第 1 章　函数与极限

本章重点是函数、极限和连续性概念. 函数是微积分研究的主要对象. 极限是微积分研究问题、解决问题的主要工具和方法. 微积分中的基本概念，如导数、偏导数、定积分、重积分等等，不外乎是不同形式的极限，作为一种思想方法，极限方法贯穿于微积分的始终. 因此说，不深刻理解并熟练掌握极限方法，就学不好高等数学. 而连续性是微积分研究对象的一个基本性质，又往往作为讨论函数问题的一个先决条件，且与函数的可导性、可积性存在着不可分割的逻辑关系.

1.1　函数的概念和性质

例 1.1　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,\ 1]$，求：(1) $f(\sin x)$ 的定义域；(2) $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $(a>0)$.

解　(1) 因为 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，故 $2k\pi\leqslant x\leqslant 2(k+1)\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，因此 $f(\sin x)$ 的定义域 $D=[2k\pi,\ 2(k+1)\pi]$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

(2) 因为 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$，故 $f(x+a)$ 的定义域 $D_1=[-a,\ 1-a]$. 又 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，即 $a\leqslant x\leqslant 1+a$，故 $f(x-a)$ 的定义域 $D_2=[a,\ 1+a]$. 因此 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $D=D_1\cap D_2=[a,\ 1-a]$ $\left(0<a\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$. 而当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，函数无定义.

例 1.2　求下列分段函数的反函数：$f(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<-1 \\ -x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \ln(1+x), & 0<x\leqslant \mathrm{e}\end{cases}$

解　当 $-\infty<x<-1$ 时，$x=y$，$-\infty<y<-1$；当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$x=-\sqrt{-y}$，$-1\leqslant y\leqslant 0$；当 $0<x\leqslant\mathrm{e}$ 时，$x=\mathrm{e}^y-1$，$0<y\leqslant\ln(1+\mathrm{e})$.

因此，$f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 为：$f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<-1 \\ -\sqrt{-x}, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \mathrm{e}^x-1, & 0<x\leqslant\ln(1+\mathrm{e})\end{cases}$

例 1.3　设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解　$$f[f(x)]=f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}\qquad (x\neq 1).$$

$$f\{f[f(x)]\}=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x\qquad (x\neq 0,\ 1).$$

例 1.4　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

解　由 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}$，有

$$|g(x)|\leqslant 1\Rightarrow\begin{cases}|2-x^2|\leqslant 1\\ |x|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1 \text{ 或 } 1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

取交集可得$|x|=1$.

$$|g(x)|>1 \Rightarrow \begin{cases} |2-x^2|>1 \\ |x|\leqslant 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} g(x)=2>1 \\ |x|>1 \end{cases}$$

解两个不等式组可得$-1<x<1$或$x<-1$或$x>1$，即$|x|\neq 1$. 因此

$$f[g(x)]=\begin{cases} 1, & |x|=1 \\ 0, & |x|\neq 1 \end{cases}.$$

例 1.5　设$f(x)$满足$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$（$a$，$b$，$c$均为常数），且$|a|\neq|b|$，证明$f(x)$是奇函数.

证　因为

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \quad ①$$

所以

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \quad ②$$

由式①和②，有

$$(a^2-b^2)f(x)=c\left(\frac{a}{x}-bx\right)$$

因此

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$$

而

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right)=-f(x)$$

故$f(x)$是奇函数.

例 1.6　试证明：定义在$[-l, l]$上的任何函数都可表示为一个偶函数与一个奇函数的和，并且表示法是惟一的.

证　先证存在性. 令

$$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\ G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

因为

$$F(-x)=F(x),\ G(-x)=-G(x)$$

所以$F(x)$为偶函数，$G(x)$为奇函数，且

$$f(x)=F(x)+G(x)$$

即$f(x)$可表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

再证表示法是惟一的. 设$F_1(x)$是偶函数，$G_1(x)$是奇函数，且有

$$f(x)=F_1(x)+G_1(x)$$

于是

$$f(-x)=F_1(-x)+G_1(-x)=F_1(x)-G_1(x)$$

由以上两式可得

$$F_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=F(x),\ G_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=G(x)$$

所以表示法是惟一的.

例 1.7　试证：若对于函数$f(x)$（$-\infty<x<+\infty$），有等式$f(x+T)=kf(x)$（式中k，T为正常数），则$f(x)$呈现为形式$f(x)=a^x\varphi(x)$（a为常数），$\varphi(x)$为以T为周期的函数.

