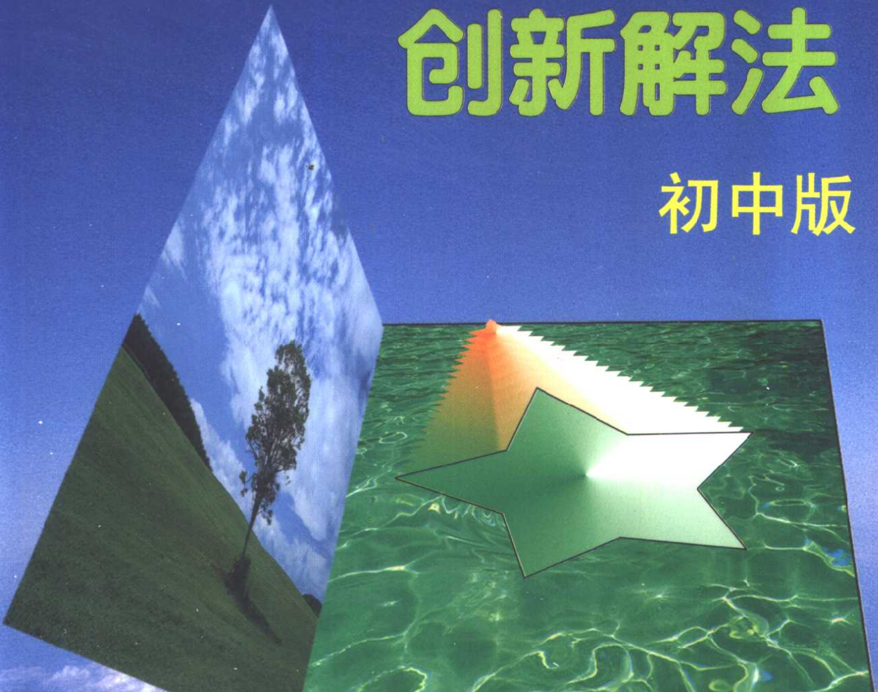
翟连林　贾士代　主编

数学题

创新解法

初中版



北京教育出版社

数学题创新解法

初中版

主编 翟连林 贾士代

编委 岳明义 梁瑞兴 林福堂

翟 华 邸艳茹 申学华

执笔 贾玲娟 张子莲 詹红庆 赵素娟

杨景飞 苗荣青 任 净 王志强

马十成 张亚红 肖海泉 张海滨

北京教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学题创新解法．初中版/翟连林主编．—北京：北京教育出版社，2001．5
ISBN 7-5303-0239-6

Ⅰ．数…　Ⅱ．翟…　Ⅲ．数学课—初中—解题
Ⅳ．G634．605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 027509 号

数学题创新解法（初中版）

SHUXUETI CHUANGXIN JIEFA（CHUZHONGBAN）

翟连林　贾士代　主编

*

北京教育出版社出版
（北京北三环中路 6 号）
邮政编码：100011
网址：www. bph. com. cn
北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
北京冶金大业印刷有限公司印刷

*

850×1168 毫米　32 开本　11．5 印张　250000 字
2001 年 5 月第 1 版　2002 年 2 月第 2 次印刷
印数：8001—16000

ISBN 7-5303-0239-6
G·217　定价：15．00 元

前 言

在实施素质教育的过程中，我们体会到，高素质的学生必须具有很强的创造思维能力。为了造就高水平的人才，教师必须注意引导学生对数学问题的解法进行创新。数学问题的“创新解法”具有思想新颖、奇特、独创、别具一格的特点，它能给学生以最好的刺激，使学生对数学产生浓厚的兴趣。为了推进素质教育，我们把多年在这方面的教学经验，精心编制成这套丛书，奉献于社会。

《新教学大纲》中指出，“能力是在知识的教学和技能的训练中，通过有意识地培养而得到发展的”。要使学生具有“创新解法”的能力，应使他们首先有扎实的数学基础，没有牢固的基础知识和对数学方法的掌握，是很难达到创新的。教师还要有意识地培养学生的发散思维能力，经常引导学生从不同的角度、沿不同的方向去观察问题、分析问题和寻找问题的不同解法。鼓励学生不因循守旧，敢于怀疑前人的结论，不满足于对问题的已有解法，大胆探索新思路、新解法。学生的思维扩散越广，发散量越大，新颖成分也越高，创新解法也越多。

这套丛书是对学生进行系统的“创新解法”教育的一次尝试，希望能起到抛砖引玉的作用。

编者

2001 年夏

目　　录

第一章　整　式

例 1　已知 $a=10000, b=9999$,求 $a^2+b^2-2ab-6a+6b+7$ 的值.

