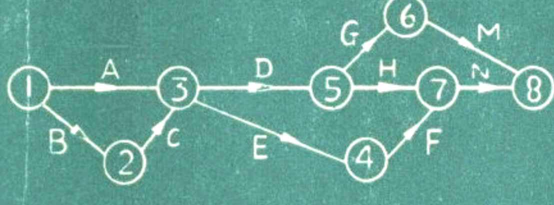
XIANXING DAISHU
JI
YUNCHOUXUE JICHU

林业数学方法丛书

线性代数及运筹学基础

张承忍 张文濡 编著



中国林业出版社

编 者 的 话

本书介绍了线性代数与运筹学的基本原理和方法，并注意结合农林业、森林工业和经济管理等专业实际，配有较多的应用实例；每章之后附有一定份量的习题，以配合读者掌握本书内容，提高解决问题的能力。

本书内容包括线性代数和运筹学基础两篇，本书可作为农林业工程师和科技人员的培训教材、高等林业院校有关专业的本科生教材和函授教材，亦可作为各类科技人员的参考书。

本书的编写工作由南京林业大学干部培训部组织，在干训部主任瞿斌同志领导下进行，其中第一篇线性代数由张承忍编写，第二篇运筹学基础由张文濡编写，本书由南京大学数学系韩继昌教授主审，并对本书提出了许多宝贵意见；在编写工作中杨振华、王守根和蔡观华等同志给予了大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不少缺点和错误，恳请广大读者批评、指教。

编 者

1989年12月于南京

总　序

我们组织编写的这套《林业数学方法丛书》（以下简称《丛书》）共三册，即《线性代数及运筹学基础》、《统计分析方法》和《试验设计及抽样技术》。《丛书》是在林业部教宣司有关领导同志的支持关怀下，由南京林业大学干部培训部于两年多前开始酝酿组织，并由学校老教师在总结多年来工程师进修班教学经验基础上，对讲稿进行系统地整理编著成书的。我们在编写指导思想上，要求将《丛书》编成既适用于林业生产、科技、管理干部培训的教材，又适合于林业干部的自学用书，并在《丛书》所涉及到的范围内兼有工具书的功能。根据上述指导思想，考虑到我国林业干部中专毕业占多数的现状，《丛书》的编写起点放得较低，具有中专（高中）文化基础的一般均能适应。但目标定得较高，学完《丛书》后能达到现行大学本科生水平。就林业常用数学方法讲，还编进了现行研究生所学的内容。这就使本书能满足中专、大学本科和研究生等不同学历层次的干部学习提高和参考的需要。这样编写使《丛书》在进度上坡度较大，为此，作者在循序渐进的原则下简化了不必要的理论推导。凡概念的引入和阐释，尽可能具体形象，或配置启发性的实例，以减少学习上的难度。因此《丛书》用途大体有以下几方面。

一是用作干部培训教材。多年来我们在培训工作中深切地感到，没有一套适用的培训教材，教与学都会发生很多困难，按干部特点编书则能达到事半功倍的教学效果。干部学员的特点是有较丰富的实践经验，理解力强，学习目的性明确，学习态度端正；一般年龄较大，反应和记忆力不及年轻人；培训班学习时间较短，在几个月内要学完多门课程。以上特点告诉我们，光有适合成人教育的教学方法和形式是不够的，还需要与之相应的适用教材。

二是可供自学者进修提高。这是基于我们所了解到的极大多数林业干部没有机会参加脱产培训的苦衷，深感有责任为他们提供一套通俗易懂、深入浅出、便于自学的用书。我校干训部作为林业部主要干训基地之一，五年来只培训了地（市）县林业局长、工程师和专题班学员三千多人，而我国林业系统生产、科技和管理干部数以万计，他们中的绝大多数在基层的生产和科技管理岗位上工作，参加脱产培训的机会极少，另方面又受学校培训容量的制约。为满足他们扩大、补充、更新知识，提高技术和管理素质的愿望，《丛书》的编写尽可能地做到通俗易懂，由浅入深，由实例到理论抽象。如《运筹学》，作者从林业（森林工业）生产、科技和管理的内容出发，精选类型较全的实例来介绍基本概念与基本方法，并将这些方法归结为程序语言的算法步骤和计算框图，还配置了适量的习题，这些都利于自学和培养学习者分析问题与解决问题的能力。

