研究与实践的结晶,也是呕心沥血耕耘四年结出的硕果。该书一经问世,就受到专家与广大读者的热诚欢迎,一年之内又出版了软皮本,1997 年又推出第二版。我们衷心感谢皮格尔和蒂勒对 NURBS 研究所做出的卓越贡献以及推出的这部关于 NURBS 的权威之作。笔者向国内同行和广大读者极力推荐阅读他们这本书的英文原著。

针对本书初版以来在教学过程中和读者的学习过程中所发现的印刷错误及内容上的个别不妥之处,又考虑到近年来教学与科研实践提出的问题,以及本学科领域所取得的一些新进展,此次再版,对全书内容结构作了调整,并进行了局部修改、删节和补充。笔者认为,尽管皮格尔和蒂

勒合著的 *The NURBS Book*^[205] 一书出版在本书初版之后,但他们在此之前已公开发表的关于 NURBS 的论文的重要内容也即 *The NURBS Book* 一书的重要内容大都已编入本书初版。考虑到作为 CAGD 学科的课程教材,仍保留初版书的体系和风格。由于本课程内容的特点,使得一些读者在接触本教材第二章曲线曲面的基本理论时,因内容抽象产生望而生畏甚至望而却步,这次修订版力图降低这部分的难度,使之深入浅出,通俗易懂。学习本书,需要在理解掌握概念、原理、方法的基础上解决本学科的实践问题和科学计算问题。为此,修订版适当增加了例题和实践内容,以帮助读者运用书中所学的知识解决实际问题。初版书曾就书中的重要算法给出了少量用 FORTRAN 77 编写的源程序。这次再版将其改用目前流行范围更广的 Visual C++ 工具编写。以此为出发点,只要读者熟悉该工具和其他任何一种科学计算编程语言,相信都能用程序实现所掌握的本书中任何算法。为增强内容的连贯性和整体性,每章开始加引言,后有小结,全书终结处有结束语。几何本是直观可见的对象,为收到更好的教学效果,笔者组织有关人员在本课程教学演示原型软件的基础上,进一步研制、开发了辅助本课程教学与研究的软件。

在 20 多年前,北京航空航天大学吴骏恒教授指引笔者进入 CAD 领域,并让笔者承担此课程的教学和科研工作。吴骏恒教授有着面向应用与开拓市场的意识,唐荣锡教授对本领域具有广博的知识并对国外研究新进展进行快速追踪;朱心雄教授严谨治学并对本领域前沿课题进行孜孜不倦的探索,出版了国内本学科有影响力的专著《自由曲线曲面造型技术》^[208]。他与雷毅教授率先在国内开展对 NURBS 的研究并成功开发出 CAXA 系列 CAD/CAM 软件;对我国建立 CAGD 学科做出开创性贡献的复旦大学苏步青教授、刘鼎元教授与中国科学技术大学常庚哲教授指引、扶持和评阅笔者的硕士论文;对我国 CAD/CAM 与计算机图形学的发展做出重要贡献的西北工业大学已故杨彭基教授、中国科学院计算所刘慎权教授、青岛北海船厂王其昌高级工程师、西北工业大学叶正麟教授等给与笔者工作肯定和鼓励;清华大学杨小庆教授认真审阅初版全书并对该书予以肯定。上述各位教授、高级工程师以及北京航空航天大学机械学院陈其明、唐智荣、满庆风等教授对初版书的推荐,清华大学许隆文教授借阅笔者国标 GB/T 14213 - 2001 初始图形交换规范 IGES (Initial Graphics Exchange Specification) 5.3 的送审稿,都对笔者从事本领域的研究、取得进展及本教材的编著起着莫大的推动作用。一些研究生和读者

敏锐地发现了本教材中的某些错误与问题,使之得到更正。硕士生肖方改写了书中的程序,并作为硕士论文题目,同博士生朱学新、罗国富、张孟玫、李晋芳和硕士生王彬、盖玉收一起,在原型软件的基础上研制、开发了辅助教学与研究软件。在此向他们表示由衷的感谢。笔者还要感谢教育部研究生工作办公室实行了旨在提高我国研究生教学质量的教材审定措施,感谢参加审定工作的各位专家、教授,更要感谢关心本书的业界同行和广大读者。