证　由$f(x)=a^x\varphi(x)$，且$f(x+T)=kf(x)$，得

$$a^{x+T}\varphi(x+T)=ka^x\varphi(x)$$

令 $a^T=k$，则 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$．所以 $\varphi(x)$是以 T 为周期的函数．

例 1.8　证明 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数．

证　用反证法．设 $f(x)=x\cos x$ 是以 $T>0$ 为周期的周期函数，则有

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$$

令 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$，有

$$T\cos T=0 \qquad ①$$

$$\left(T+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(T+\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad ②$$

由①和②式，得 $\begin{cases}\cos T=0\\ \sin T=0\end{cases}$

而这样的 T 是不存在的，故 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数．

例 1.9　若 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，设 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)\cdots]\}$，证明：$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$．

证　用数学归纳法，

当 $n=1$ 时，$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$．

设 $n=k$ 时，$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

故有

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

同步训练题 1.1

1．设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}+\lg(x-2)$，求：(1) $f(x)$的定义域；(2) $f(\ln x)$的定义域；(3) $f(x+a)+f(x-a)$的定义域$(a>0)$．

2．求下列分段函数的反函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & -2\leqslant x<0;\\ 2^x, & 0\leqslant x<1;\\ x^2+1, & 1\leqslant x<2\end{cases}$$

3．设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，且当 $y=1$ 时，$z=x$，试求 $f(x)$及 z 的表达式．

4．设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$．求 $f[f(x)]$，$g[f(x)]$，并作它们的图形．

5．讨论下列函数的单调性：(1) $f(x)=x^3+x$；　(2) $g(x)=a^x$　$(a>0)$．

6．设 φ，ψ 及 f 对一切实数有定义，且都是单调增加函数，证明：若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，则 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$．

7．证明：若 $y=f(x)$是单调增加函数，则其反函数 $x=\varphi(y)$亦必为单调增加函数．

8. 设 f 为偶函数，g 为奇函数，试考察下列函数的奇偶性：(1) $f(g)$；(2) $g(f)$；(3) $g(g)$.

9. 设存在二实数 a、b $(a<b)$，使对任意 x，函数 $f(x)$ 适合 $f(a-x)=f(a+x)$ 及 $f(b-x)=f(b+x)$. 试证 $f(x)$ 是以 $l=2(b-a)$ 为周期的函数.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x<0\\ 0, & x=0\\ x-\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，求 φ 使 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数.

11. 证明 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 上为单调增加函数，并推出

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

12. 若 $f(x)=a+bx$，设 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)\cdots]\}$，证明：$f_n(x)=a\cdot\dfrac{b^n-1}{b-1}+b^nx$.

1.2 极限的概念及其性质

例 1.10 若数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的极限均不存在，问它们的和 $\{x_n+y_n\}$ 与积 $\{x_n\cdot y_n\}$ 的极限是否必不存在?

解 不一定. 取 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，$y_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 均不存在，但

$$x_n+y_n=1;\ x_n\cdot y_n=0.$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=1,\ \lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=0.$$

例 1.11 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=1$. 对吗?

解 不对. 错误在于，忽视了商的极限运算法则的一个条件：分母的极限不能为零.

当 $a\neq0$ 时，结论正确.

当 $a=0$ 时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在，也可能不存在. 即使存在，也不一定等于 1.

例如数列 $x_n=\dfrac{1}{n}[1+(-1)^n]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}}{1+(-1)^n}\text{不存在}.$$

又如数列 $x_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$.

例 1.12 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是无界函数，问是否必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$?

解 不一定. 例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的邻域内是无界函数，但当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大. 事实上，取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$，不管 x_n 如何小，总有 $f(x_n)=0$.

例 1.13 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$，是否必有 $f(x)>0$?

解 不一定. 例如取

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0\\ -1, & x=0\end{cases}$$

虽然有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1>0$，但 $f(0)=-1<0$. 而命题“若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$，则在 x_0 的某一去心邻域 $U(\overset{\circ}{x}_0,\delta')$ 内，恒有 $f(x)>0$. ”是正确的.

例 1.14　无限多个无穷小之和是否仍为无穷小？

解　不一定. 例如 $\left\{\frac{2}{n^2}\right\}$，$\left\{\frac{4}{n^2}\right\}$，…，$\left\{\frac{2n}{n^2}\right\}$，…当 $n\to\infty$ 时都是无穷小数列，而它们的和的极限为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\cdots+\frac{2n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}(1+2+\cdots+n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\neq 0$$

但是，有限个无穷小之和必为无穷小.

