

# 纠错编码技术及应用

刘富全 编

JIUCUOBIANMAJISHUJITINGYONG

哈尔滨船舶工程学院出版社

TV  
L

382549

# 纠错编码技术及应用

刘富全 编



哈尔滨船舶工程学院出版社

(黑) 新登字第 9 号

### 内 容 简 介

全书分十一章, 主要介绍: 纠错编码技术和近代代数的基本概念、几种常用的检错码、线性分组码、循环码和卷积码的基本概念, 详细介绍几种重要循环码的编码和译码原理及其用硬件和软件实现的方法。

该书理论与实践并重, 通过实例详细介绍了根据可靠性的要求, 如何应用纠错编码技术进行硬件和软件的设计, 为读者在解决实际问题时提供捷径。

本书的特点是深入浅出, 阐述清晰, 有较丰富的实例。

本书可作计算机、通信等专业的教材, 亦可供有关工程技术人员参考。

JS179/20



纠错编码技术及应用

刘富全 编

责任编辑 郭镇明

\*

哈尔滨船舶工程学院出版社出版

新华书店首都发行所发行

毕升电脑排版有限公司排版

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 10.25 字数 385 千字

1993 年 12 月 第 1 版 1993 年 12 月 第 1 次印刷

印数: 1—2000 册

ISBN 7-81007-306-0

TP·15 定价: 7.60 元

# 前 言

随着数字通信、数据处理和计算机通信网的飞速发展，用户对数据传输和存贮的可靠性，提出了更高的要求。过去采用改进加工技术、线路技术、机械技术和提高元件的可靠性，来提高系统的可靠性。实践证明，它虽然是提高可靠性的一种途径，但是，利用这种方法提高可靠性是很困难的，原因是它不仅要花费很高的代价，而且也很难获得理想的效益。为此，如何提高整个系统的可靠性，已成为一个迫切需要解决的问题。

目前，提高系统可靠性最盛行的一种方法就是采用纠错编码技术。由于采用纠错码能有效地提高通信的可靠性，故日益受到人们的重视，自 60 年代以来，在这方面发表了很多有价值的论文。最近几年来，由于代数理论的应用，为纠错编码提供了理论基础；大规模集成电路的发展，为纠错编码提供了物资基础；尤其是编、译码器可用计算机由软件来进行模拟，更促进了纠错编码技术的应用和发展。

本书主要介绍纠错码理论，并在这个基础上阐述几种常用的纠错码在计算机系统中的应用。由于纠错编码技术需要较多的数学知识和通信方面的知识，而且篇幅有限，本书没有详细介绍这方面的内容，试图用较少的数学知识阐述纠错码的基本原理，同时还通过具体例子使读者了解纠错码的各种编译码原理和实现方法。另外，为了更好地通过计算机应用纠错编码技术解决实际问题，本书还介绍了如何应用软件实现编码和译码的方法。

本书是在作者“纠错编码技术”讲义基础上，根据近年来纠错编码技术的发展加以补充修改而成的。为了帮助读者掌握本书内容，在各章节都附有思考题与习题。

由于作者水平有限，错误和不足之处在所难免，恳切希望读者批评指正。

在本书编写过程中，得到哈尔滨工业大学孙圣和教授和哈尔滨船舶工程学院李生荣副教授的指导和帮助，在此表示衷心感谢，同时感谢侯牲深等同志为本书绘图所付的劳动。

编 者

1992 年 1 月

于哈尔滨

# 目 录

<b>第一章 概 述</b> .....	1
第一节 数字通信系统.....	1
第二节 纠错码的基本思想及术语解释.....	3
第三节 纠错码分类.....	8
思考题与习题.....	9
<b>第二章 检错码</b> .....	10
第一节 奇偶校验码 .....	10
第二节 水平一致校验码 .....	11
第三节 水平垂直一致校验码 .....	14
第四节 群计数码 .....	15
第五节 等比码 .....	16
思考题与习题 .....	16
<b>第三章 近代代数的基本概念</b> .....	17
第一节 群 .....	17
第二节 环 .....	19
第三节 域 .....	19
第四节 多项式周期 .....	20
第五节 矢量空间 .....	25
第六节 矩 阵 .....	26
思考题与习题 .....	28
<b>第四章 线性分组码</b> .....	30
第一节 基本概念 .....	30
第二节 线性分组码的编码 .....	31
第三节 线性分组码的译码 .....	38
第四节 汉明码 .....	44
第五节 缩短汉明码 .....	49
第六节 扩展汉明码和扩展码 .....	53
第七节 最佳奇重列码 .....	56
思考题与习题 .....	60