三是本《丛书》精选林业（含森林工业）上类型较全的实例和结合专业配置的习题，加上书后所附统计分析的各类数表，一般能反映当前生产、科技和管理上的新方法新成果，因此兼有工具书的功能，可供林业工作者在实际工作中备查和运用。

此外，由于《丛书》的特色，亦可选作林业院校各专业函授本、专科的教材和本科、专科学生的参考书。当今数学这门基础学科已渗透到各个领域。过去以描述为主的生物学

科，现代管理学等，也日趋“数学化”。马克思曾指出：“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了完善的地步”。数学在林业各学科运用的广度和深度较之其它行业相对滞后，我们期望林业行业各种岗位上的同志，借助本丛书，在“成功地运用数学”方面不断创新，取得成绩。至于《丛书》编写方面的不当之处，我们恳请批评指正。

翟 诚

1990年2月于南京林业大学

本丛书编写领导小组

组　　长： 瞿　诚

组　　员： 杨振华

王守根

蔡观华

沈文瑛

廖桂宗

目　录

第二篇 运筹学基础

第一篇　线性代数

线性代数是在线性空间中研究线性变换的一门数学分支学科。它的许多内容，如行列式、矩阵、线性方程组及二次型等在不少应用学科，尤其是数学学科（如运筹学、多元分析等）中有着广泛的应用。本篇主要介绍上述这些内容。

第一章 行 列 式

行列式是线性代数的一个基本概念，由解线性方程组的需要而产生。但它的应用，除数学本身外，还应用于物理、化学、力学、工程技术及农林等多种学科。本章从大家熟悉的二、三阶行列式开始，分析归纳出二、三阶行列式的共同点，从而将行列式推广到n阶，讨论n阶行列式的定义、性质和计算方法。最后，利用这一概念去讨论某些n元一次方程组的求解问题。

§1 二、三阶行列式的分析

一、二元一次方程组与二阶行列式

这里讨论的方程组是由二个方程式所组成，且每个方程都是二个未知量的一次方程，其一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases} \tag{1—1}$$

这里b_1、b_2是常数项；a_{11}、a_{21}分别是第一个方程与第二个方程中x的系数；a_{12}、a_{22}分别是第一个方程与第二个方程中y的系数。这样的方程组可通过消元法求解。具体做法是：若要消去未知量y，则在第一个方程的两端乘以a_{22}，在第二个方程两端乘以a_{12}，即

$$a_{11}a_{22}x+a_{12}a_{22}y=b_1a_{22}$$

$$a_{21}a_{12}x+a_{12}a_{22}y=b_2a_{12}$$

将上述两方程相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

再用同样的方法，消去未知量x，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有 $y=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$

对于系数满足条件$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$的方程组（1—1），它的解x，y可由下面的公

式（1—2）求出。经直接验算，知（1—2）确是方程组（1—1）的解。所以，方程组（1—1）在系数满足条件$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，有唯一解：

$$x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad y=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1—2}$$

该公式难于记忆，易出错误。这里引出一个记号来克服这一缺点，即将分母$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}，亦即\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式。它含有两行、两列，横写的叫做行，竖写的叫做列。行列式中的数称为元，a_{12}就是第一行、第二列上的元。二阶行列式是两项的代数和。一项是主对角线（从行列式的左上角到右下角的对角线）上两个元的乘积，积的前面放置正号；另一项是次对角线（从行列式右上角到左下角的对角线）上两个元的乘积，积的前面放置负号。这一记号引出后，公式（1—2）可表为：