同步训练题 1.2

1. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，数列 $\{y_n\}$ 发散，问数列 $\{x_n+y_n\}$ 若何？数列 $\{x_ny_n\}$ 又怎样？
2. 在自变量 x 的某个变化过程中，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均无极限，问 $f(x)+g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 是否必无极限？
3. 数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{|x_n|\}$ 是否同敛散？
4. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，问 $f(x)$ 是否一定有界？
5. 两个无穷大之和仍为无穷大，对否？
6. 两个无穷大之差为无穷小，对否？
7. 在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，能否断定 $a>0$？
8. 设 $\varphi(x)=o(x^n)$，$\psi(x)=o(x^n)$，则 $\varphi(x)-\psi(x)=0$，对吗？
9. 无限多个无穷小之积是否仍为无穷小？

1.3　有关极限的证明题

工科高等数学中涉及的有关极限的证明问题主要有两类：一类是用极限定义证明极限存在；另一类是用极限存在准则证明极限存在，当然还有一些其他方法. 本节主要介绍用极限定义证明极限存在性的方法.

例 1.15　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

证　由于 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}$

要使 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{a^2}{n}<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

例 1.16　证明 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

证 由于 $|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|<2\cdot\frac{|x-a|}{2}=|x-a|$，要使 $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$，只要 $|x-a|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $|x-a|<\delta$ 时，就有 $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

例 1.17 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

证 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan x<\varepsilon$，只要取 $X=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$. $\left(当\ \varepsilon<\frac{\pi}{2}时，X>0\right)$. 则由 $\tan x$ 的单调性知，当 $x>X$ 时，就有

$$\arctan x>\arctan X=\frac{\pi}{2}-\varepsilon.$$

即
$$\frac{\pi}{2}-\arctan x<\varepsilon$$

从而有
$$\left|\frac{\pi}{2}-\arctan x\right|<\varepsilon$$

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

例 1.18 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明 $x_n\to a(n\to\infty)$.

证 $\forall\varepsilon>0$，因为 $x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$，$\exists K_1$，只要 $2k-1>2K_1-1$，就有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；

对上述 $\varepsilon>0$，$\exists K_2$，只要 $2k>2K_2$，就有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{2K_1-1,\ 2K_2\}$，只要 $n>N$，就有 $|x_n-a|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 1:19 证明：函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间(0, 1]上无界，但当 $x\to+0$ 时，该函数不是无穷大.

证 先证 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在(0, 1]上无界.

因为 $\forall M>0$，在(0, 1]中总可以找到点 x_0，使 $y(x_0)>M$，例若取 $x_0=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)，则

$$y(x_0)=\frac{1}{x_0}\sin\frac{1}{x_0}=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

当 k 充分大时，$y(x_0)>M$.

再证当 $x\to+0$ 时，$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷大.

因为 $\forall M>0$，对所有 $\delta>0$，总可以找到这样的点 x_k，当 $0<x_k<\delta$ 时，$y(x_k)<M$. 例若取 $x_k=\frac{1}{2k\pi}$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)，当 k 充分大时，$x_k<\delta$，但

$$y(x_k)=\frac{1}{x_k}\sin\frac{1}{x_k}=(2k\pi)\sin(2k\pi)=0<M.$$

同步训练题 1.3

1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

3. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

4. 证明 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

5. 若 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

1.4 极限的计算

1.4.1 利用初等变形求极限

把一个式子变形，不仅是求极限的基本方法之一，也是微分、积分运算中经常使用的方法. 这里涉及的初等变形主要有有理化(分子或分母)、分式通分、三角变换、求和等.

例 1.20 计算 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=2\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

例 1.21 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m，n 为自然数).

解 当 $m=n$ 时，原式 $=1$；

当 $m\neq n$ 时，原式 $=\lim\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\dfrac{m}{n}$.

故
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\begin{cases}1, & m=n\\ \dfrac{m}{n}, & m\neq n\end{cases}.$$

例 1.22 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解 当 $x=0$ 时，原式 $=1$；当 $x=2^n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，原式 $=0$；当 $x\neq 0$，$2^n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，
$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

故
$$\text{原式}=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x=2^n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\ 2^n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

例 1.23 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解题思路 当 n 足够大时，$\pi\sqrt{n^2+1}\approx\pi n$，$(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)\to 0\ (n\to\infty)$，再利用三角诱导公式.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.$

例 1.24　计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

解
$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x(e^{-x}+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln e^x}{x}+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}\right]=1.$$

例 1.25　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$.