【一般解法】

把 a、b 的值直接代入被求值的式子中去计算(略).

【创新解法】

$\because\quad a-b=10000-9999=1,$

$\therefore\quad a^2+b^2-2ab-6a+6b+7$

$=(a-b)^2-6(a-b)+7$

$=1-6+7$

$=2.$

例 2　已知 $b-d=3$,$(a+b-c-d)^2+(a-b-c+d)^2=24$.求 $(a+b-c-d)(a-b-c+d)$ 的值.

【一般解法】

把 $b-d=3$ 代入

$(a+b-c-d)^2+(a-b-c+d)^2=24$ 中,得

$[(a-c)+3]^2+[(a-c)-3]^2=24,$

即　$2(a-c)^2+18=24,$

$\therefore\quad (a-c)^2=3.$

于是　$(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

$=[(a-c)+3][(a-c)-3]$

$=(a-c)^2-9$

$=3-9=-6.$

【创新解法】

由$(a+b-c-d)^2+(a-b-c+d)^2=24$,得

$[(a+b-c-d)-(a-b-c+d)]^2+2(a+b-c-d)(a-b-c+d)=24$,

即　$4(b-d)^2+2(a+b-c-d)(a-b-c+d)=24$.

$\because$　$b-d=3$,

$\therefore$　$(a+b-c-d)(a-b-c+d)=-6$.

例 3　如果今天是星期二,那么再过 99^3 天是星期几?

【一般解法】

$\because$　$99^3=970299=138614\times7+1$,

$\therefore$　再过 99^3 天是星期三.

【创新解法】

$\because$
$$\begin{aligned}99^3&=(14\times7+1)^3\\&=(14\times7)^3+3\times(14\times7)^2\times1+3\\&\quad\times(14\times7)\times1^2+1^3\\&=(14^3\times7^2+3\times14^2\times7+3\times14)\times7+1,\end{aligned}$$

$\therefore$　再过 99^3 天是星期三.

例 4　a、b、c 是已知实数,x、y 是任意实数,设 $A=(a-b)x+(b-c)y+(c-a)$,$B=(b-c)x+(c-a)y+(a-b)$,$C=(c-a)x+(a-b)y+(b-c)$.求证:A、B、C 不能都是正数,也不能都是负数.

【一般证法】

(略)

【创新证法】

$\because$
$$\begin{aligned}A+B+C=&(a-b+b-c+c-a)x+(b-c+c-a\\&+a-b)y+c-a+a-b+b-c=0,\end{aligned}$$

$\therefore$　A、B、C 不能都是正数,也不能都是负数.

例 5 求证：$(a^2+ab+b^2)^2+4ab(a+b)^2=(a^2+3ab+b^2)^2$.

【一般证法】

$\because$ 原式左边 $=a^4+a^2b^2+b^4+2a^3b+2a^2b^2+2ab^3$

$$+4ab(a^2+2ab+b^2)$$

$$=a^4+6a^3b+11a^2b^2+6ab^3+b^4,$$

原式右边 $=a^4+9a^2b^2+b^4+6a^3b+2a^2b^2+6ab^3$

$$=a^4+6a^3b+11a^2b^2+6ab^3+b^4,$$

$\therefore$ 原式成立.

【创新证法】

设 $(a+b)^2=A$, $ab=B$,则

$$a^2+ab+b^2=A-B,\quad a^2+3ab+b^2=A+B.$$

于是 原式左边 $=(A-B)^2+4BA=(A+B)^2$

$$=(a^2+3ab+b^2)^2,$$

故 原式成立.

例 6 求证：$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+2(a+b)(b+c)+2(a+b)(c+a)+2(b+c)(c+a)=4(a+b+c)^2$.

【一般证法】

原式左边 $=a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ac+a^2$

$$+2(ab+ac+b^2+bc)+2(ac+a^2+bc+ba)$$

$$+2(bc+ba+c^2+ac)$$

$$=4(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)$$

$$=4(a+b+c)^2,$$

$\therefore$ 原式成立.

