2003年

人大版考研常考知识点系列

◆全国25省市著名考研辅导班精品考研书◆

2003版

2003年 考研数学 常考知识点

主编 葛严麟

作者简介

清华大学教授，常年从事微积分教学工作；清华大学本科《高等数学》教材和《高等数学辅导》参考书的主要作者；历年硕士研究生入学考试数学组主要阅卷人；在全国十省市考研辅导班主讲微积分，对考研辅导有丰富的经验。

中国人民大学出版社

全面提炼历年考点　深度总结解题技巧

考研数学常考知识点

主　编　葛严麟
编　者　葛严麟　胡金德　赵衡秀

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学常考知识点/葛严麟主编. 4 版.
北京:中国人民大学出版社,2002

ISBN 7-300-03098-X/G·661
Ⅰ. 考…
Ⅱ. 葛…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 002819 号

凡人大版考研图书,封面均有人大社标印纹,否则均为盗版,欢迎举报。有关购书奖励办法见 WWW.easyky.com

考研数学常考知识点
主　编　葛严麟
编　者　葛严麟　胡金德　赵衡秀

出版发行:中国人民大学出版社
　　　　(北京中关村大街 31 号　邮编 100080)
　　　　邮购部:62515351　门市部:62514148
　　　　总编室:62511242　出版部:62511239
　　　　E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销:新华书店
印　　刷:中煤涿州制图印刷厂

开本:787×1092 毫米 1/16　印张:32.5
1995 年 4 月第 1 版
2002 年 3 月第 4 版　2002 年 3 月第 1 次印刷
字数:742 000

定价:39.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

前　言

本书自1995年问世以来，深受广大考生的欢迎，现是第4次再版。经过多年来的逐步完善和适当的增删，列举了各种有代表性的题型，相信考生研读本书后会受益匪浅。

为了帮助参加全国工学、经济学硕士研究生入学考试的广大考生复习应试，我们根据国家教育部最新制定的《数学考试大纲》要求，并根据对多年来统考命题特点的分析研究和长期对考生辅导及评卷的经验编写了本书，目的是希望考生通过对本书的深入钻研，并参加定期的考研辅导班，对微积分、线性代数、概率统计的基本概念、理论和运算达到一个温故而知新的效果，从而在应考中取得良好的成绩。

本书由两部分组成。第一部分是内容提要及典型例题分析。内容提要中系统地给出了大纲划定的基本概念、定理、公式及应用，有助于考生对考试的范围和要求有一个系统而又明确的了解；典型例题分析中，我们按考试大纲的要求，精选了各种题型的例题，进行详细的分析和解答，并指出易犯的错误性质。所选择的题绝大多数取自历届考研的试题及清华大学数学题库，具有一定的典型性。第二部分是模拟试题。考生通过第一部分的复习与训练，可用考研实战的形式来测试自己的应考能力，这有助于考生考察自己对基本概念、定理、公式的理解、记忆及掌握运用的程度，及时发现问题，纠正错误。模拟试题按数学一、二、三、四类分别各有两套，附有参考解答。最后还附有2001年、2002年全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考题及参考解答，供考生参考。

参加本书编写的是清华大学应用数学系长年在教学第一线执教的资深教师，具有丰富的教学经验和考研辅导经验。全书由葛严麟任主编，并编写了微积分部分；胡金德编写了线性代数部分；赵衡秀编写了概率论与数理统计部分。

本书自出版以来深受广大考生欢迎，并收到不少读者来信，对本书个别章节的内容提出中肯的建议并指出一些排版上的错误，编者在此深表感谢。新版本对1998年版本作了较大的修订与补充，且每年有所修订与补充。我们也提醒考生切不可把本书作为阅读材料来使用，光看不练是不行的。建议考生在使用本书时勤动脑、勤动手，对书中的例题、试题不要急于看解答，先自己动手分析、演算，再参照解答来检验自己的思路及运算是否正确。这需要付出辛勤的劳动，也必定会有丰厚的收获。

最后欢迎考生对本书中的错误和不妥之处提出批评意见和建议。

编　者

2002年1月

目　　录

内容提要及典型例题分析

模 拟 试 题

内容提要及典型例题分析

第 1 章　一元函数微积分

§1　函数、极限、连续

内　容　提　要

一、函数

1. 函数　(一元)函数是指非空集合 $D(D\subset\mathbf{R})$ 到集合 $\mathbf{R}$ 中的某个对应规则,记作 f,即 $f:x\mapsto y, x\in D$,习惯上记作 $y=f(x), x\in D$. 称 D 为 f 的定义域,称集合 $\{y\in\mathbf{R}\mid y=f(x), x\in D\}$ 为 f 的值域,记作 $R(f)$(见图 1.1).