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

分母中的行列式是方程组（1—1）系数所构成的行列式，记为D；分子中的两个行列式是系数行列式D的第一列与第二列分别换常数项列后构成的，各记为D_1、D_2。即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

所以，方程组（1—1）在系数行列式$D\neq 0$时，有唯一解：

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

象这样用行列式来表示解，形式简便，易于记忆。

例1—1 解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-3y=-2 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-6-1=-7$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-21+2=-19$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-4-7=-11$$

由于 $D\neq 0$，所以方程组有唯一解：

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{19}{7}，\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{11}{7}$$

二、三元一次方程组与三阶行列式

这里讨论的三元一次方程组，是指含三个未知量的三个一次方程所构成的方程组。它的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

为了解（1—3）式，就得消去（1—3）中任意两个未知量，求得只含一个未知量的方程。例如把（1—3）的第一、第二、第三个方程分别乘以$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$，再加起来，结果可知$x_2$、$x_3$的系数都等于0，而得等式

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}&+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\\ &-a_{13}a_{22}a_{31})x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}\\ &-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3\end{aligned}$$

所以，当$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$

$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时，就得到

$$x=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

用类似的方法，可求得

$$y=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$z=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

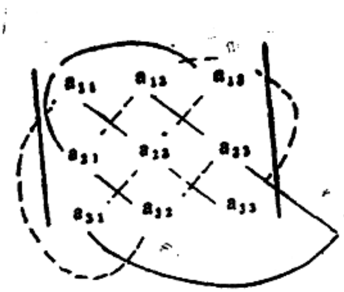
这就是说，在$D\neq 0$时，方程组（1—3）如果有解，这解必呈上面的形状。

反之，若将上面的x、y、z的值代入（1—3）必能满足（读者可自己去验算），这样，在$D\neq 0$时，方程组（1—3）有唯一解，即是上面x、y、z的表达式。

这里的求解公式更为复杂、难记，为此引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

它含有三行、三列，它的值是六项的代数和。这六项可这样去记忆：在下图中，实线上三个元的乘积前面放正号（计三项）；虚线上三个元的乘积前面放负号（计三项）。



例如三阶行列式

$$A=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\2&1&4\end{vmatrix}=1\times4\times4+0\times1\times3+2\times5\times2$$
$$-2\times3\times4-0\times2\times4-1\times1\times5=7$$

于是上面 x、y、z 的表达式可表为

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D},\quad z=\frac{D_3}{D}$$

其中 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}$,

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

例 1－2　解方程组

$$\begin{cases}3x+2y-z=14\\x+y+z=10\\2x+3y-z=1\end{cases}$$

解　$$D=\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&1&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=3\times1\times(-1)+2\times1\times2+1\times3\times(-1)$$
$$-2\times1\times(-1)-3\times1\times3-\underline{2\times1\times(-1)}=-5$$

$$D_1=\begin{vmatrix}14&2&-1\\10&1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}3&14&-1\\1&10&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & 2 & 14\\ 1 & 1 & 10\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-35$$

由于　$D\neq 0$，方程组有唯一解：

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{-5}=1\qquad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-5}=2\qquad z=\frac{-35}{-5}=7$$

以上这些内容，在中学数学中已有介绍。下面将沿着这一想法，讨论含n个未知量、n个一次方程的方程组。这一方程组的求解与n阶行列式紧密相关，我们得首先了解n阶行列式的概念，然后再用n阶行列式去解该方程组。为此要找出二阶、三阶行列式在结构上的共性，以此共性作为n阶行列式的定义。