有幸获得国家自然科学基金资助有关 CAGD 的研究课题,如雪中送炭,为研究与编写本书提供了必不可少的条件,在此特别致以深挚的感谢。

作为研究生 CAGD 课程的基本教材,内容范围不可能涉及得过宽。由于笔者阅历、水平与时间受限,仍可能漏编一些重要内容或书中存在不妥之处,敬请广大读者不吝指正。

编著者

2001 年 3 月

内容说明与教学实施

本书共分 14 章。第一章绪论是本学科概貌综述与总纲介绍;第二章主要介绍必需的微分几何基础理论;第三章、第四章作为独立方法介绍,对其后各章也有一定的基础作用;第五章至第十二章介绍的贝齐尔—B 样条—NURBS 方法是本教材的主干与重点部分,其中前一方法依次又是后一方法的基础,穿插于其间的第六章几何连续性也是本学科内容的重要方面;第十三章所介绍的孔斯曲面既有与 NURBS 不相容的成分,也有相容的成分,是一种独特的构造曲面的方法;第十四章三边贝齐尔曲面片则是与 NURBS 完全不同的曲面定义方法,但又具有相当重要的实用价值。每章末都附有复习思考与练习,供读者复习时参考使用。

本课程用一学年修完。即使以 64 课内学时计,本教材内容的份量也显得过重,不宜平均分配学时,重点应放在曲线曲面基本理论与贝齐尔—B 样条—NURBS 方法上。在介绍这些方法时,应着重介绍它们的由来、基本思路或解决问题的途径、基本概念、性质及计算算法。与一般的专业基础课及本科生课程不同,在坚持掌握必要的基础知识、突出重点与面向工程应用的同时,应随时注意本学科领域迅速发展而带动的技术新进展,在教学过程中适时删略一些内容并增补有关新内容。

教学全过程包括五个主要环节:讲课与双向交流形式的课堂讨论、自学、程序演示、大型作业与复习考试。由于本课程学习内容的特殊性,如果试图单纯依靠自学,会付出成倍的代价。请学术造诣较深并对本课程的教学有丰富经验的老师讲授,辅以课堂讨论和即时答疑,并与自学相结合则将会事半功倍。由于本课程实践性强,因而穿插于教学过程中的大量的程序演示,将把理论与实际紧密结合起来,这是提高教学质量必不可少的有效手段。教学过程中期所安排的大型程序作业,需要读者自己动手完成。书中介绍的一些程序有助于读者较快熟悉作业思路。凡经过认真完成大型作业的同学,都将得到很大的收获。最后环节的复习考试,将是读者对所学内容的全面总结、巩固与提高。

符号说明

\mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{d} 、 \mathbf{p} 、 $\boldsymbol{\rho}$ 等小写黑体英文与希腊字母表示矢量。

\mathbf{ab} 表示两矢量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的数积。

$\overline{\mathbf{ab}}$ 表示连接两绝对矢量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 所示两点的连线及长度。

A 、 B 、 AB 依次表示点 A 、点 B 、 A 与 B 两点连线及长度。

$\mathbf{p}(u)$ 、 $\mathbf{p}_-(u)$ 、 $\mathbf{p}_+(u)$ 分别表示参数 u 的矢函数及其左、右极限。

$\dot{\mathbf{p}}(u)$ 、 $\ddot{\mathbf{p}}(u)$ 、 \cdots 、 $\mathbf{p}^{(k)}(u)$ 分别表示曲线 $\mathbf{p}(u)$ 关于一般参数 u 的一阶、二阶、三阶、 k 阶导矢。

$\mathbf{p}'(s)$ 、 $\mathbf{p}''(s)$ 、 $\mathbf{p}'''(s)$ 、 $\mathbf{p}^{(k)}(s)$ 分别表示曲线 $\mathbf{p}(s)$ 关于弧长参数 s 的一阶、二阶、三阶、 k 阶导矢。

\mathbf{p}_u 、 \mathbf{p}_{uu} 、 \mathbf{p}_v 、 \mathbf{p}_{vv} 、 \mathbf{p}_{uv} 依次表示曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ 关于参数 u 的一阶、二阶偏导矢, 关于参数 v 的一阶、二阶偏导矢, 以及混合偏导矢。高阶偏导矢符号仍服从一般规定。