【创新证法】

令 $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$,则

原式左边 $=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$=(x+y+z)^2$

$=(a+b+b+c+c+a)^2$

$=4(a+b+c)^2$,

∴ 原式成立.

例 7 求证:$2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$.

【一般证法】

原式左边 $=2(a^2-ac-ab+bc+b^2-ab-bc+ac+c^2-bc-ac+ab)$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$,

原式右边 $=b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ac+a^2+b^2-2ab$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$,

∴ 原式成立.

【创新证法】

设 $a-b=x, c-a=y. b-c=z$,则 $x+y+z=0$.

从而 $(x+y+z)^2=0$,

即 $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=0$,

∴ $-2xy-2yz-2xz=x^2+y^2+z^2$,

即 $-2(a-b)(c-a)-2(c-a)(b-c)-2(a-b)(b-c)$

$=(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2$,

故 $2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$

$=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$.

例 8 求证:$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

【一般证法】

原式左边 $=(xy+xz+y^2+yz)(z+x)+xyz$

$=xyz+x^2y+xz^2+x^2z+y^2z+y^2x+yz^2+xyz$

$+ xyz$

$= 3xyz + x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)$,

原式右边 $= x^2y + xyz + zx^2 + xy^2 + y^2z + xyz + xyz + yz^2 + z^2x$

$= 3xyz + x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)$,

$\therefore$ 原式成立.

【创新证法】

设 $x+y+z=s$,则

原式左边 $= (s-x)(s-y)(s-z) + xyz$

$= s^3 - (x+y+z)s^2 + (xy+yz+zx)s - xyz + xyz$

$= s^3 - s^3 + (xy+yz+zx)(x+y+z)$

$= (x+y+z)(xy+yz+zx)$,

$\therefore$ 原式成立.

例 9 已知 $(a-c)^2 - 4(a-b)(b-c) = 0$,求证:$a+c=2b$.

【一般证法】

$\because$ $(a-c)^2 - 4(a-b)(b-c) = 0$,

$\therefore$ $a^2 - 2ac + c^2 - 4ab + 4ac + 4b^2 - 4bc = 0$,

即 $(a^2 + 2ac + c^2) - 4b(a+c) + (2b)^2 = 0$,

$\therefore$ $(a+c)^2 - 2(a+c)(2b) + (2b)^2 = 0$,

即 $(a+c-2b)^2 = 0$,

故 $a+c=2b$.

【创新证法一】

$\because$ $(a-c)^2 - 4(a-b)(b-c) = 0$,

$\therefore$ $[(a-b)+(b-c)]^2 - 4(a-b)(b-c) = 0$,

从而 $(a-b)^2 + 2(a-b)(b-c) + (b-c)^2 - 4(a-b)(b$

$-c)=0$,

即 $(a-b)^2-2(a-b)(b-c)+(b-c)^2=0$,

$\therefore$ $[(a-b)-(b-c)]^2=0$,

即 $(a+c-2b)^2=0$,

故 $a+c=2b$.

【创新证法二】

(1)若 $a=b$,则易得此命题成立;

(2)若 $a\neq b$,则由$(a-c)^2-4(a-b)(b-c)=0$,可得关于 x 的二次方程$(a-b)x^2-(a-c)x+(b-c)=0$ 有两个相等的实根.

$\because$ $a-b-(a-c)+b-c=0$,

$\therefore$ 这个方程的两个根都为 1.

于是由韦达定理,可得

$$\frac{b-c}{a-b}=1\times1,$$

即 $b-c=a-b$,

$\therefore$ $a+c=2b$.

故由(1),(2)可知,这个命题成立.

例 10 已知 $a+b+c=a^2+b^2+c^2=2$,

求证:$a(1-a)^2=b(1-b)^2=c(1-c)^2=abc$.

【一般证法】

$\because$ $a+b+c=2$,

$\therefore$ $b+c=2-a$,

从而 $b^2+c^2+2bc=4-4a+a^2$ ①

$\because$ $a^2+b^2+c^2=2$,

$\therefore$ $b^2+c^2=2-a^2$ ②

由①,②得

$$2-a^2+2bc=a^2-4a+4,$$

即 $a^2-2a+1=bc$,

$\therefore$ $(a-1)^2=bc$,

$\therefore$ $a(1-a)^2=abc$.

同理 $b(1-b)^2=abc$, $c(1-c)^2=abc$.