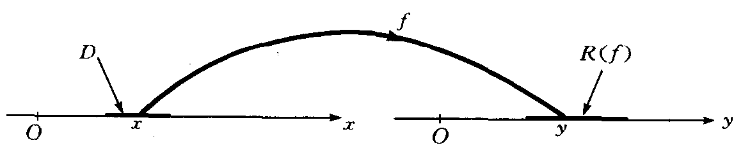


图 1.1

函数的两要素是:(1)对应规则;(2)定义域. 如此

$$y=\sqrt{x-1}, x\geqslant 1 \text{ 与 } u=\sqrt{t-1}, t\geqslant 1$$

是指同一个函数,可以用同一个字母 f 表示,即

$$f(x)=\sqrt{x-1}, x\geqslant 1, f(t)=\sqrt{t-1}, t\geqslant 1.$$

函数 $f:x\mapsto y, x\in D$ 的反函数是指 f 的反对应规则,记作 f^{-1}(如果存在的话),即

$$f^{-1}:y\mapsto x, y\in R(f), \text{满足 } f(x)=y \text{ 或 } f^{-1}:x\mapsto y, x\in R(f), \text{满足 } f(y)=x,$$

习惯上记作 $y=f^{-1}(x), x\in R(f)$. f 与 f^{-1} 互为反函数.

函数 $f:u\mapsto y, u\in I$ 与 $g:x\mapsto u, x\in D$ 的复合记作 $f\circ g$,即 $f\circ g:x\mapsto y, x\in D$(如果 $R(g)\subset I$),习惯上记作 $y=f(g(x)), x\in D$(见图 1.2).

我们有　$f(f^{-1}(y))=y, f^{-1}(f(x))=x$.

分段函数、基本初等函数、初等函数的说明见教材.

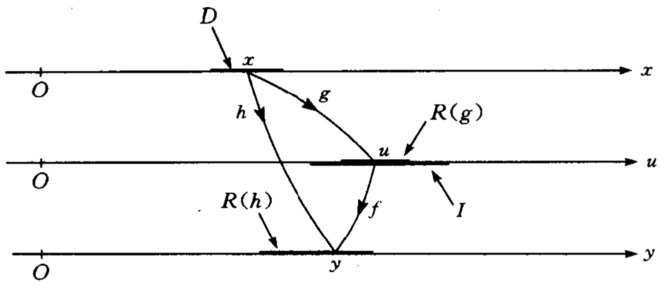


图 1.2

整标函数是指 $f: n \mapsto u_n, n\in \mathbf{N}$ 或 $u_n=f(n), n=1,2,3,\cdots$

2. 函数的特性 设 $y=f(x), x\in I$（I 是区间或区间的并）. 引入记号：$\forall$ 表示每一个，$\exists$ 表示存在.

(1)**有界性** 如果 $\exists\ M>0$，使对 $\forall\ x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$ 在 I 上有界.

(2)**奇偶性** 如果对 $\forall\ x\in I$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数；如果对 $\forall\ x\in I$，有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数.

(3)**周期性** 如果 $\exists\ T>0$，使对 $\forall\ x\in I$，有 $f(x+T)=f(x)$，称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

(4)**单调性** 如果对 $\forall\ x_1,x_2\in I$（I 是区间，$x_1<x_2$），有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增的（或单调减的）；如果对 $\forall\ x_1,x_2\in I$（I 是区间，$x_1<x_2$），有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

称 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调增的（或严格单调减的）.

（注：函数 f 在区间 I 上存在反函数 f^{-1} 的充分条件是 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调（增或减）. 此时，反函数 f^{-1} 在其定义域 $R(f)$ 上也严格单调（增或减）.

设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内定义，

$f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增 $\Leftarrow$ 对 $\forall\ x\in(a,b)$，$f'(x)>0$（见图 1.3）.