\mathbf{D} 、 \mathbf{P} 分别表示矢量 \mathbf{d} 、 \mathbf{p} 的齐次坐标或带权矢量。

Δu 、 $\Delta \mathbf{p}$ 分别表示参数 u 和矢函数 \mathbf{p} 的增量。

Δ_i 、 Δ_j 、 $\Delta \mathbf{p}_i$ 分别表示 u 、 v 参数序列与矢量 \mathbf{p} 序列的一阶向前差分, 即 $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$, $\Delta_j = v_{j+1} - v_j$, $\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$ 。

$\Delta^k \mathbf{p}_i$ 表示矢量 \mathbf{p} 序列的 k 阶向前差分。取递推定义, 有 $\Delta^0 \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i$, $\Delta^k \mathbf{p}_i = \Delta^{k-1} \mathbf{p}_{i+1} - \Delta^{k-1} \mathbf{p}_i$ 。

Δ_u 表示关于参数 u 的一个分割 $u_0 < u_1 < \cdots < u_n$ 。

目 录

第一章	绪论	1
	1.1 CAGD 的研究对象与核心问题	1
	1.2 形状数学描述的发展主线	2
	1.3 其他一些重要进展与趋向	4
	1.4 对于形状数学描述的要求	7
	小结	10
	复习思考与练习	11
第二章	曲线和曲面的基本理论	12
	2.1 CAGD 中矢量、点与直线	12
	2.2 曲线与曲面的参数表示	15
	2.3 曲线论	18
	2.3.1 曲线的表示	18
	2.3.2 曲线的导矢	20
	2.3.3 切触阶的概念	22
	2.3.4 曲线论的基本公式、曲率与挠率	23
	2.3.5 曲线的几何特征	26
	2.4 曲面论	28
	2.4.1 曲面表示	28
	2.4.2 直纹面与可展曲面	29
	2.4.3 曲面上的曲线和曲面的度量性质	30
	2.4.4 曲面的曲率性质	31
	2.5 曲线曲面的几何不变性	35
	2.6 参数化与参数变换	38
	小结	41
	复习思考与练习	42
第三章	参数多项式插值与逼近	45
	3.1 基本概念	45
	3.1.1 插值与逼近	45
	3.1.2 多项式基	46
	3.1.3 数据点的参数化	46

	3.2 多项式插值曲线	50
	3.3 最小二乘逼近	53
	3.4 弗格森参数三次曲线	55
	3.4.1 参数三次曲线方程	56
	3.4.2 参数三次曲线的几何特征	58
	3.4.3 三次埃尔米特插值的域变换	62
	3.5 张量积曲面	64
	3.6 曲面数据点的参数化	67
	3.7 参数双三次曲面片	69
	小结	72
	复习思考与练习	72
第四章	参数样条曲线曲面	75
	4.1 参数连续性	75
	4.2 C^1 分段三次埃尔米特插值	76
	4.3 参数三次样条曲线	78
	4.3.1 参数三次样条曲线的提出	78
	4.3.2 三切矢方程	79
	4.3.3 边界条件	80
	4.3.4 计算插值	85
	4.3.5 样条曲线计算举例	87
	4.3.6 参数三次样条曲线的类型划分	89
	4.3.7 参数三次样条曲线的性质	91
	4.4 参数三次样条曲线的光顺性	92
	4.4.1 曲线光顺性准则	92
	4.4.2 光顺性分析	94
	4.4.3 光顺问题处理	97
	4.5 弗格森样条曲面	100
	4.6 孔斯双三次样条曲面	102
	4.7 参数双三次样条曲面	104
	4.7.1 参数双三次样条曲面方程	104
	4.7.2 求解未知偏导矢	104
	4.7.3 计算插值	106
	4.7.4 参数样条曲面的光顺性	109
	小结	110
	复习思考与练习	111
第五章	贝齐尔曲线曲面	114