由二阶、三阶行列式的定义，可看出如下几条规律：

（1）二阶行列式的每一项（除去前面所置的符号）是二个不同行、不同列上元的积。所以二阶行列式的任一项可记为$a_{1p_1}a_{2p_2}$。p_1、p_2是1、2的一个排列，这种排列共有二个，它们是{1 2}与{2 1}，所以二阶行列式共含有两项。三阶行列式的每一项（除去所放符号）是三个不同行、不同列上元的乘积，它的任一项可记为$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$。p_1，p_2，p_3是1，2，3的任一个排列，这种排列的总数为3!，它们是{1 2 3}，{1 3 2}，{2 1 3}，{2 3 1}，{3 1 2}，{3 2 1}，所以三阶行列式共有3! = 6项。

（2）下面通过对二阶、三阶行列式各项前所放符号的分析，可找出其规律性。

二阶行列式各项前放置的符号如表1-1。

三阶行列式各项符号如表1-2。

表1-1

行　下　标	12	12
列　下　标	12	21
项前放置符号	+	−

表1-2

行 下 标	123	123	123	123	123	123
列 下 标	123	231	312	321	213	132
项前放置符号	+	+	+	−	−	−

在表1-1和表1-2中，行下标按自然顺序排列，各项前放置的正负号依赖于列下标各数字的排列。三阶行列式中，项前放置正号的项，它的列下标构成{1 2 3}、{2 3 1}、{3 1 2}三个排列；项前放置负号的项，它的列下标构成{1 3 2}、{2 1 3}、{3 2 1}三个排列。放置不同符号的项，它们的列下标排列有什么不同，这就需要研究数字排列的逆序问题。

任意两个自然数，如果大的数排在先，小的排在后，就说这两个自然数间有一个逆序。一个排列中，逆序的总数称为这个排列的逆序数。排列{1 2 3}没有逆序，即逆序数为0；排列{2 3 1}共有两个逆序（2在1之先，3在1之先），所以排列的逆序数是2；排列{3 1 2}的逆序数是2。放置正号的项，它的列下标的三个排列，其逆序数分别为0、2、2，它们是偶数。同样可知，放置负号的项，它的列下标排列的逆序数均为奇数。逆序数是偶数的排列称为偶排列，逆序数是奇数的排列称为奇排列。这样三阶行列式各项前放置符号的规则为：当积中三个元按行下标的自然顺序排列时，相应列标排列的逆序数是偶数，该乘积前放置正号；相应列标排列的逆序数是奇数时，该乘积前放置负号。所以，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\{p_1p_2p_3\}} (-1)^{\tau\{p_1p_2p_3\}} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中符号 $\tau\{p_1p_2p_3\}$ 表示排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，符号 $\sum\limits_{\{p_1p_2p_3\}}$ 表示对 1、2、3 的所有可能的排列取和

对于二阶行列式，当各项的两个元按行标的自然顺序排列时，列标的排列仅有{ 1 2 }和{ 2 1 }，所以二阶行列式仅有两项。由于这两个排列一个是奇，一个是偶，故行列式的两项其中一项前放置正号，另一项前放置负号。所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\{p_1p_2\}} (-1)^{\tau\{p_1p_2\}} a_{1p_1}a_{2p_2}$$

通过上面的分析，我们可得到n阶行列式的概念。

§2　n阶行列式的定义

定义1—1　设有n^2个数a_{ij}，i，j＝1，2，…，n，把它们排列成一个有n行n列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式。它表示按下列规则构成的代数和：

（1）这个代数和中共有n!项，每一项是行列式的不同行不同列的 n 个元的乘积，这一乘积一般可表为$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，$p_1$，$p_2$，…，$p_n$是1，2，…n的某个排列。

（2）乘积$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 前放置的符号为 $(-1)^{\tau\{p_1p_2\cdots p_n\}}$，$\tau\{p_1p_2\cdots p_n\}$是列标排列的逆序数。

这样，n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\{p_1p_2\cdots p_n\}} (-1)^{\tau\{p_1p_2\cdots p_n\}} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \quad (1\text{–}4)$$