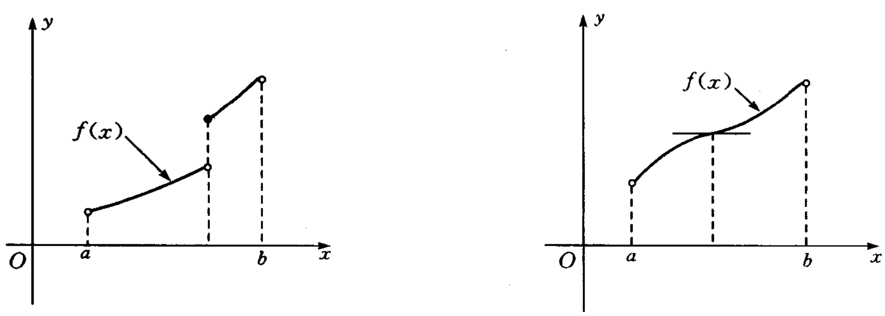


图 1.3

$f(x)$ 在 (a,b) 内单调减 $\Leftarrow$ 对 $\forall\ x\in(a,b)$，$f'(x)\leqslant 0$（见图 1.4）.）

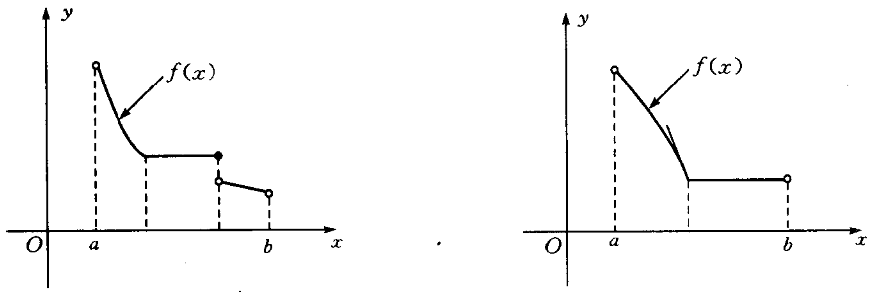


图 1.4

二、极限

1. 邻域 点 x_0 的 δ 邻域($\delta>0$) 指开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,记作 $U_\delta(x_0)$,

$$U_\delta(x_0)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

点 x_0 的 δ 去心邻域($\delta>0$) 指$(x_0-\delta,x_0)$ 与$(x_0,x_0+\delta)$ 的并,记作 $N_\delta(x_0)$.

$$N_\delta(x_0)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

2. 函数在一点的极限 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义.如果对 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,即

对 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使对 $\forall\ x\in N_\delta(x_0)$,恒有 $y\in U_\varepsilon(A)$,其中 $y=f(x)$,

称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以 A 为其极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,否则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时极限不存在.

$f(x)$ 在点 x_0(即 $x\to x_0$ 时) 极限存在的充分必要条件是:

$f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限存在且相等,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\rightleftharpoons\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\rightleftharpoons f(x_0^-)=f(x_0^+)=A.$$

3. 整标函数 $f(n)$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A\rightleftharpoons$ 对 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N$,使当 $n>N$ 时,恒有 $|f(n)-A|<\varepsilon$.

如果$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$,称数列$\{u_n\}$ 收敛,其中 $u_n=f(n)$ $(n=1,2,\cdots)$,否则称数列$\{u_n\}$ 发散.单调有界数列$\{u_n\}$ 一定收敛.

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(或 ∞),则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$(或 ∞),反之不一定成立.

4. 无穷小量,无穷大量,有界函数

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,称 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的一个无穷小量.

($\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0\rightleftharpoons$ 对 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$,有 $|\alpha(x)|<\varepsilon$.)

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的一个无穷大量.

($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\rightleftharpoons$ 对 $\forall\ G>0$,$\exists\ \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$,有 $|f(x)|<G$.)

如果 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内有界($f(x)$ 在点 x_0 可以无定义),称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的一个有界函数.如 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ 是 $x \to 0$ 时的一个有界函数.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,则 $f(x) = A + \alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$,反之亦成立.

无穷小量(不取零值)的倒数是无穷大量,反之亦成立.

无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量.

5. 无穷小量的比较

(1) 定性.设 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,称当 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的(或 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的)无穷小量,记作 $\alpha(x) = o(\beta(x)), x \to x_0$.