5.1 贝齐尔曲线及其性质	115
5.1.1 贝齐尔曲线方程	115
5.1.2 伯恩斯坦基函数的性质	116
5.1.3 贝齐尔曲线的性质	118
5.2 贝齐尔曲线的线性运算	120
5.2.1 贝齐尔曲线的递推定义	120
5.2.2 贝齐尔曲线的导矢	124
5.2.3 贝齐尔曲线的分割	126
5.2.4 求点、导矢及分割的程序实现	126
5.2.5 贝齐尔曲线的任意分割	128
5.2.6 贝齐尔曲线的延拓	129
5.3 贝齐尔曲线的升阶与降阶	130
5.3.1 贝齐尔曲线的升阶	130
5.3.2 贝齐尔曲线的降阶	132
5.4 贝齐尔曲线计算举例	133
5.5 贝齐尔曲线的矩阵形式	135
5.6 计算曲线上点串的增量方法	137
5.7 贝齐尔曲线的几何特征	140
5.8 张量积贝齐尔曲面	143
5.8.1 张量积方法	143
5.8.2 德卡斯特里奥方法	145
5.8.3 贝齐尔曲面的性质	148
5.8.4 偏导矢与法矢	148
5.8.5 退化曲面片与平移曲面	150
5.8.6 分割与升阶	153
5.9 贝齐尔多边形与贝齐尔网络的确定	154
5.9.1 一般的贝齐尔曲线拟合	155
5.9.2 特殊的贝齐尔曲线拟合	156
5.9.3 一般的贝齐尔曲面拟合	158
5.9.4 拟球面	161
小结	162
复习思考与练习	163
第六章 几何连续性	166
6.1 参数连续的组合贝齐尔曲线	166
6.1.1 参数连续条件	166
6.1.2 C^1 二次与 C^2 三次样条曲线	170

6.1.3 参数连续性问题初析	172
6.2 参数曲线的几何连续性	173
6.2.1 参数连续性问题再析与几何连续性的提出	173
6.2.2 几何连续的三次插值样条曲线	175
6.2.3 三次样条曲线光滑的新途径	177
6.2.4 参数曲线的几何连续性定义	178
6.3 几何连续的组合贝齐尔曲线	183
6.3.1 两贝齐尔曲线 G^2 连续的几何关系	183
6.3.2 Gamma 样条曲线	186
6.3.3 组合贝齐尔曲线的 G^2 Beta 约束	188
6.3.4 Beta 样条曲线	189
6.3.5 挠率连续的组合贝齐尔曲线	190
6.4 参数曲面的几何连续性	195
6.4.1 曲面的参数连续性及其问题	195
6.4.2 参数曲面的几何连续性定义	197
6.4.3 两贝齐尔曲面的 G^1 连接	199
6.4.4 带 n 面角点的贝齐尔曲面的 G^1 连接	201
6.4.5 两贝齐尔曲面的 G^2 连接	206
小结	208
复习思考与练习	209
第七章 B 样条曲线曲面 I	211
7.1 B 样条与 B 样条曲线的基本概念	211
7.1.1 B 样条曲线方程及其与贝齐尔曲线的比较	211
7.1.2 B 样条的递推定义及其性质	212
7.1.3 B 样条曲线的局部性质与定义域	214
7.1.4 B 样条曲线的其他一些性质	219
7.1.5 重节点对 B 样条与 B 样条曲线的影响	220
7.2 B 样条曲线的类型划分	224
7.3 均匀 B 样条曲线	227
7.4 准均匀 B 样条曲线	230
7.5 分段贝齐尔曲线	233
7.6 非均匀 B 样条曲线	234
7.6.1 节点矢量的确定	234
7.6.2 B 样条基及其导数计算	238
7.6.3 计算 B 样条曲线上点的德布尔算法	239
7.6.4 德布尔算法求 B 样条曲线的导矢	244

7.6.5 B样条曲线计算举例	245
7.6.6 B样条闭曲线与开曲线的统一表示	248
小结	251
复习思考与练习	251
第八章 B样条曲线曲面Ⅱ	254
8.1 反算 B样条插值曲线的控制顶点	254
8.1.1 曲线反算的一般过程	254
8.1.2 三次 B样条插值曲线节点矢量的确定	255
8.1.3 反算三次 B样条插值曲线的控制顶点	256
8.1.4 与参数三次样条曲线的关系	260
8.2 插入节点	262
8.2.1 插入一个节点	262
8.2.2 重复插入同一节点	264
8.2.3 进一步的结论	266
8.3 B样条曲线的升阶	267
8.3.1 问题所在	267
8.3.2 普劳茨方法	268
8.3.3 科恩-利切-舒马克方法	272
8.4 B样条曲线的节点消去与降阶	273
8.5 B样条曲线的分裂与组合	274
8.5.1 B样条曲线的分裂	275
8.5.2 B样条曲线的组合	277
8.6 B样条曲线逼近	279
8.6.1 最小二乘曲线逼近	280
8.6.2 在规定精度内的曲线逼近	283
8.7 B样条曲面及其正算	284
8.7.1 B样条曲面方程及性质	284
8.7.2 B样条曲面的正算	285
8.8 B样条曲面的反算	288
8.8.1 曲面反算的一般过程	288
8.8.2 双三次 B样条插值曲面的反算	289
8.9 蒙面法生成曲面	294
8.10 B样条曲面逼近	299
小结	302
复习思考与练习	303
CAGD大型程序作业	304

