

5336

高等学校教学用书

量子力学原理

上册

Д. И. 布洛欣采夫著

高等教育出版社

高等学校教学用书



量子力学原理

上册

Д. И. 布洛欣采夫著
叶蕴理 金星南译

高等教育出版社

本書系根据苏联國立科學技術理論書籍出版社(Гостехиздат)出版的布洛欣采夫(Д. И. Блохинцев)所著的量子力學原理(Основы квантовой механики) 1949 年版譯出的。原書經苏联高等教育部審定為大學參考書。

本書限於討論非相對論量子力學，前面敘述量子力學的基礎及數學形式，後面列舉非相對論量子力學在各方面的應用，由叶蘊理、金星南二位同志合譯，分上下兩冊出版。

本書原由商務印書館出版，自 1956 年 5 月起改由本社出版。

量 子 力 學 原 理

上 冊

Д. И. 布洛欣采夫著

叶蘊理，金星南譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

蔚文印刷廠印刷 新華書店總經售

書號 637(課 529) 開本 850×1168 1/32 印張 8 10/16 字數 230,000

一九五六年五月上海第一版

一九五六年五月上海第一次印刷

印數 1-13,000

定價(8) 半 1.00

軍

第二版導言

这本“量子力學原理”的第二版，正如第一版（在 1944 年出版的“量子力學導論”），基本上是根据著者在以罗蒙諾索夫命名的國立莫斯科大學物理系多年授課的講義而編成的。

这講義的自然發展促使我在这第二版中做了許多修改和補充。

關於在量子力學中的态的概念以及關於測不准關係的討論的那一章曾經做了主要的修改，在这一版里說得更加清楚了。在这新版中也討論了量子力學的方法論的問題，並批判了現在國外流行着的量子理論的唯心觀念。此外，还增加了一些關於近年來量子力學应用的進一步發展的內容。

有如在第一版中一样，在这書中我企圖使初學量子力學者對於這門科學的物理基礎和數學工具有正确的了解，並且从這門科學的主要应用方面來說明它的成就。

和我在一起工作的同志們所提出的許多寶貴意見，使本書有很多改進，我向他們致十二分的謝意；我特別要向德拉平娜（С. И. Драбина）、馬尔科夫（М. А. Марков）、苏科洛夫（А. А. Соколов）、苏伏洛夫（С. Г. Суворов）、費恩貝格（Е. А. Фейнберг）致謝。莫斯科大學哲學討論會上的討論和苏联科學院理論物理研究所內的討論，使本書最后一章的完成，得到很大的幫助。

我还要向莫斯科大學物理系學生們致謝，他們曾協助修正第一版的誤刊和其它錯誤的地方。

上册目錄

第二版導言

緒論	1
第一章 量子理論的基礎	4
§ 1. 光量子的能量和冲量	4
§ 2. 光量子的能量守恒定律和冲量守恒定律在实验上的証明	7
§ 3. 原子性	12
§ 4. 波尔理論	17
§ 5. 辐射的初步量子理論	19
§ 6. 黑体辐射	24
§ 7. 德波洛利波 羣速度	25
§ 8. 电子、原子、分子的繞射	31
第二章 量子力學的基礎	36
§ 9. 德波洛利波的統計解釋	36
§ 10. 微觀粒子的位置的几率	39
§ 11. 态的疊加原理	41
§ 12. 微觀粒子的冲量的几率	43
§ 13. 坐标的函數和冲量的函數的平均值	46
§ 14. 量子力學的統計系統	47
§ 15. 測不准關係	52
§ 16. 對於測不准關係的引証	59
§ 17. 測量儀器的作用	66
第三章 力學量用算符的表示	73
§ 18. 線型自輓算符	73
§ 19. 數量的平均值和平均平方差的普遍公式	78
§ 20. 算符的本征值和本征函數以及它們的物理意义。“量子化”	79
§ 21. 本征函數的基本性質	83
§ 22. 測量結果的几率的普遍計算法	87

(3)