<b>第五章 循环码</b> .....	62
第一节 循环码的基本知识 .....	62
第二节 循环码的编码器 .....	68
第三节 循环码的译码器 .....	75
第四节 缩短循环码的译码 .....	86
第五节 捕错译码 .....	87
第六节 改进的捕错译码 .....	93
第七节 循环码的检错能力 .....	97
思考题与习题 .....	99
<b>第六章 BCH 码</b> .....	101
第一节 最小多项式 .....	101
第二节 有限域元素的计算 .....	105
第三节 BCH 码的基本概念 .....	110
第四节 BCH 码的译码 .....	122
第五节 钱 (Cnien) 搜索译码法 .....	131
第六节 BCH 码的迭代译码 .....	132
思考题与习题 .....	140
<b>第七章 法尔码及其应用</b> .....	141
第一节 法尔码的编码和译码 .....	142
第二节 快速译码法 .....	151
第三节 缩短法尔码和推广法尔码 .....	161
第四节 法尔码在磁盘中的应用 .....	171
第五节 法尔码在盒式磁带机中的应用 .....	175
思考题与习题 .....	179
<b>第八章 艾布拉姆森码</b> .....	180
第一节 概 述 .....	180
第二节 纠正错误的基本思想和过程描述 .....	181
第三节 纠错能力分析 .....	187
<b>第九章 最佳矩形码及其应用</b> .....	190
第一节 最佳矩形码的编码 .....	190
第二节 最佳矩形码的译码 .....	192
第三节 用软件实现编码和译码 .....	203
<b>第十章 大数逻辑译码</b> .....	208
第一节 一步大数逻辑译码原理 .....	208
第二节 $L$ 步大数逻辑译码原理 .....	211
第三节 大数逻辑译码器 .....	214

思考题和习题.....	219
<b>第十一章 卷积码.....</b>	<b>220</b>
第一节 卷积码的基本概念.....	220
第二节 卷积码的生成矩阵和校验矩阵.....	221
第三节 维特比译码.....	229
<b>附录一 最佳矩形码编码和译码程序清单.....</b>	<b>236</b>
<b>附录二 (254,240)缩短法尔码在盒式磁带中的应用程序清单 .....</b>	<b>246</b>
<b>参考文献.....</b>	<b>252</b>

# 第一章 概 述

纠错编码技术是提高数字传输可靠性或数字存贮可靠性的一种技术。为了更好地掌握纠错编码技术，首先从数字通信的组成和工作过程开始，从而引入纠错码的基本思想和一些术语，使读者对纠错编码技术有一个概略了解。

## 第一节 数字通信系统

所有数字通信系统，都是将信源发出的信息，经过适当变换和传输路径送给用户。所有这些系统可用图 1.1 所示的模型表示。

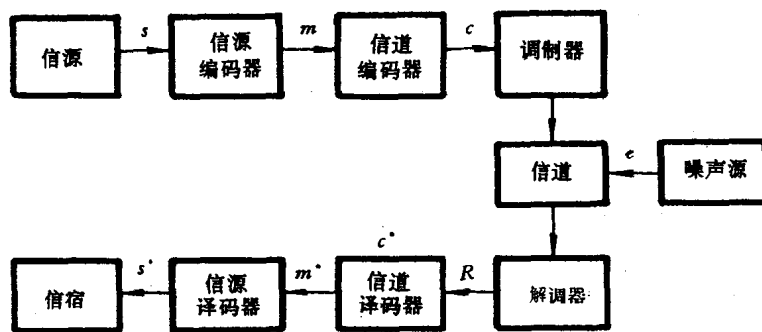


图 1.1 数字通信系统模型

图中的信源可以是人或机器（如计算机），它的输出  $s$  可以是模拟信号，如语言、图象等，也可以是数字序列。

信源编码器是把信源输出的信息转换成二进制形式信息序列  $m$ ，信源编码器根据传输的有效性进行编码，它可以不考虑信道的出错情况，也就是说，不必考虑提高可靠性。

信道编码器是将信源编码器输出的数字序列  $m$ ，映射到相同字符的较长的二进制数字序列  $c$ ，也就是人为地增加若干位，使其具有检错或纠错的能力。增加的位数是根据信道出错情况来决定。它是纠错编码技术中的主要组成部分之一。