第九章 有理 B 样条曲线曲面 I	306
9.1 NURBS 方法的提出及优缺点	306
9.2 三种等价的 NURBS 曲线方程	310
9.2.1 有理分式表示	310
9.2.2 有理基函数表示	310
9.2.3 齐次坐标表示	312
9.2.4 三种等价的 NURBS 曲线方程比较	314
9.3 权因子对 NURBS 曲线形状的影响	315
9.3.1 投影变换中的交比	315
9.3.2 权因子的几何意义与影响	317
9.4 有理一次贝齐尔曲线	319
9.4.1 有理一次贝齐尔曲线方程	319
9.4.2 权因子与参数化	320
9.5 二次曲线弧的有理贝齐尔表示	321
9.5.1 二次曲线的隐方程表示	321
9.5.2 二次曲线弧的有理贝齐尔形式的导出	322
9.5.3 权因子与参数化的关系	324
9.5.4 有理二次贝齐尔曲线的递推定义与几何作图	327
9.5.5 与权因子变换对参数化有同样影响的参数变换	329
9.5.6 有理二次贝齐尔曲线的形状分类	332
9.5.7 负权因子对有理二次贝齐尔曲线的影响	335
9.6 反求标准型有理二次贝齐尔曲线的参数与权因子	338
9.7 无限远控制顶点及其应用	340
小结	343
复习思考与练习	343
第十章 有理 B 样条曲线曲面 II	346
10.1 各种圆弧的二次 NURBS 表示	346
10.1.1 对圆弧 NURBS 表示的要求	347
10.1.2 有理二次贝齐尔曲线的插入节点	348
10.1.3 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 圆弧的二次 NURBS 表示	350
10.1.4 整圆 ($ \theta = 360^\circ$) 的二次 NURBS 表示	353
10.1.5 $180^\circ < \theta \leq 360^\circ$ 圆弧的二次 NURBS 表示	354
10.2 各种二次曲线弧的二次 NURBS 表示	358
10.2.1 圆弧经仿射变换得到椭圆弧	359
10.2.2 有理二次贝齐尔曲线的固定切向分割	361
10.2.3 $180^\circ < \theta \leq 360^\circ$ 椭圆弧的二次 NURBS 表示	364

10.2.4 整圆与整椭圆二次 NURBS 的讨论	367
10.3 有理三次贝齐尔曲线	368
10.3.1 有理三次贝齐尔曲线的肩点与形状因子	369
10.3.2 有理三次贝齐尔曲线的渐近方向	371
10.3.3 有理三次贝齐尔曲线的特殊形式	372
10.3.4 圆弧的有理三次贝齐尔表示与三次 NURBS 表示	375
10.4 有理 n 次贝齐尔曲线	382
10.4.1 有理德卡斯特里奥算法	382
10.4.2 分割、插入节点与升阶	384
10.4.3 有理贝齐尔曲线的几何作图	386
10.4.4 有理 n 次贝齐尔曲线的权因子变换与参数变换	388
10.4.5 有理贝齐尔曲线的形状修改	391
10.4.6 导矢计算	393
小结	394
复习思考与练习	395
第十一章 有理 B 样条曲线曲面 III	398
11.1 有理参数曲线的连续性	398
11.1.1 有理参数连续性约束	399
11.1.2 有理几何连续性约束	402
11.1.3 弗朗内特标架连续性	403
11.1.4 有理弗朗内特标架连续性约束	404
11.2 几何连续有理样条曲线	405
11.2.1 曲率连续有理二次样条曲线	406
11.2.2 有理几何样条预备知识	409
11.2.3 曲率连续有理三次样条曲线	412
11.2.4 挠率连续有理四次样条曲线	414
11.3 有理插值	417
11.3.1 整体有理插值	417
11.3.2 局部有理插值	419
11.4 一般 NURBS 曲线及其计算	421
11.5 NURBS 曲线的形状修改	425
11.5.1 重新定位控制顶点	425
11.5.2 反插节点	426
11.5.3 重新确定权因子	428
11.5.4 同时改变两个权因子的推拉	429
11.5.5 对界定曲线部分的修改	430