故 $a(1-a)^2=b(1-b)^2=c(1-c)^2=abc$.

【创新证法】

$\because$ $a+b+c=a^2+b^2+c^2=2$,

$$\therefore \quad ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]$$
$$=\frac{1}{2}(2^2-2)=1.$$

设方程$(x-a)(x-b)(x-c)=0$,则

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$,

$\therefore$ $x^3-2x^2+x-abc=0$,

即 $x(1-x)^2=abc$.

$\because$ a,b,c 是这个方程的三个根,

$\therefore$ $a(1-a)^2=abc$, $b(1-b)^2=abc$, $c(1-c)^2=abc$,

即 $a(1-a)^2=b(1-b)^2=c(1-c)^2=abc$.

例 11 已知实数 a,b,c,d 满足 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$,且 $ac+bd=0$,求证:$a^2+c^2=b^2+d^2=1$,且 $ab+cd=0$.

【一般证法】

$\because$ $a^2+b^2=c^2+d^2=1$,

$\therefore$ $a^2=1-b^2, c^2=1-d^2$.

从而 $(ac)^2=(1-b^2)(1-d^2)$

即 $(ac)^2=1-b^2-d^2+(bd)^2$ ①

$\because$ $ac+bd=0$, 则 $ac=-bd$,

$\therefore$ $(ac)^2=(bd)^2$ ②

于是由①,②可得

$$1-b^2-d^2=0,$$

即　$b^2+d^2=1$.

再由　$c^2+d^2=1$,可得

$$c^2=b^2.$$

$\therefore$　$a^2+c^2=a^2+b^2=1$.

$$\because\quad \begin{aligned}(ab+cd)^2&=(ab)^2+2abcd+(cd)^2\\&=a^2b^2+2abcd+c^2d^2\\&=a^2c^2+2(ac)(bd)+b^2d^2\\&=(ac+bd)^2\\&=0,\end{aligned}$$

$\therefore$　$ab+cd=0$.

【创新证法一】

$\because$　$a^2+b^2=1$,　$c^2+d^2=1$,　$ac+bd=0$,

$\therefore$　$ab+cd=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)$.

把上式右边展开,并整理成 c 的二次三项式,得

$$\begin{aligned}ab+cd&=abc^2+(a^2+b^2)dc+abd^2\\&=(ac+bd)(bc+ad)\\&=0.\end{aligned}$$

由　$ac+bd=0$ 和 $ab+cd=0$,得

$$\frac{a}{d}=-\frac{b}{c},\quad \frac{a}{d}=-\frac{c}{b},$$

$\therefore$　$-\frac{b}{c}=-\frac{c}{b}$,

即　$b^2=c^2$.

于是　$a^2+c^2=a^2+b^2=1$,

$$b^2+d^2=c^2+d^2=1.$$

【创新证法二】

$\because \quad a^2+b^2=1, \quad c^2+d^2=1, \quad ac+bd=0,$

$\therefore \quad (a^2+b^2-1)^2+(c^2+d^2-1)^2+2(ac+bd)^2=0,$

即 $\quad (a^2)^2+(b^2)^2+1+2a^2b^2-2a^2-2b^2+(c^2)^2+(d^2)^2$

$\quad +1+2c^2d^2-2c^2-2d^2+2a^2c^2+2b^2d^2+4abcd=0,$

整理,得

$[(a^2)^2+(c^2)^2+(-1)^2+2a^2c^2-2a^2-2c^2]+[(b^2)^2$

$\quad +(d^2)^2+(-1)^2+2b^2d^2-2b^2-2d^2]+2[(ab)^2$

$\quad +2(ab)(cd)+(cd)^2]=0,$

即 $\quad (a^2+c^2-1)^2+(b^2+d^2-1)^2+2(ab+cd)^2=0,$

$\because \quad a,b,c,d$ 都是实数,

$\therefore \quad a^2+c^2-1=b^2+d^2-1=ab+cd=0,$

故 $\quad a^2+c^2=b^2+d^2=1, \quad ab+cd=0.$

【创新证法三】

$\because \quad ac+bd=0,$

$\therefore \quad ac=-bd.$

由此可设 $c=bk$, 则 $d=-ak$.