调制器是将信道编码器输出的序列  $c$ ，转换成适合于媒质传输的信号波形。如频移键控调制方法、幅度调制、相位幅度调制等，这里不一一详述。有时，为了实现可靠地传输，还需将电信号转换成光信号。

信道是传输信号的媒介或途径。除各种通信信道如电话线、电缆、高频无线电信道和卫星通信信道等之外，还包括具有磁头的磁带或磁盘等一类存贮媒质。



噪声源是把引起接收信号产生失真的各种干扰、噪声等归结成一个噪声源，它的输出用  $e$  表示。它本来是分散在系统的各个部分，如果调制器和解调器设计得相当好，就可以认为由它们引起的错误是不重要的，而错误主要是由于噪声所引起的。这种噪声可以来自其它线的串音、瞬断、接插或雷电的干扰等。

解调器是对每个接收信号进行判决，以确定发送的信息是 1 或 0。由于信道中存在有噪声，接收序列可能与信道编码器输出的码字  $c$  不一样，而变成  $R=c+e$ ，其中  $e$  是两者不同的数字序列，称为错误序列或称为噪声。

信道译码器根据信道编码器的编码规则和信道干扰情况进行译码运算。信道译码器完成两项任务，其一是纠正传输中的错误，产生与发送码字  $c$  最接近的估算值  $c^*$ ；其二是将码字的估算值  $c^*$  变换成信源编码器输出序列的估算值  $m^*$ 。信道译码器是信道编码器的反变换，它也是纠错编码技术中的主要组成部分。译码器性能的好坏、速度的快慢往往决定了整个纠错控制系统的性能。对特定的码类，如何寻找译码错误概率小、译码速度快、设备简单的译码算法，是纠错编码技术中的一个非常重要而又实际的问题，所以，这是目前研究的主要方向之一。

信源译码器是信源编码器的逆变换。它根据信道译码器输出的并且已经过纠错的信息序列  $m^*$  变换成信源输出  $s$  的估算值  $s^*$ ，并传送给信宿。

信宿是人或机器，它接收和利用传输所获得的信息。

通信的基本问题是精确地或近似地在一点重现另一点的信息。当信道无噪声时，毫无疑问，接收端能再现发送端的信息，这是理想的情况。如果干扰不太严重，而且又在纠错的范围之内，那么，接收端仍可以再现发送端的信息。但是，如果噪声严重时，两者差别很大，这时接收端常常不能再现发送端的信息。在这种情况下，就必须选择纠错能力更强的纠错码，以保证可靠地通信。

由于人们所关心的是纠错控制系统中所应用的信道编码器和信道译码器，简称为编码器和译码器。另外，纠错码着重于提高可靠性，所以，为了研究方便，可将上述模型进一步简化成图 1.2 所示的简化通信系统模型。在该图中信源指原来的信源和信源编码器，它的输出是二进制序列  $m$ 。信道包括调制器、传输媒质和解调器在内的数字信道，也

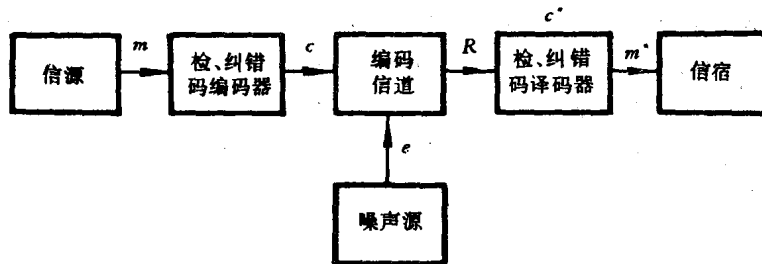


图 1.2 数字通信系统简化模型

称编码信道，它的输入是二进制的码字序列  $c$ ，输出  $R$  也是二进制序列。信道译码器输出的是信息估算值序列  $m^*$ 。信宿包括信源译码器和用户。

## 第二节 纠错码的基本思想及术语解释

### 一、术语介绍

**码字：**把信源编码器输出的信息，按  $k$  个相继信息位分为一组如  $(m_{k-1}, m_{k-2}, \dots, m_1, m_0)$ ，并按一定规则对每一组信息增加  $r$  位校验位，组成长为  $n$  位的码序列，这个码序列称为码字或码组，记为  $C=(c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0)$ 。码字的每个分量称为码元。