1463566

§ 23. 各种力學量可以同時測量的条件	91
§ 24. 微觀粒子的坐标算符和冲量算符	92
§ 25. 微觀粒子的冲量矩算符	94
§ 26. 能量算符与哈密頓函数	99
§ 27. 哈密頓算符	101
第四章 态在時間上的改變	106
§ 28. 薛定格方程	106
§ 29. 粒子數目的守恒	111
§ 30. 定态	115
第五章 力學量在時間上的改變	118
§ 31. 算符對於時間的導數	118
§ 32. 量子力學中的運動方程, 恩費斯脫定理	121
§ 33. 運動積分	124
第六章 量子力學对古典力學和光學的關係	127
§ 34. 从量子方程到牛頓方程	127
§ 35. 从含有時間的薛定格方程到古典的哈密頓-雅可俾方程	132
§ 36. 量子力學与光學	136
第七章 表象的基本理論	141
§ 37. 量子体系的态的各种表象	141
§ 38. 表明力學量的算符的各种表象, 矩陣	143
§ 39. 矩陣和對於它們的演算	146
§ 40. 在矩陣形式下的算符所表示的數量的平均值和譜的定义	151
§ 41. 在矩陣形式下的薛定格方程和算符對於時間的關係	154
§ 42. 么正變換	158
§ 43. 从一時間到另一時間的么正變換	160
§ 44. 密度矩陣	162
第八章 在势能場中微觀粒子的運動理論	166
§ 45. 前言	166
§ 46. 諧振子	167
§ 47. 在能量表象中的振子	174
§ 48. 在有心力場中的運動	177
§ 49. 在庫倫場中的運動	185

§ 50. 氢原子的光譜和波函數·····	191
§ 51. 在單价原子中电子的運動·····	200
§ 52. 原子中的电流 磁子·····	204
§ 53. 二原子分子的量子能級·····	206
§ 54. 在週期場中电子的運動·····	214
第九章 帶电微觀粒子在电磁場中的運動·····	225
§ 55. 任意电磁場·····	225
§ 56. 在均匀磁場中帶电自由粒子的運動·····	231
第十章 电子的本征力矩和磁矩(自旋)·····	235
§ 57. 實驗証明电子自旋的存在·····	235
§ 58. 电子的自旋算符·····	238
§ 59. 自旋函數·····	242
§ 60. 泡利方程·····	246
§ 61. 光譜線在磁場中的分裂·····	249
§ 62. 在可變磁場中的自旋運動·····	254
§ 63. 總冲量矩的性質·····	258
§ 64. 考慮电子自旋時原子光譜項的編序 光譜的多重結構·····	263

緒 論

近數十年來，原子現象的科學不但在近代物理學中成為重要的一章，並且在近代技術中也獲得廣大的應用。

就最表面地來看這特別的原子現象的領域，已經可以發現新的特點，這種特點和在宏觀世界領域內所看到的特點有本質上的區別。

我們首先在微觀世界中所碰到的是原子性。簡單的基本粒子完全由一定的特征（如電荷、質量等）標記着，凡是同樣的粒子所有的這些特征都是相同的。

像這樣的原子性在宏觀世界中是不存在的。宏觀物體是許許多多基本粒子的集合。宏觀現象的規律也就是許許多多粒子的集合所特有的規律。

這些都指明假使用研究宏觀物體的類似方式來研究微觀粒子，那就要犯方法論的錯誤。在古典力學中的物質點是具有抽象的、理想的形態，這完全不是微觀粒子，而是宏觀物體，它的大小與在問題中所涉及的距离來比要小得多。

微觀世界的原子性不僅在於微觀粒子有一定的特征，它同時也由力學運動的某種絕對度量的存在表現出來。這種度量就是普朗克常數 $h = 1.05 \times 10^{-27}$ 爾格-秒。這常數在微觀粒子的力學中具有頭等重要的意義。物理學家久已疏忽了由量變到質變的規律，並且企圖把原子現象的觀念保留在古典宏觀理論的範疇中。普朗克常數的發現是第一次嚴重地警告說：把宏觀領域中的定律機械地搬到微觀領域中去是沒有根據的。

在本世紀的二十年代發現了許多新奇的實驗事實，這些事實迫得

人們徹底放棄了這條路徑。曾經指明的是電子表現着波動特性：如果電子束通過晶体，於是這些粒子在屏上面的分佈好像具有適當波長的波的強度的分佈。我們得到在古典力學中所沒有的微觀粒子的繞射^①現象。後來又証明了這種現象不但為電子所具有，而普遍地為其它一切粒子所具有。這樣，就發現了一種原則上新穎的並十分普遍的規律。

微觀粒子的運動在很多方面看起來與波的運動較近，而與質點沿軌道的運動較遠。繞射現象和粒子沿軌道運動的假定是根本不相容的。在古典力學中軌道概念是基本觀念之一，所以用古典力學的原理來分析微觀粒子的運動是不適當的。