如果 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 在 $x \to x_0$ 时有界(特别 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$),称当 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小量,记作

$$\alpha(x) = O(\beta(x)), x \to x_0.$$

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,称当 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量,记作

$$\alpha(x) \sim \beta(x), x \to x_0.$$

5 个重要的等价无穷小量是指:当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x (\lambda \text{ 为实数}),$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

如果 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x) \to 0$,则当 $x \to x_0$ 时,

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x),\ \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x),\ e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x),$$

$$(1+\alpha(x))^\lambda - 1 \sim \lambda\alpha(x),\ 1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{1}{2}\alpha^2(x).$$

(2) 定量.设 $\lim\limits_{x \to 0} \alpha(x) = 0$,如果 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{x^k} = A (A \neq 0, A \neq \infty, k > 0)$,称 $\alpha(x)$ 为 $x \to 0$ 时的 k 阶无穷小量(以 x 作为基本无穷小量).

特别,$y(x) = 0 (x \in N_\delta(x_0))$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量,其阶数不存在.

三、连续

1. 函数在一点连续　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内定义.记 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$,当 $|x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续,即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\rightleftharpoons \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \rightleftharpoons f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

(注:函数在一点的连续性是函数在该点的微观性质.

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\not\Rightarrow f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内每一点连续.

如设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \in (-1,1), |x| \neq \frac{1}{n}, \quad n = 2,3,\cdots. \\ 0, & |x| = \frac{1}{n}, \quad n = 2,3,\cdots. \end{cases}$

有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$,即 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 连续.但对 $\forall\ \delta > 0(\delta < 1) f(x)$ 在 $U_\delta(0)$ 内总存在不连续点 $x = \pm\frac{1}{n}$(当 n 充分大时)(见图 1.5).)

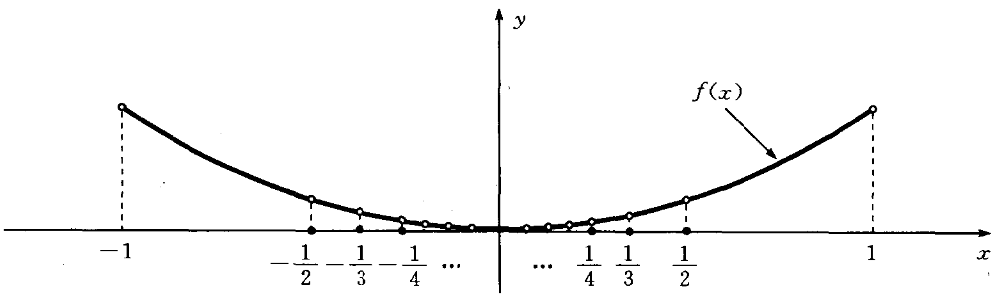


图 1.5

2. 函数在区间上连续 设 $f(x)$ 在区间 I 上定义.如果对 $\forall\ x \in I$, $f(x)$ 在点 x 处连续,称 $f(x)$ 在 I 上连续,记作 $f(x) \in C(I)$ (记号 $C(I)$ 表示在区间 I 上所有连续函数的集合).

结论:初等函数在其定义域上处处连续.

3. 闭区间上连续函数的性质

(1) **有界性定理** 设 $f(x) \in C([a,b])$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) **最大、最小值定理** 设 $f(x) \in C([a,b])$,则 $\exists\ \xi \in [a,b]$,使 $f(\xi) = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$; $\exists\ \eta \in [a,b]$,使 $f(\eta) = \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

(3) **介值定理** 设 $f(x) \in C([a,b])$,记 $m = \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$,则对 $\forall\ \mu \in \mathbf{R}(m \leqslant \mu \leqslant M)$, $\exists\ \xi \in [a,b]$(闭区间),使 $f(\xi) = \mu$(见图 1.6 左).

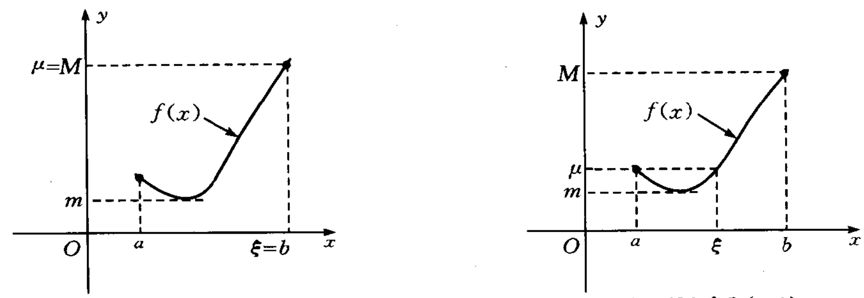
特别,如果 $m < \mu < M$,则 $\exists\ \xi \in (a,b)$(开区间),使 $f(\xi) = \mu$(见图 1.6 右).