**码长：**它是信息位数与校验位数之和，即  $n=k+r$ 。这里的  $n$  就是码字的长度，称为码长。在二进制情况下，长为  $k$  的信息组共有  $2^k$  组，因此，通过编码器后，相应的码字也有  $2^k$  个，称这  $2^k$  个码字集合为  $(n, k)$  分组码。

**合法码字：** $n$  个数位序列中共有  $2^n$  种可能的排列，每一种排列为  $n$  重，其中由  $k$  个信息数位组成的  $2^k$  个  $n$  重，称为合法码字或许用码字。而剩下  $2^n - 2^k$  个  $n$  重称为禁用码字或非法码字。

若  $n$  位长码字中，使前面  $k$  位码元与信息组相同，而后面  $r$  位是校验位，且是信息位的线性函数，这种形式称为  $(n, k)$  系统线性分组码。

$$\begin{array}{ccc} \text{信 息} & & \text{码 字} \\ m_{k-1}, m_{k-2}, \dots, m_1, m_0 & \longrightarrow & c_{n-1}, \dots, c_{n-k}, \underbrace{c_{n-k-1}, \dots, c_1, c_0}_{r \text{ 位校验位}} \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{k \text{ 位信息位}} \end{array}$$

这里， $m_{k-1}=c_{n-1}$ ， $m_{k-2}=c_{n-2}$ ， $\dots$ ， $m_0=c_{n-k}$ 。

**随机错误：**这是由随机噪声引起的错误。由于随机噪声的特性，该错误的特点是各码元是否发生错误是随机独立的，因而，通常不会成片地出现错误。

**突发错误：**这是由突发噪声引起的错误。由于突发噪声的特性，各个码元是否出现错误是相关的，因此，该错误是成片出现的。在一个突发错误持续长度内，开头和最末的码元总是错的，中间一些码元有的错，有的正确，但错的码元相对地比较多。如磁带缺陷引起的错误就是突发错误。由于沿磁头方向的位密度远远大于道密度，所以，错误只影响一个磁道，而不是多个磁道。

实际上，许多出现的错误往往不是单纯的一种错误，而是兼有以上两种错误类型。所以，在选择纠错码时，应根据系统出现的错误类型和出错概率来决定，否则得不到理想的纠错效果。

**检错码：**有发现错误能力的码称为检错码。

**纠错码：**能发现并具有纠正错误能力的码，称为纠错码。对有些要求可靠性高的系统，不仅要求有发现错误的能力，而且还要求有纠正错误的能力，它是一种重要的抗干扰码。

### 二、纠错码的基本思想

现在我们选择两种简单的码作为例子，说明纠错码的基本思想。

### 1. 偶校验码

奇偶校验码是一种简单的检错码。对任何固定长为  $k$  的信息组  $m = (m_k, m_{k-1}, \dots, m_1)$ , 经过编码器得到奇偶校验码为  $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0)$

其中,  $c_i = m_i (i = 1, 2, \dots, k)$  码字的最后一位校验位  $c_0$  则为

$$c_0 = \begin{cases} 0 & \text{当 } \sum_{i=1}^k m_i \text{ 是偶数} \\ 1 & \text{当 } \sum_{i=1}^k m_i \text{ 是奇数} \end{cases}$$

若接收的序列为  $R = (r_k, r_{k-1}, \dots, r_1, r_0)$ , 则对应的译码方案为

$$\sum_{i=0}^k r_i = \begin{cases} 0 & \text{无错或有偶数个错检测不出来} \\ 1 & \text{有错} \end{cases}$$

例如, 信源编码器发出 00, 01, 10, 11 四种信息, 编码器输出为 000, 011, 101, 110 四个码字, 经过信道后可能变成 8 种序列, 译码器计算接收字的序列, 每个接收字的码元之和 (按模 2 加) 是否符合偶数个 1 的要求, 如果符合, 就可将 8 种序列的 4 种 000, 011, 101, 110 正确译成发送的 4 种信息 00, 01, 10, 11。而剩下的 4 种序列 001, 010, 100, 111, 不符合偶数个 1 的要求, 落入禁用码字集合中。这时可发现有错, 但无法确定哪个码字错了哪位, 所以这种码只能检错而不能纠错。