解　因为 $1+2+\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$，故
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=1+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}\\&=2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\&=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

于是
$$原式=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2.$$

例 1.26　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$.

解
$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{2n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

例 1.27　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}$.

解
$$\begin{aligned}原式&=\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{1}{8}}\cdot\cdots\cdot3^{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}3^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=3.\end{aligned}$$

1.4.2　利用两个重要极限公式求极限

许多$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型和$(1^\infty)$型极限未定式，可直接或通过变量代换法化为两个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 来计算，有时也利用其变通形式 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$ 及 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

例 1.28　计算 $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}$.

解　设 $u=x-n\pi$，当 $x\to n\pi$ 时，$u\to0$，于是
$$原式=\lim_{u\to0}\frac{\sin(u+n\pi)}{u}=\lim_{u\to0}\frac{(-1)^n\sin u}{u}=(-1)^n.$$

例 1.29　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{k}{x}\right)^x$.

解　设 $u=-\dfrac{k}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$u\to0$，于是
$$原式=\lim_{u\to0}(1+u)^{-\frac{k}{u}}=\lim_{u\to0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-k}=e^{-k}.$$

例 1.30　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}$$

例 1.31　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$.

解　$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{x}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^x\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=\frac{1}{e}\cdot e=1.$$

例 1.32　计算 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

解　设 $u=1-x$，当 $x\to 1$ 时，$u\to 0$，于是

$$原式=\lim_{u\to 0}u\cdot\tan\frac{\pi}{2}(1-u)=\lim_{u\to 0}u\cdot\cot\frac{\pi}{2}u$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan\frac{\pi}{2}u}=\frac{2}{\pi}\lim_{u\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}u}{\tan\frac{\pi}{2}u}=\frac{2}{\pi}.$$

例 1.33　计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解　设 $\tan x=1+t$，则 $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{2(1+t)}{1-(1+t)^2}=-\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2+t}$，

当 $x\to\frac{\pi}{4}$ 时，$t\to 0$，于是

$$原式=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}-\frac{1}{2+t}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{2+t}}$$

$$=\frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e}.$$

1.4.3　利用等价无穷小代换求极限

利用等价无穷小代换，可将所求极限化繁为简，化难为易，起到事半功倍的作用．下列等价无穷小的关系式较为常用，请读者务必记住．

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{2}$，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0,\ a\neq 1)$．

使用这些关系式应注意以下几点：

(1) 必须 $x\to 0$，否则不能用；

(2) 只能在积商中代换，不能在和差中代换；

(3) x 也可以是中间变量．

例 1.34 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

解 因为 $\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\frac{1}{2}x\sin x$，$e^{x^2}-1\sim x^2$ $(x\to0)$，于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

例 1.35 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ $(b\neq0)$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos ax-1)]}{\ln[1+(\cos bx-1)]}=\lim_{x\to0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{\frac{1}{2}(bx)^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

例 1.36 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}e^{\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}e^{\sin x}=1.$$

例 1.37 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan^2x}-\sqrt{1-\tan^2x}}{e-e^{\cos x}}$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\tan^2x)-(1-\tan^2x)}{e(1-e^{\cos x-1})(\sqrt{1+\tan^2x}+\sqrt{1-\tan^2x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\tan^2x}{-e(e^{\cos x-1}-1)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2x}+\sqrt{1-\tan^2x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{-e(\cos x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{e}.$$

例 1.38 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)}{\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2x}{1-x}}{\dfrac{2x}{2-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2-x^2}{1-x}=2.$$

1.4.4 利用函数连续性求极限

若函数在 $x=x_0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，因而极限的计算转化为函数值的计算．这相当于交换函数运算与极限运算的次序，这个结论对复合函数也成立．即：

若 $f(u)$连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

例 1.39 计算 $\lim\limits_{x\to1}(x+1)^{\cos x}\cdot\sqrt{\arctan\sqrt{2-x}}$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}(x+1)^{\cos x}\lim_{x\to1}\sqrt{\arctan\sqrt{2-x}}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+1)^{\lim\limits_{x\to1}\cos x}\cdot\sqrt{\arctan\sqrt{\lim_{x\to1}(2-x)}}$$

$$=2^{\cos 1}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\cdot 2^{\cos 1-1}$$