(4) **零点定理** 设 $f(x) \in C([a,b])$.如果 $f(a) \cdot f(b) < 0$,则 $\exists\ \xi \in (a,b)$,使 $f(\xi) = 0$.

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上还严格单调,则上述 ξ 还是惟一的(见图 1.7).

(注:设 $f(x) \in C((a,b))$.记 $A = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

如果 $A \cdot B < 0$ 或者设 $f(x) \in C((a,+\infty))$.记 $A = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$,如果 $A > 0$,又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,则零点定理成立.)



$m \leqslant \mu \leqslant M, \xi \in [a,b]$　　　$m < \mu < M, \xi \in (a,b)$

图 1.6

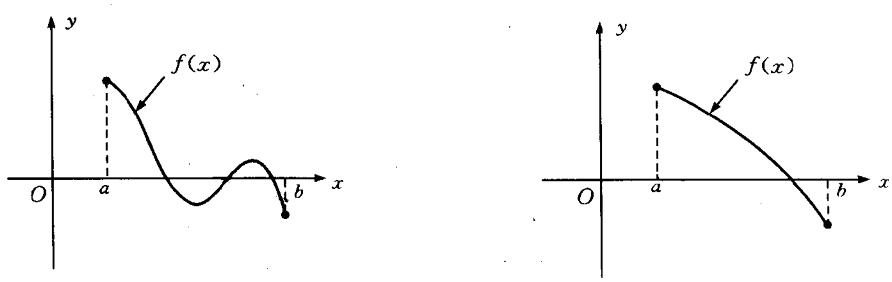


图 1.7

4. 间断点　指 $f(x)$ 的不连续点. 设 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内有定义, $f(x)$ 的间断点 x_0 按类分有两类.

第一类间断点:如果在点 x_0 处, $f(x)$ 的左、右极限存在;

第二类间断点:如果在点 x_0 处, $f(x)$ 的左、右极限中,至少有一个不存在.

$f(x)$ 的间断点 x_0 按型分有跳跃型、振荡型、无穷型、可去型 4 种间断点.

如果 x_0 是 $f(x)$ 的可去型间断点(在点 x_0, $f(x)$ 的左、右极限存在且相等),则重新定义 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,使 $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,可使 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

典型例题分析

1. 已知 $g(x) = f(e^x - 1) = x^2 + 1$,又 f 的定义域为 $[1, +\infty)$,则 $f(x) =$ ____, g 的定义域为____.

分析:记 $\varphi(x) = e^x - 1$,则 $g(x) = f[\varphi(x)]$, $g = f \circ \varphi$.

已知函数 φ, g $(g(x) = x^2 + 1)$,要求 f,函数 g 与 φ 的定义域相同,而 φ 的值域 $R(\varphi) \subset [1, +\infty)$—$f$ 的定义域.

解:令 $t = \varphi(x) = e^x - 1$. 因为 $R(\varphi) \subset [1, +\infty)$—$f$ 的定义域,即 $t \in [1, +\infty)$,知 $x \in [\ln 2, +\infty)$(见图 1.8),故 $g(x) = x^2 + 1$,其定义域为 $[\ln 2, +\infty)$. $f(t) = \ln^2(1+t) + 1$, $t \in [1, +\infty)$,或 $f(x) = \ln^2(1+x) + 1$, $x \in [1, +\infty)$.

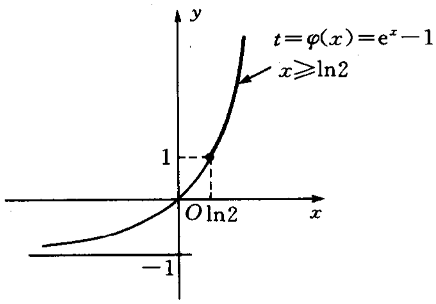


图 1.8

(注:$g(x) = x^2 + 1$. $[\ln 2, +\infty)$ 是 g 的非自然定义域. $(-\infty, +\infty)$ 是 g 的自然定义域.)