對於微觀世界的個體應用“粒子”這名詞時，使我們要聯想到這種粒子與古典力學的物質點之間的相似性，但要知道實際上它們之間是差得很遠的。

在本書中許多地方，我們為簡單起見用“粒子”來代替“微觀粒子”，那時必須注意上面的說明。

古典力學只是某種近似，它適於研究質量大的物體在變化很小的場（宏觀場）中的運動。在這些條件下，普朗克常數沒有重要性：可以認為它是小得可以忽去。繞射現象也變成不主要。在尺度小的領域內（在微觀世界的領域內），量子力學代替古典力學。這樣，微觀粒子的運動是量子力學所研究的對象。

量子力學是統計的理論。例如利用量子力學可以預言從晶体反射到照相板上的電子平均地是怎樣分佈的，但是對於每一個個別電子所射到的位置，則只能給出几率性的判斷：“某處發現這電子的几率若干”。

這和我們在統計力學中所碰到的情況相似。但是量子力學和古典統計力學之間還有深刻的差別。

① 我國現有人把“繞射”改稱“衍射”。

古典統計力學是建立在牛頓力學的基礎上的。牛頓力學可以描述每一顆粒子的歷史，以致原則上可以給出每一個個別樣品的歷程。

和統計力學相反，近代量子力學不是建立在任何個體的微觀過程的理論上的。它一開始就和統計集合——系綜——打交道。這些統計系綜是用宏觀的古典物理學的特征（如沖量、能量、坐標等）來確定的。所以在量子力學中說到微觀現象再發生，例如同一實驗的重複，那就指微觀物理現象的宏觀條件的再產生，即指同樣的統計系綜的實現。

因此量子力學是在微觀粒子對於宏觀測量儀器的關係上來研究微觀粒子的統計系綜。用這些宏觀測量儀器可以確定所謂“粒子的態”，即固定統計系綜。

在上述所提的問題的範圍內，量子力學是在二十世紀原子物理學發展中的巨大成就；現在原子物理學已經超出物理學的界限而蹈進新的工程技術的領域內了。

第一章 量子理論的基礎

§ 1. 光量子的能量和冲量

光的量子理論的產生是先於量子力學的發展。在上世紀末，好像對於光的本質有兩種觀點的爭論：微粒觀點和波動觀點的爭論，最后波動觀點在麥克斯韋 (Maxwell) 理論所賦予的形式下獲得了勝利。關於電磁波的赫茲 (Hertz) 實驗，列別捷夫 (Лебедев) 的光壓存在的証明，以及由於實驗物理學家的實驗所得到的其它事實，顯然無可爭辯地証明了麥克斯韋的觀點的正確性。

但是光的電磁理論的成就不是沒有缺點的。雖然所有關於光的傳播的問題可用波動理論成功地解決了，但是一系列關於光的發射和吸收的重要現象，則在波動觀念的范疇內不能直接說明。例如，雖然經過許多理論物理學家的努力，在波動理論的基礎上所推得的黑體輻射譜的能量分佈規律，不但結果和實驗顯著地不符合，並且還有內在矛盾。

在 1901 年普朗克 (Planck) 找得了與實驗相符合的在熱平衡下絕對黑體輻射譜的能量分佈規律。這個規律是量子理論發展的出發點。這個規律的基礎是假定物質發出光和吸收光具有不連續的特性，並且假定光成為一個一個有限部分——光量子——發出或吸收。

這種光量子的能量 ε 是和光的振動頻率 ω 成正比的，並且可用下列等式表示：

$$\varepsilon = h\omega. \quad (1.1)$$

這裡 $h = 1.05 \times 10^{-27}$ 爾格-秒是大家所知道的普朗克常數^①。

① 在舊的文獻中所用的普朗克常數 h 常比這值大 2π 倍，即 6.61×10^{-27} 爾格-秒，並且用頻率 $\nu = \frac{1}{T}$ 來代替旋轉頻率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T —振動週期)。這裡的常數在舊文獻中是用 $\hbar$ 來表示的。

当爱因斯坦 (Einstein) 指出了除能量 ε 外必需还要用冲量 $p = \frac{\varepsilon}{c}$ (这冲量的方向和光的传播方向相符合) 来描述光量子后, 光量子的表示才得到完善的形式。

如果引入波矢量 $\mathbf{k}$, 它的分量等於:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma,$$

式中 λ 是波長, 而 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是光波的法線的方向余弦, 於是光量子的冲量的公式可以寫为矢量形式:

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}. \quad (1.2)$$

公式 (1.1) 和 (1.2) 是光的量子理論的基本方程, 这二个方程把光量子的能量 ε 和冲量 $\mathbf{p}$ 同單色平面波的頻率 ω 和波長 λ 联系起來, 而这單色平面波的傳播方向是由向量 $\mathbf{k}$ 決定的^①。