$\therefore \quad c^2+d^2=(a^2+b^2)k^2,$

又 $\quad a^2+b^2=c^2+d^2=1,$

$\therefore \quad k^2=1.$

于是 $\quad a^2+c^2=a^2+b^2k^2=a^2+b^2=1,$

$\quad b^2+d^2=b^2+a^2k^2=a^2+b^2=1,$

$\quad ab+cd=ab+bk(-ak)$

$\quad =ab(1-k^2)=0.$

例 12 求证:$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$.

【一般证法】

原式左边 $=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$$
$$=[(a+b)+c][(a+b)^2-(a+b)c+c^2]$$
$$-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac),$$

$\therefore$ 原式成立.

【创新证法】

原式右边 $=[(a+b)+c][(a^2-ab+b^2)-(a+b)c+c^2]$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2c+(a+b)c^2$$
$$+c(a^2-ab+b^2)-(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc,$$

$\therefore$ 原式成立.

【评注】 式子 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$有实用价值,可作为公式使用,特别地,当 $a+b+c=0$ 时,有 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

例 13 已知 $3b=a+2c$,求 $a^3-27b^3+8c^3+18abc$ 的值.

【一般解法】

$\because$ $3b=a+2c$,

$\therefore$ $a^3-27b^3+8c^3+18abc$
$$=a^3-(3b)^3+8c^3+6a(3b)c$$
$$=a^3-(a+2c)^3+8c^3+6ac(a+2c)$$
$$=a^3-(a^3+6a^2c+12ac^2+8c^3)+8c^3+6a^2c+12ac^2$$
$$=0.$$

【创新解法】

由例 12 知,当 $x+y+z=0$ 时,
$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

$\because 3b=a+2c$, $\quad\therefore a-3b+2c=0.$

于是 $a^3-27b^3+8c^3+18abc$

$=[a^3+(-3b)^3+(2c)^3]+18abc$

$=3a\cdot(-3b)\cdot(2c)+18abc$

$=-18abc+18abc$

$=0.$

例 14 设 $x+y+z=3,(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0$,求证:$x,y,z$ 中至少有一个等于 1.

【一般证法】

将$(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0$ 的左端展开,整理,得

$x^3+y^3+z^3-3(x^2+y^2+z^2)+3(x+y+z)-3=0,$

即 $x^3+y^3+z^3-3[(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)]+6=0,$

$\therefore\quad x^3+y^3+z^3+6(xy+yz+xz)-21=0$ ①

$\because\quad x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)],$

$\therefore\quad x^3+y^3+z^3=3xyz+27-9(xy+yz+xz)$ ②

把②代入①中,可得

$$3xyz-3(xy+yz+xz)+6=0,$$

即 $xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1=0,$

$\therefore\quad (x-1)(y-1)(z-1)=0,$

于是 x,y,z 中至少有一个等于 1.

【创新证法】

$\because\quad x+y+z=3,$

$\therefore\quad (x-1)+(y-1)+(z-1)=0.$

又当 $a+b+c=0$ 时, $a^3+b^3+c^3=3abc,$

$\therefore\quad (x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3$

$=3(x-1)(y-1)(z-1)=0,$

故　x, y, z 中至少有一个等于 1.

例 15　求证：$512^3+675^3+720^3$ 是合数.

【一般证法】(略)

【创新证法】

设 $x=512$,　$y=675$,　$z=720$,

对这三个数进行质因数分解，可得 $2z^2=3xy$.

$\therefore$　$2z^3=3xyz$,　$z^3=3xyz-z^3$.

从而　$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-z^3+3xyz$

$=x^3+y^3+(-z)^3-3xy(-z)$

$=(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+xz$

$+yz)$,

又 $\because$　$x+y-z=467$,

$\therefore$　$512^3+675^3+720^3$ 可被 467 整除，

故它是个合数.

例 16　分解因式：$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

【一般解法】

原式 $=x^2y-x^2z+y^2z-y^2x+z^2(x-y)$

$=(x^2y-xy^2)-(x^2z-y^2z)+z^2(x-y)$

$=xy(x-y)-z(x^2-y^2)+z^2(x-y)$

$=xy(x-y)-z(x+y)(x-y)+z^2(x-y)$

$=(x-y)[xy-(x+y)z+z^2]$

$=(x-y)(x-z)(y-z)$.

【创新解法一】

把原式看作 x 的二次三项式去分解.

原式 $=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$

$=(y-z)[x^2-(y+z)x+yz]$

$=(y-z)(x-y)(x-z)$.