2. 设 $f(x)$ 满足关系式 $2f(x) - f(1-x) = x^2 - 1, x \in (-\infty, +\infty)$,则 $f(x) =$ ____.

分析:如果令 $1 - x = t$,以 $x = 1 - t$ 代入已知关系式,可得到 f 满足的另一个关系式,由此便可解出 f. 或者由已知关系式的右端是 x 的二次多项式,而左端中的 $f(1-x)$ 是函数 f 与一次多项式函数 $\varphi(x) = 1 - x$ 的复合,可猜想 f 是 x 的某个二次多项式函数 $A + Bx + Cx^2$,由待定系数法求出 A,B,C.

解:法一. 令 $1 - x = t$,以 $x = 1 - t$ 代入已知关系式,再把 t 改为 x,得

$$2f(1-x) - f(x) = (1-x)^2 - 1,$$

解方程组 $\begin{cases} 2f(x) - f(1-x) = x^2 - 1, \\ -f(x) + 2f(1-x) = x^2 - 2x, \end{cases}$

可求得 $f(x) = \dfrac{1}{3}(3x^2 - 2x - 2), x \in (-\infty, +\infty)$.

法二. 令 $f(x) = A + Bx + Cx^2$,代入已知关系式,

$$2(A + Bx + Cx^2) - [A + B(1-x) + C(1-x)^2] = x^2 - 1,$$

令 x 的同幂次系数相等,有

$$A - B - C = -1, B + 2C = 0, C = 1,$$

求出 $A = B = -\dfrac{2}{3}, C = 1$,故 $f(x) = \dfrac{1}{3}(-2 - 2x + 3x^2), x \in (-\infty, +\infty)$.

思考:题中 f 满足的关系式若改为 $2f(x) - f(1-x) = e^x - 1$,或改为 $2f(x) - f(1-2x) = x^2 - 1$,法一、法二哪个可行?

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geqslant 0, \\ e^x - 2, & x < 0, \end{cases}$ 求 f^{-1} 及其定义域.

分析:$f(x)$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 中严格单调增,存在反函数 f^{-1}. 求反函数 f^{-1} 的方法是在 $y = f(x)$ 中解出 x. f^{-1} 的定义域即 f 的值域 $R(f)$.

解: $y = x^2 - 1, x \geqslant 0 \rightleftharpoons x = \sqrt{y+1}, -1 \leqslant y < +\infty$,

$y = e^x - 2, x < 0 \rightleftharpoons x = \ln(y+2), -2 < y < -1$.

故 $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y+1}, & -1\leqslant y<+\infty,\\ \ln(y+2), & -2<y<-1.\end{cases}$ f^{-1} 的定义域$(-2,+\infty)$.

或者 $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & -1\leqslant x<+\infty,\\ \ln(x+2), & -2<x<-1.\end{cases}$ f^{-1} 的定义域$(-2,+\infty)$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$,当 $x\to\infty$ 时,如果 $f(x)$ 是无穷大量,则 $p=$ ____,$q=$ ____;如果 $f(x)$ 是无穷小量,则 $p=$ ____,$q=$ ____.

解:$f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5=\dfrac{3qx^3-(p+5)x^2+3qx+3}{x^2+1}$,可知,当且仅当 $q\neq 0$,p 任意时,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$;

当且仅当 $q=0,p=-5$ 时,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

5. 已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=5$,则 $a=$ ____,$b=$ ____.

分析:一般当$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$(存在),又$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$时,一定有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.因为如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$,有$\dfrac{f(x)}{g(x)}=A+\alpha(x)$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,故 $f(x)=(A+\alpha(x))g(x)$,当$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 时,知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

解:由条件知 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$(因$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$),故

$$b=-\lim_{x\to 2}(x^2+ax)=-(4+2a),$$

由此 $x^2+ax+b=x^2+ax-(4+2a)=(x-2)(x+a+2)$,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+a+2)=4+a,$$

令 $4+a=5$,知 $a=1$(或者,用洛必大法则,

$$5=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}\xlongequal{(\frac{0}{0},\text{洛})}\lim_{x\to 2}(2x+a)=4+a,$$

知 $a=1$),从而 $b=-(4+2a)=-6$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 是( ).