奇偶校验码有效性很好, 衡量有效性用编码速率  $R$  表示

$$R = \frac{k}{n}$$

其中,  $n$  是码长,  $k$  是信息位数。校验位少, 在一定的信息位条件下, 编码速率就高。由于  $1 \leq k \leq n-1$ , 因此,  $\frac{1}{n} \leq R \leq \frac{n-1}{n}$ 。

由于偶校验码有  $n-1$  位信息位, 只有一位校验位, 所以, 它的编码速率很高, 即

$$R = \frac{n-1}{n}$$

因此, 称偶校验码是高速码。但是, 它只能发现一位错, 而且又不能纠错, 所以, 它的可靠性差。

传送信息的可靠性用误码率  $p_e$  表示

$$p_e = \frac{\text{错误接收的码元数}}{\text{接收的总码元数}}$$

例如, 接收 1000 个码元, 其中错 1 个码元, 则误码率为千分之一, 用  $10^{-3}$  表示。

### 2. 重复码

它的校验位是通过信息位的重复而得名。例如, 有一位信息 0 或 1, 则对应的 (3, 1) 重复码为 000, 111, 而接收有 8 种情况, 如图 1.3 所示。图中的信道是二进制对称信道, 这种信道在二进制序列的传送中, 1 错成 0 或 0 错成 1 的概率相等, 并且彼此独立。其中,  $q$  是码元错误概率,  $p$  是码元正确接收的概率,  $p = 1 - q$ , 一般  $q < 0.5$ 。

(3, 1) 重复码不仅能发现一位错, 而且还可以判决为最接近的码字, 从图上可以看出, 将接收的所有可能的 8 种接收字, 按照码字差别最小可划分为  $A_1$  和  $A_2$  两组。  $A_1$  包

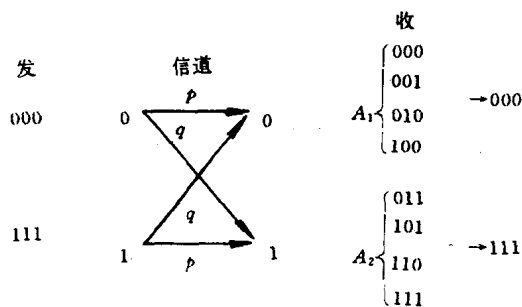


图 1.3 (3, 1) 重复码通信模型

含 4 个接收字 000, 001, 010, 100, 因为与码字 000 差别只有一位, 甚至完全一样, 所以, 只要收到  $A_1$  中任一码字, 就判为 000, 同样, 收到  $A_2$  组中四个之一就判为 111.

通常, 不出现错误的概率比出现一个错误的概率大, 出现一个错误比出现二个错误的概率大, 依次类推。因此, 译码器认为 100 是从 000 错一位造成的, 而不是 111 错二位造成的, 所以译码器输出码字 000, 从而纠正了传输中的一位错误。

这种译码方法称为最大似然译码法。用概率表示似然函数是, 当发送码字为  $c_i$  时, 收到字  $r_j$  的概率  $p(r_j/c_i)$  应最大, 当  $p(r_j/c_i) > p(r_j/c_{i'})$ , 对所有  $i \neq i'$  均成立, 则判  $r_j$  为条件概率最大者, 就将收到的  $r_j$  译为最象它的那个发送码字  $c_i$ 。

假定所有  $2^k$  个码字等概率发送, 则最大似然译码法就等价于最大后验概率译码法, 或最小错误概率译码法, 即最小距离译码法。

重复码只有一位信息位,  $n-1$  位校验位, 因此, 它的有效性差, 编码速率  $R = \frac{1}{n}$ , 所以, 称重复码为低速码。然而, 重复码的可靠性高。

对于一个给定的噪声信道, 它就有确定的信道容量  $c$ , 只要发送端以低于  $c$  的速率  $R$  发送信息, 则一定存在一种编码和译码方法, 使得错误概率  $p_e$  随码长  $n$  的增加而指数下降到任意小的值。这就是 Shannon 于 1948 年提出的信道编码定理。Shannon 给我们指出了提高可靠性进行纠错编码的方向, 但是, 并未提出构造纠错码的方法。直到现在为止, 各种编码方法还不能检测或纠正所有的错误类型, 然而, 我们可以选择一种码来尽可能地检测或纠正那些经常出现的错误, 使这类错误的概率降至最小, 而达到系统对可靠性的要求。通过上面两个例子, 可以看出编码速率与纠错能力之间, 即有效性与可靠性之间存在着矛盾。所以, 对纠错码的要求是既可靠又有效, 而且要求编译码器的速度快, 成本低。常采用如下措施满足这些要求:

(1) 为了满足可靠性要求, 纠错码应能检测或纠正经常出现的错误类型。在实际应用中如果出现一个错误的概率远远大于出现两个错误的概率, 那么, 我们选择纠正一个错译的纠错码。

(2) 为了满足有效性的要求, 首先在满足可靠性的要求下, 即达到要求的错误概率下, 所加的校验位应最少。

(3) 为了满足成本低的要求, 选择的编码和译码器所用的器件少, 为满足译码速度高的要求, 应选择快速的译码算法和速度高的器件。

### 三、汉明距离与重量

1. 汉明距离是编码理论中的一个重要参数

两个码字  $c_1, c_2$  之间, 对应位取值不同的个数, 称为它们之间的汉明距离, 用  $d(c_1, c_2)$  表示, 简称距离。

例如,  $c_1=110100, c_2=101011$ , 则  $d(c_1, c_2)=5$

2. 汉明重量

汉明重量是编码理论中的另一个重要参数。一个码字的汉明重量是指码字中非零码元的个数, 简称重量, 用  $W(C)$  表示。在二进制情况下, 它就是码字中 1 的个数。例如码字  $C=101011$ , 有 4 个 1, 所以,  $C$  的重量  $W(C)=4$ 。若码字  $C=(c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0)$ , 汉明重量一般表示为

$$W(C) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$$

在  $(n, k)$  线性码中, 任两个码字之间都有一定的距离, 但必有一个最小的, 称这个最小的距离值为该码的最小距离  $d_0$ , 即

$$d_0 = \min\{d(c_i, c_j)\} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2^k$$

要计算  $(n, k)$  分组码的最小距离, 需要计算  $2^{k-1}(2^k-1)$  次。当  $k$  比较大时, 计算量就更大。由于  $(n, k)$  线性分组码是个群码, 它的最小距离等于非零码字的最小重量。这样, 求  $d_0$  不必计算比较  $2^{k-1}(2^k-1)$  次, 只要检查  $2^k-1$  个非零码字的重量即可。以后用  $d$  表示最小距离  $d_0$ 。

码的距离和重量满足以下三角不等式

$$d(c_1, c_2) \leq d(c_1, c_3) + d(c_3, c_2)$$

$$W(c_1 + c_2) \leq W(c_1) + W(c_2)$$

码的最小距离  $d$  表明了该码中每对码字之间的差别程度, 说明了该码抗干扰能力的大小。

### 四、码的纠错和检错能力与最小距离的关系

1. 检测  $e$  个错误, 则要求码的最小距离为

$$d \geq e + 1$$

证明: 设码的任两个码字  $c_1$  与  $c_2$  的距离至少为  $d$ , 若  $c_1$  产生了  $e$  个错误, 变成  $c'_1$ , 则  $d(c_1, c'_1)=e$ , 而  $d(c'_1, c_2)=d-e$ 。若  $d=e+1$ , 则  $d(c'_1, c_2)=1$ , 因而,  $c'_1$  不会变成  $c_2$ , 如图 1.4 所示。所以,

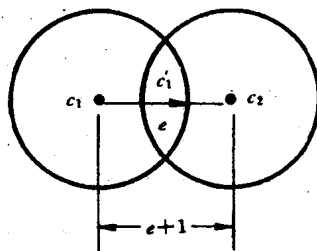


图 1.4 码检错能力的几何解释

当  $d=e+1$  时, 码能发现  $e$  个错误。

2. 纠正  $t$  个错误, 则要求码的最小距离为

$$d \geq 2t + 1$$

或可写成

$$t \leq \left[ \frac{d-1}{2} \right]$$

其中,  $[ ]$  表示不超过  $\frac{d-1}{2}$  的最大整数。

用图示法证明能纠正小于或等于  $t$  个错。如该码最小距离为  $d \geq 2t+1$ , 可用图 1.5 发送码字  $c_1$ , 另一码字  $c_2$  错了  $t'$  位后变成  $c_2'$ , 以及