符号 $\sum\limits_{\{p_1p_2\cdots p_n\}}$ 表示要对1，2，…，n 的所有排列取和。

关于这一定义再给三点说明：第一，因为求和是对1，2，…，n的所有排列取的，而1，2，…n的所有排列共有n！个，所以n阶行列式的代数和是n！项。第二，（1—4）右

端求和记号中，每项写成乘积$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的形式，其意义就是要将每个乘积的n个元依照行的先后次序来写。由于a_{1p_1}在第一行上，故将它写在乘积的最前面，a_{2p_2}是在第二行上，故将它写在乘积的第二个位置上，等等，第三，对于仅有一个元a构成的一阶行列式规定为a即$|a|=a$。

例1—3　求四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

的值。

解　先写出由1 2 3 4所生产的各种排列：

{1234}　{1243}　{3412}　{3421}　{1324}　{1342}
{1423}　{1432}　{2134}　{2143}　{2314}　{2341}
{2413}　{2431}　{3124}　{3142}　{3241}　{3214}
{4123}　{4132}　{4213}　{4231}　{4312}　{4321}

则

$$\begin{aligned}
D=&a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}\\
&+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}\\
&+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\\
&-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}\\
&-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}\\
&-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}\\
=&0+3\times5\times3\times2+1\times4\times2\times2+1\times5\times1\times0+2\times2\times1\times0\\
&+2\times4\times3\times1+2\times5\times1\times4+3\times2\times1\times1+3\times0+4\times2\times1\times2\\
&+4\times0+4\times4\times1\times4-0-3\times5\times1\times4-1\times4\times1\times1\\
&-1\times5\times1\times2-2\times2\times1\times1-2\times4\times2\times4-2\times5\times3\times0\\
&-3\times2\times2\times2-0-0-0-4\times4\times3\times2\\
=&90+16+24+40+6+16+64-60-4-10-4-64-24-96\\
=&-6
\end{aligned}$$

例1—4　求n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 及 \quad \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

的值（未写出的元都是零）。

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\{p_1p_2\cdots p_n\}}(-1)^{\tau\{p_1\cdots p_n\}}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$\{p_1p_2\cdots p_n\}$是1，2，…n的一个排列，这种排列共有n！个。在这n！个排列中，每一个排列对应于行列式和中的一项，这n！项中仅有一项可能非零，其它项中至少有一个零元。这一项所对应的列标排列为（1，2，3，…n），且其逆序数为0，所以行列式的值为$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

$$\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2(n-1)} & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix} = \sum_{\{p_1p_2\cdots p_n\}} (-1)^{\tau\{p_1p_2\cdots p_n\}} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这一行列式中，不含有因子0的项仅可能一项

它是积 $a_{1n}\ a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$，符号为

$$(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots 3,2,1)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$ 所以

$$\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2(n-1)} & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}\ a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

上述两个行列式称为对角行列式。对角线以下（上）的元都是零的行列式，称为上（下）三角行列式，它的值与对角行列式相等。

例1—5　求证下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & O \\ a_{21} & a_{22} & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} O & & a_{1n} \\ & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \swarrow & \\ a_{n1}a_{n2} & \cdots a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

证明　在D中当j>i时，$a_{ij}=0$，故D中可能不为0的元a_ip_i其下标应有$p_i\leqslant i$，即$p_1\leqslant 1$，$p_2\leqslant 2$，…，$p_n\leqslant n$。由1，2，3，…n所产生的各种排列中，满足上述不等式的排列仅为（1 2 3 …n），所以D中可能不为0的项只有一项$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=(-1)^0a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

在D_1中，可能不为0的元为a_{ip_i}，其下标应满足$p_i\geqslant n+1-i$，即$p_1\geqslant n$，$p_2\geqslant n-1,\cdots p_n\geqslant 1$。在（123…n）的各种排列中仅有一个排列满足上述要求，即$p_1=n$，$p_2=n-1,\cdots p_n=1$，所以D_1中可能不为零的项只有一项$(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,3,2,1)}$

$a_{1n}a_{2(n-1)},\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$ 所以

$$D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$