例 1.40　设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$．试证明：

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]v(x)}.$$

证　因为 $u(x)^{v(x)}=\{[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\}^{[u(x)-1]v(x)}$，由指数函数的连续性，所以

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\{[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\}^{[u(x)-1]\cdot v(x)}$$
$$=\{\lim_{x\to x_0}[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\}^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]\cdot v(x)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]\cdot v(x)}$$

可以证明，当 $x\to\infty$ 时，上述结论仍然成立．例 1.40 可作为公式使用，它将 1^∞ 型极限转化为 $\lim[u(x)-1]\cdot v(x)$．这是 $0\cdot\infty$ 型极限，这种极限容易化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限求出结果．

如果 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的式子比较繁，还可采用如下的书写格式．

$$\lim u(x)^{v(x)}=\exp[\lim(u(x)-1)\cdot v(x)].$$

以下举几例说明上述公式的应用．

例 1.41　计算例1.35中的极限．

解　$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\exp[\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)\cdot\tan 2x]=\exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\tan x(\tan x-1)}{1-\tan^2 x}\right]$$
$$=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\right)=\exp(-1)=\frac{1}{e}.$$

例 1.42　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+n}{x-n}\right)^x$　（n 为常数）．

解　$$原式=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+n}{x-n}-1\right)x\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{2nx}{x-n}\right]=e^{2n}.$$

例 1.43　计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$．

解　$$原式=\exp[\lim_{x\to 0}(1+x^2-1)\cdot\cot^2 x]=\exp\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2\right]=e.$$

例 1.44　计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$．

解　$$原式=\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\right)$$
$$=\exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}\right)=e^{-\frac{1}{2}}.$$

例 1.45　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$．

解　$$原式=\exp\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)\frac{1}{\sin x}\right]=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}\right)$$
$$=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}\right]=1.$$

例 1.46 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$.

解
$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{-x}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^{-x}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{-x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^{-x}\\&=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)(-x)\right]\cdot\exp\left[\lim_{x\to\infty}\tan\frac{1}{x}\cdot(-x)\right]\\&=\exp\left(\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t}\right)\cdot\exp\left[\lim_{t\to0}\left(-\frac{\tan t}{t}\right)\right]\\&=\exp(0)\cdot\exp(-1)=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

1.4.5 利用极限存在准则求极限

利用夹逼准则求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$(或 $\lim f(x)$)，需要构造数列 y_n 和 z_n(或函数 $g(x)$ 和 $h(x)$)，使得

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n\quad(或\ g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x))$$

而易求出 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ (或 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$). 这种构造一般是从 x_n(或 $f(x)$) 出发，通过不等式来完成的.

例 1.47 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 设 $a_n=\sqrt[n]{n}$，则 $a_n>1$ $(n>1)$. 取 $\lambda_n=\sqrt[n]{n}-1=a_n-1>0$，有 $a_n=1+\lambda_n$.

于是
$$a_n=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2$$

当 $n>2$ 时，有 $n-1>\dfrac{n}{2}$，故

$$a_n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2>\frac{n^2}{4}\lambda_n^2$$

又
$$a_n^n=n>\frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

而 $0<\sqrt[n]{n}-1<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 1.48 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解 设 $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$，因为 $0<\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{n(n-1)\cdots1}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}\leqslant\dfrac{1}{n}$，故取 $y_n=0$，$z_n=\dfrac{1}{n}$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

例 1.49 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{2^x}$.

解 因为 $-1\leqslant\sin\dfrac{\pi}{2}x\leqslant1$，故有

$$-\frac{1}{2^x}\leqslant\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{2^x}\leqslant\frac{1}{2^x}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{2^x}\right)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0$，所以由夹逼准则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{2^x}=0.$$

例 1.50　设 $x_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，$n=1, 2, \cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　$x_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$. 因为 $\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$，故有

$$x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}=y_n$$

则
$$0<x_n^2<x_n\cdot y_n=\frac{1}{2n+1}$$

由此可得
$$0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

又因
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$$

所以由夹逼准则有
$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

利用单调有界准则求极限时，一般分两步进行：首先证明数列极限存在，即证明数列的单调性和有界性．其次利用关系式 $x_n=f(x_{n-1})$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n-1})$．设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a=f(a)$．最后解方程求得 a 值．

例 1.51　设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$，…，$x_n=\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　首先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在．数列 $\{x_n\}$ 的单调性，用数学归纳法证明．

因为 $2<2\sqrt{2}$，故有 $\sqrt{2}<\sqrt{2\sqrt{2}}$，即 $x_1<x_2$.