$$d(c_2, c_1) \geq d \geq 2t + 1$$

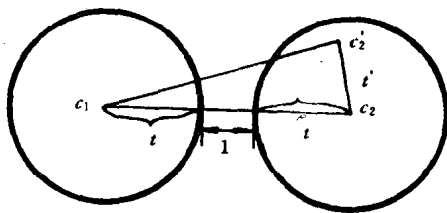


图 1.5 纠错能力的图示法

如发生  $t'$  个错误, 而  $t' \leq t$ , 从图 1.5 得

$$d(c_1, c_2') + d(c_2, c_2') \geq d(c_2, c_1)$$

即

$$d(c_1, c_2') \geq d(c_2, c_1) - d(c_2, c_2')$$

根据  $d(c_2, c_1) \geq d \geq 2t+1$  和  $d(c_2, c_2') = t'$ , 将上式写成

$$d(c_1, c_2') \geq d - t' \geq (2t + 1) - t' = (t + 1) + (t - t') \geq t + 1 \geq t' + 1 > t'$$

即表示  $c_2'$  离  $c_1$  较近, 根据最小距离译码准则, 译码器能正确译码, 故能纠正小于或等于  $t$  个错。

3. 纠正  $t$  个错误同时检测  $e$  ( $e \geq t$ ) 个错误, 则要求码的最小距离为

$$d \geq t + e + 1$$

这里所指的“同时”, 是当错误个数小于或等于  $t$  时, 该码能纠正。当错误个数大于  $t$  而小于或等于  $e$  时, 译码器能发现错误, 但不能纠正。由 1 和 2 的证明立刻得出 3 的证明。例如  $d=6$ , 可以纠 3 检 2, 或纠 2 检 3, 或纠 1 检 4。如果仅检错, 可检测 5 个错。

### 第三节 纠错码分类

通常按以下方式对纠错码进行分类：

1. 按校验位与信息位间的关系来分类，分为线性码和非线性码两大类。

(1) 线性码是指校验位与信息位之间呈线性关系，即可把校验规则写成线性方程组。

(2) 非线性码是指校验位与信息位之间不存在线性关系。

2. 按对信息位的处理方法的不同，分为分组码与卷积码两大类。

(1) 分组码是码组长度为  $n$  位，信息位数为  $k$ ，则每一码的  $r=n-k$  个校验位仅与本码组的  $k$  个信息位有关，而与别组的信息无关。

(2) 卷积码是码段长度为  $n_0$  位，该段有  $k_0$  个信息位，则该码一个码段的  $(n_0-k_0)$  个校验位不仅与本段的  $k_0$  个信息位有关，而且也与前  $m$  段的信息位有关。该码的约束长度为  $N=(m+1)n_0$  位。

3. 按码字的结构不同，分为循环码和非循环码。

(1) 循环码的特点是将一个码字循环右移一位，就得这一组码字中的另一个码字，即同一组的所有码字均可由循环移位获得。

(2) 非循环码是不能从循环移位法获得全部码字的。

4. 按纠正错误的类型来分类，纠错码可分为下列三种：

(1) 纠随机错误码：若码字间的最小距离为  $d$ ，则该码的纠错能力  $t$  可用下式表示

$$t \leq \left[ \frac{d-1}{2} \right]$$

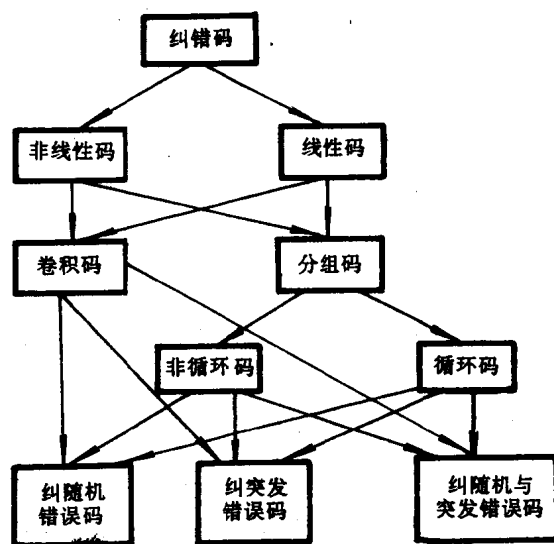


图 1.6 纠错码分类

(2) 纠突发错误码: 设  $n$  为码字的位数,  $k$  为信息位数, 该码的纠正突发长度  $b$  可用下式表示

$$b \leq \frac{n-k}{2}$$

通常  $b$  取上限, 可用增加校验位  $r=n-k$  来增大纠突发长度  $b$  (位)。

(3) 纠随机与突发错误码: 以交错码为例, 如把能纠  $t$  个随机错误的  $(n, k)$  码中  $\lambda$  个码字作为矩阵的  $\lambda$  行, 然后按列发送, 就可构成  $(\lambda n, \lambda k)$  交错码, 即构成既能纠正  $t$  个随机错误, 又能纠正  $t$  个长为  $\lambda$  的突发错误的码。