(A)1 (B)-1 (C)2 (D)-2

解:当 $|x|\leqslant 1$ 时,$f(x)=1$,$g[f(x)]=g(1)=-2$;

当 $|x|>1$ 时,$f(x)=-1$,$g[f(x)]=g(-1)=-2$.

故对 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$,$g[f(x)]=-2$,选(D).

此方法称作直接法.通过直接计算 $g[f(x)]$,找出正确项.

7. 设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,则( )为奇函数.

(A)$g[g(x)]$ (B)$f[f(x)]$

(C)$f[g(x)]$ (D)$g[f(x)]$

解:按奇、偶函数的定义逐个验证之.

记 $A(x)=g[g(x)]$. 因为 $A(-x)=g[g(-x)]=g[g(x)]=A(x)\neq -A(x)$.

记$B(x)=f[f(x)]$. 因为

$$B(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]=-B(x),$$

选(B). 一旦(B)为正确项,(C)、(D)两项不需再验证了.

此法称验证法. 把各预选项逐个按题设的条件进行验证,或把题设的条件代入各预选项进行验算,从而选出正确的项.

8. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增,恒正,则下列函数中,(　)是严格单调增的.

(A)$f(\sqrt{-x})$　　　　(B) $-f(\sqrt{x})$

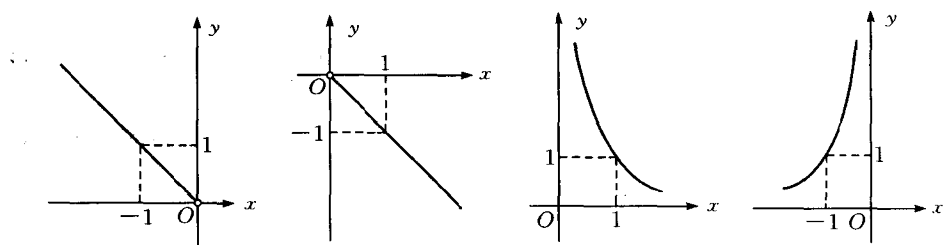
(C)$f(\frac{1}{x})$　　　　(D) $\frac{1}{f(-x)}$

分析:因为若对某个满足题设条件的特殊的函数 $f(x)$,某预选项不成立,则一般也不成立,故可排除该预选项. 今按 $f(x)=x^2, x>0$, 分别作出 $f(\sqrt{-x})$, $-f(\sqrt{x})$, $f(\frac{1}{x})$, $\frac{1}{f(-x)}$ 的图形,从图形上来排除不正确的项,这种方法称作图解法.

解:取 $f(x)=x^2, x>0$ ($f(x)$ 满足题设条件). 分别作出下面四个函数的图形(见图 1.9).

$$f(\sqrt{-x})=-x\quad(x<0),\ -f(\sqrt{x})=-x\quad(x>0),$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}\quad(x>0),\ \frac{1}{f(-x)}=\frac{1}{x^2}\quad(x<0).$$



$y=-x(x<0)$　　$y=-x(x>0)$　　$y=\frac{1}{x^2}(x>0)$　　$y=\frac{1}{x^2}(x<0)$

图 1.9

因为前 3 个函数的图形均不是严格单调增的,故排除(A),(B),(C),选(D).

(此题用图解法比用按函数严格单调增的定义来逐个检验方便.

如检验(A). 记$A(x)=f(\sqrt{-x}), x\in(-\infty,0)$. 对$\forall\ x_1,x_2\in(-\infty,0)(x_1<x_2)$, 有 $0<\sqrt{-x_2}<\sqrt{-x_1}<+\infty$, 从而 $f(\sqrt{-x_1})>f(\sqrt{-x_2})$(因 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上严格单调增), 即$A(x_1)>A(x_2)$, $A(x)$ 在$(-\infty,0)$上严格单调减. 排除(A).)

9. 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上定义,在点 $x=0$ 连续,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq 0$,则 $x=0$ 是函数

$$g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$ 的(　).

(A) 第一类间断点　　　(B) 第二类间断点

(C) 连续点　　　　　　　(D) 间断点,但类型不能确定

解:首先按函数在一点处连续的定义,考察 $g(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续. 因为

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}f(\frac{1}{x})=\lim_{t\to\infty}f(t)\neq 0,$$

而 $g(0)=0$,故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的间断点,排除(C).

条件"$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq 0$"包含两层意思:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在;(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ (存在),$A\neq 0$.