假设 $x_{n-1}<x_n$ 成立，则 $2x_{n-1}<2x_n$，从而有 $\sqrt{2x_{n-1}}<\sqrt{2x_n}$，即 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}<\sqrt{2x_n}=x_{n+1}$．所以 $\{x_n\}$ 是单调增加的．

再证 $\{x_n\}$ 的有界性．由于 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$，故有 $x_n^2=2x_{n-1}$，又 $\frac{x_{n-1}}{x_n}<1$，所以 $x_n=\frac{2x_{n-1}}{x_n}<2$．这说明数列 $\{x_n\}$ 有上界 2.

由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对关系式 $x_n^2=2x_{n-1}$ 取极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=2\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}$．可得 $a^2=2a$.

解方程，得 $a=2$ 或 $a=0$．由于 $x_n>0$，所以 $a=0$ 不合理，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

例 1.52　设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ $(n=1, 2, \cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　先证 $\{x_n\}$ 单调性．由几何平均值小于算术平均值，有

$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)>\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a}$，即 $x_n^2>a$.

而　$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}<0$，即 $x_{n+1}<x_n$.

所以$\{x_n\}$单调减少.

再证$\{x_n\}$有界性. 由$a>0$, $x_1>0$及x_n的定义式, 可知对一切n有$x_n>0$, 即$\{x_n\}$有下界.

由单调有界准则, 知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在, 设为$b$, 对$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$取极限, 有$b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$, 即$b^2=a$. 由于$x_n>0$, 所以$b=\sqrt{a}$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

1.4.6 极限式中常数的确定

例 1.53　已知$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$, 求$a$, b的值.

解　由于$\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$, 而$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}$存在, 故必有$\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$, 即$1+a+b=0$, 故$b=-1-a$, 代入原极限, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-1-a}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)+a(x-1)}{1-x}\\&=\lim_{x\to1}(-x-1-a)=-2-a\end{aligned}$$

由题设, $-2-a=5$, 即$a=-7$, 从而$b=6$.

例 1.54　已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}-1}{x(e^x-1)}=A$, 求$c$及$k$, 使$f(x)\sim cx^k(k>1)$.

解　由题设, $f(x)\sim cx^k(x\to0)$, 知$f(x)=o(x)$, 从而$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin x}=0$. 所以当$x\to0$时,

$$\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}-1\sim\frac{1}{2}\frac{f(x)}{\sin x},\quad e^x-1\sim x.$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}}{x(e^x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}$$

由已知得, $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=A$, 即$f(x)\sim2Ax^3$. 又$f(x)\sim cx^k$, 故$c=2A$, $k=3$.

例 1.55　确定使下式成立的λ与μ: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$.

解　由极限和无穷小的关系, 可设

$$\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu=0+\alpha(x)=\alpha(x).$$

其中$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$, 则

$$\lambda=\frac{\sqrt[3]{1-x^3}-\mu-\alpha(x)}{x}$$

上式两边取极限, 有

$$\lambda=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}-\mu-\alpha(x)}{x}=-1.$$

又
$$\mu=\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\alpha(x)=\sqrt[3]{1-x^3}+x+\alpha(x)$$

上式两边取极限, 有

$$\mu=\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{1-x^3}+x+\alpha(x)]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1-x^3+x^3}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}+\alpha(x)\right]=0.$$

注　以上所列求极限的方法仅是一些常用方法，还有一些有效的方法在后续章节之中将会讨论．诸如，用导数定义求极限，用中值定理求极限，用罗必塔法则求极限，用定积分的定义求极限，用级数收敛的必要条件求极限等．

同步训练题 1.4

1．计算 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

2．计算 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

3．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$.

4．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

5．计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

6．计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

7．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$，其中 $|a|<1$，$|b|<1$.

8．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$.

9．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

10．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

11．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{\sin x}$，其中 α，β 为常数．

12．计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

13．计算 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$.

14．计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x^2}$.

15．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$.

16．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

17．计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$.

18．计算 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

19．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^x)-2x}$.