纠错码的分类如图 1.6 所示。

### 思考题与习题

1. 什么叫检错码和纠错码?
2. 画出  $(4, 3)$  偶校验码的通信模型图。
3. 若已知  $(n, k)$  线性分组码能纠正  $a$  个错误, 同时检测  $b$  个错误 ( $a \leq b$ ), 问该码的最小距离至少为多少? 若只用于检错的情况下, 则最大检错能力是多少? 若只用于纠错, 则最大纠错能力又是多少?

4. 已知下面是  $(n, k)$  线性码的全部码字

$$\begin{aligned} c_1=000000, & \quad c_2=000111, & \quad c_3=011001, & \quad c_4=011110, \\ c_5=101011, & \quad c_6=101100, & \quad c_7=110010, & \quad c_8=110101 \end{aligned}$$

问: (1)  $n$  和  $k$  的值是多少?

- (2) 最小距离  $d$  和最小重量  $W$  是多少?
  - (3) 该码只用于纠错时, 能纠正几个错误?
  - (4) 该码的编码速率是多少?
  - (5) 该码的纠正突发长度最长为多少?
5. 令  $d(c_i, c_j)$  表示两码字  $c_i$  和  $c_j$  之间的距离, 试证明对任意码字  $c_1, c_2, c_3$  满足下列不等式

$$d(c_1, c_2) \leq d(c_1, c_3) + d(c_2, c_3)$$



## 第二章 检 错 码

在这一章里，我们介绍一下在实际中经常应用的检错码。这些码虽然简单，但由于它们易于实现，检错能力又较强，因此，在实际中应用较多。奇偶校验码的思想在初期的编码中用得很多，而且是主要的，在后面还将看到很多码，都包含奇偶校验码的思想。而奇偶校验码只不过是它的特殊情况而已。

### 第一节 奇偶校验码

奇偶校验码是最简单的一种检错码。这种码的编码规则是在原信息位后附加一位校验位，使得整个码字中1或0的个数成为偶数或奇数。1的个数成为偶数的编码称为偶校验，而1的个数为奇数的编码规则称为奇校验。究竟采用奇校验还是偶校验，要根据应用情况而定。一般，在同步式同步的系统中，采用奇校验。这是因为如果信息全部是0，若采用偶校验，校验位也是0。在接收端如果接收到的信息全部为0，则因得不到同步脉冲而将发送全部为0的信息丢失。在这种情况下，一定要采用奇校验，而不能采用偶校验。在起止式同步的系统中，采用偶校验，也就是在不需要根据接收的信息而产生同步脉冲的情况下，都可以采用偶校验。

由于不论偶校验或奇校验，编成的每个码字都满足偶校验或奇校验的同一种规则。因此，这类码又称为一致校验码。

奇偶校验码的检错能力很低，它只能检出1或0的奇数个错误，但是它不能分清是一个还是三个或者更多的奇数个错误，因而，不能纠正错误，而且也不能检测偶数个错误。但是，这种码的传输信息速率却很高。当码长很长时，其传输信息的速率接近1，相当于编码速率可达到100%。

通常，对字符的奇偶校验称为垂直奇偶校验。这种校验可用硬件实现。用硬件实现的方法有很多种。随着中、大规模集成电路的发展，现在已有专门的中规模奇/偶一致校验发生器/校验器，对7位或8位字符进行奇偶校验。如美国Texas公司的SN54/74S180组件，就是一个9位奇/偶一致校验发生器/校验器。

垂直奇偶校验也可用软件来实现，如图2.1所示的垂直偶校验编码流程图。它适合于7单位码，加上奇偶位，共8位。例如ASCII码最高位 $D_7$ 就是奇偶校验位，在未配上奇偶校验位之前它始终为0。

发送时，首先将发送的字符送入累加器A中，并暂存于C中，然后将A中的内容与80H进行或运算，若 $P/V=1$ ，说明1的个数为偶数，而原来A中的内容为奇数。这时将A中的内容送到C寄存器中。若 $P/V=0$ ，说明A中1的个数为奇数，而原来A中1的个数为偶数，这意味着C寄存器内容原来已配置好偶校验位。