如取 $f(x)=x$,$f(x)$ 在 $x=0$ 连续,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$(满足题设条件),

此时 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x=0$ 是 $g(x)$ 的第二类间断点,排除(A).

如取 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$(满足题设条件),

此时 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x=0$ 是 $g(x)$ 的第一类间断点,排除(B).

故选(D).

此法称作排除法. 通过验证或用举出特例或反例的方法排除四个预选项中的三项,剩下的一项必定是正确项.

选择题通常就采用直接法、验证法、排除法、图解法来选择正确的选项,有时也可以把几种方法结合起来使用.

10. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,2)$,则 $h(x)=f(x)+f(x+a)(a\neq 0)$ 的定义域为(　).

(A) $(0,2-a)$　　　　　　(B) $(-a,2)$

(C) $(0,2)\cap(-a,2-a)$　　　(D) $(0,2)\cup(-a,2-a)$

解:用直接法. 记 $g(x)=f(x+a)$,$h(x)=f(x)+g(x)$. 由 $f(x)$ 的定义域为 $(0,2)$,知 $g(x)$ 的定义域为 $(-a,2-a)$,从而 $h(x)$ 的定义域应是 $f(x)$,$g(x)$ 的定义域的公共部分,选(C).

(如果 $0<a<2$,则 $h(x)$ 的定义域是(A) $(0,2-a)$;如果 $-2<a<0$,则 $h(x)$ 的定义域是(B) $(-a,2)$;如果 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -2$,则 $h(x)$ 的定义域是空集 $\varnothing$. 现在 $a\neq 0$,故 $h(x)$ 的定义域只能以 $(0,2)$ 与 $(-a,2-a)$ 的交表示.)

11. $x\to 0^+$ 时,$\cos x-\cos\sqrt{x}$ 是 x 的(　).

(A) 低阶无穷小量　　　　　(B) 高阶无穷小量

(C) 同阶但非等价的无穷小量　　(D) 等价无穷小量

分析:按低阶、高阶、同阶、等价无穷小量的定义应考察极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x-\cos\sqrt{x}}{x}$ 是 ∞ 还是 0 或 $A(A\neq 0,A\neq 1)$ 或 1.

解:用直接法. 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\cos x-1)+(1-\cos\sqrt{x})}{x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2/2}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x})^2/2}{x}=\frac{1}{2},$$

故 $\cos x-\cos\sqrt{x}=O(x)(x\to 0^+)$，选(C).

12. 如果当 $x\to 0$ 时，$e^x-\dfrac{ax+1}{bx+1}=o(x^2)$，则(　).

(A)$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2}$　　　(B)$a=-\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{2}$

(C)$a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{2}$　　　(D)$a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2}$

分析：$e^x-\dfrac{ax+1}{bx+1}=o(x^2)(x\to 0)$ 表示 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-\dfrac{ax+1}{bx+1}\right)/x^2=0$，故应从此极限等于零来确定 a,b.

解：用直接法．由条件知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-\dfrac{ax+1}{bx+1}\right)/x^2=0$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{(bx+1)e^x-(ax+1)}{x^2(bx+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[(be^x-a)+\frac{e^x-1}{x}\right]=0, \qquad (*)$$

可知 $\lim\limits_{x\to 0}[be^x-a)+\dfrac{e^x-1}{x}]=0$，$a=\lim\limits_{x\to 0}(be^x+\dfrac{e^x-1}{x})=b+1$，代入(*)式，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[(be^x-b-1)+\frac{e^x-1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{b(e^x-1)}{x}+\frac{e^x-1-x}{x^2}\right]=0,$$

知　$$b=-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=-\frac{1}{2}$$

(最后一步用洛必大法则)．所以 $a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{2}$，选(C).

13. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x-1}}}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的(　)型间断点.

(A) 跳跃型　(B) 振荡型　(C) 无穷型　(D) 可去型

解：用直接法．考察 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左、右极限．因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x-1}}}=\lim_{t\to -\infty}\frac{1}{1-e^t}=1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x-1}}}=\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{1-e^t}=0,$$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ 均存在但不相等，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃型间断点，选(A).

求极限特别是求未定型极限是考题中必然会遇到的内容．未定型极限主要指 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，$0\cdot\infty$ 以及 1^∞，∞^0，0^0 等几种类型的极限.