20．计算 $\lim\limits_{x\to+0}[\sin(\ln x)-\sin(\ln\sin x)]$.

21．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2+e^{\frac{1}{x}}}$.

22．求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\sin\dfrac{1}{x^2}}$.

23. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 2x-\cos 3x}$.

24. 计算 $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1+x}}$.

25. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}$.

26. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^{2}e^{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

27. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^{3}x}}$.

28. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{n}\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

29. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}-2x}{x^{2}-2x+1}\right)^{x-1}\cdot a\left(1+\dfrac{b}{100x}\right)^{x}$.

30. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}$.

31. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x-2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

32. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n}}{n!}$　$(a>0)$.

33. 设 $a>b>c>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{n}+b^{n}+c^{n})^{\frac{1}{n}}$.

34. 设 $x_{n}=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$　$n=1, 2, \cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_{n}}$.

35. 设 $x_{1}=1$, $x_{2}=1+\dfrac{x_{1}}{x_{1}+1}$, $\cdots$, $x_{n}=1+\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$, $\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}$.

36. 设 $x_{1}=2$, $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_{n}}$, $n=1, 2, \cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}$.

37. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n}x$.

38. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}+1}{x+1}-ax-b\right)=0$, 求 a, b 的值.

39. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=4$, 求 c 的值.

40. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1999}}{n^{a}-(n-1)^{a}}=\lambda\neq 0$, 求 a 及 λ 的值.

1.5 函数的连续性及其性质

1.5.1 函数的连续与间断

连续与间断是一对相互否定的矛盾概念，它们反映了函数在一点的分析特征．这两个概念的内涵与函数极限密不可分，因此函数在一点连续与否的讨论离不开极限方法．

例 1.56 初等函数在其定义域上必连续，对否?

解 不对．例如 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 是初等函数，但该函数的定义域 $D=\{x\mid x=2k\pi, k=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 是离散点集，$\forall x_{0}\in D$，x_{0} 均为孤立点．故 x_{0} 的邻域不存在，因此不能讨论函数在 x_{0} 的连续性，即函数在 D 内处处不连续．

“命题：初等函数在其定义区间内连续．”是正确的．

例 1.57 若 $f(x)$ 在 x_{0} 点连续，试证 $|f(x)|$ 在 x_{0} 点亦连续．反之若何?

证 设 $f(x)$ 在 x_{0} 连续，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_{0}|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_{0})|<$

ε. 所以$||f(x)|-|f(x_0)||<|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 故$|f(x)|$在$x_0$点连续.

反之，若$|f(x)|$连续，则$f(x)$不一定连续. 例如$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$在$x=0$处间断，但$|f(x)|$在$x=0$处连续.

例 1.58　若函数$g(x)$在点x_0不连续，则复合函数$f[g(x)]$在点x_0也不连续吗?

解　不一定. 例如函数

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

在点$x=0$不连续. 若设$f(x)=1-x^2$，则复合函数$f[g(x)]=0$却是连续函数.

例 1.59　讨论函数$f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$的连续性，若有间断点，指出其类型.

解　所给函数为初等函数，其定义域$D=(-\infty, 0)\cup(0, 1)\cup(1, +\infty)$. 由初等函数的连续性可知，$f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$在$D$上连续.

在点$x=0$处，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\infty$，所以$x=0$为第二类无穷间断点.

在点$x=1$处，因为$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1$，故$f(1-0)\neq f(1+0)$，所以$x=1$为第一类跳跃间断点.

例 1.60　试求函数$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$的间断点，并说明间断点类型. 若是可去间断点，则补充函数值使函数在该点连续.

解　所给函数在$x=0$，$k\pi$，$k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$处无定义. 以下分别讨论.

在$x=0$处，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$，所以$x=0$为第一类可去间断点，补充定义$f(0)=1$，则$f(x)$在$x=0$处连续.

在$x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$处，因为$\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$，所以$x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$为第二类无穷间断点.

在$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$处，因为$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$，所以$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$为第一类可去间断点，若补充定义$f\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，则$f(x)$在$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$处连续.

例 1.61　设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数，试确定$a$，$b$的值.

解　首先求$f(x)$，然后确定a，b的值.

当$|x|<1$时，$x^{2n-1}\to 0$，$x^{2n}\to 0$ $(n\to\infty)$，$f(x)=ax^2+bx$.

当$|x|>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{1}{x}$.

当$x=1$时，$f(1)=\dfrac{1+a+b}{2}$.