光的量子理論的深刻意义不是在於我們把光当做由具有能量 $\hbar\omega$ 和冲量 $\hbar\mathbf{k}$ 的粒子所組成的气体 (这种表示由於它的明顯性來說是有用的, 但是片面的), 而是在於微观体系 (电子、原子、分子等等) 和光之間的能量交換与冲量交換是由一种光量子的產生与另一种光量子的消滅的方式進行的。

在對於光 (正确地說, 一般對於任何电磁輻射) 作用的任何体系上应用能量与冲量守恆定律時, 这种看法得到正确的表現。为了明确起見, 我們將更具体地称为“碰撞”來代替相互作用。

我們用 E 和 $\mathbf{P}$ 表示某体系在“碰撞”前的能量和冲量, 又用 E' 和 $\mathbf{P}'$ 表示这体系在“碰撞”后的能量和冲量; 其次用 $\hbar\omega$ 和 $\hbar\mathbf{k}$ 表示光量子在“碰撞”前的能量和冲量, 用 $\hbar\omega'$ 和 $\hbar\mathbf{k}'$ 表示光量子在“碰撞”后的能量和冲量。

这里“碰撞”这个名詞的正确意义是这样的: 在相互作用的結果下,

① 公式 (1.1) 与 (1.2) 是假定對於任何頻率 ω 都適合的; 它們對於可見光和 γ 射線都是同样適合的。所以現在對於光量子, γ 射線量子等等都簡称为“光子”。

具有頻率 ω 和方向 $\mathbf{k}$ 的电磁波的能量和冲量各減少 $\hbar\omega$ 和 $\hbar\mathbf{k}$ (光量子的消滅), 但另一种具有頻率 ω' 和方向 $\mathbf{k}'$ 的电磁波的能量和冲量各增加 $\hbar\omega'$ 和 $\hbar\mathbf{k}'$ (光量子的產生)。在形式上我們就說, 光量子 ($\hbar\omega$, $\hbar\mathbf{k}$) 和体系“碰撞”, 並改變了它的能量和冲量 ($\hbar\omega'$, $\hbar\mathbf{k}'$), 正好像我們在說古典粒子的碰撞一样。

在我們所採用的標記下, 能量守恆定律和冲量守恆定律可表示如下:

$$\hbar\omega + E = \hbar\omega' + E' \quad (1.3)$$

$$\hbar\mathbf{k} + \mathbf{P} = \hbar\mathbf{k}' + \mathbf{P}' \quad (1.4)$$

这二方程包含一共三种基本过程: 光的吸收、輻射、散射。

如果 $\omega' = 0$ (於是 $\mathbf{k}' = 0$), 則方程(1.3)与(1.4)表示光量子 $\hbar\omega$ 的吸收; 如果 $\omega = 0$ ($\mathbf{k} = 0$), 則这些方程決定光量子 $\hbar\omega'$ 的輻射。

如果 ω 和 ω' 都不等於零, 則这些方程是關於光的散射的; 這時量子 $\hbar\omega$, $\hbar\mathbf{k}$ 變成另一种能量为 $\hbar\omega'$ 和冲量为 $\hbar\mathbf{k}'$ 的量子。

在公式(1.3)与(1.4)下的能量守恆定律和冲量守恆定律, 与光的波動觀念又和光的微粒觀念都有矛盾, 而一般地, 这些定律不能放在古典物理學的觀念的范疇中來說明的。

按照波動理論, 波場的能量不是由波的頻率 ω 來确定的, 而是由形成这場的波的振幅來确定的。在另一方面, 波的振幅和振動頻率之間沒有任何普遍關係, 这种關係把个别量子的能量和波的振幅联系起来。假定一光束在它的路徑上遇到一透明薄板。一部分光被它反射, 一部分光透过它。按照波動理論, 入射波、透射波和反射波的振幅將不同。如果現在我們不問量子的能量 ε 和波的振幅的联系怎样, 我們能夠得到这样的結論: 量子的能量在这三光束中是不相同的。但是依照(1.1), 不改變光的頻率就不可能改變量子的能量: 一部分量子常“染”成与原來量子不同的顏色。

所以我們如果假定量子的能量是由振幅所确定的, 那末从这假定

就要得出这样的结论：入射光束，反射光束，透射光束的颜色要不同了。但实际上当光通过透明体时，人们得不到这样的结果。

这样的假定也是不适当的：光量子是在空间某处的粒子，类似某种“浮”在波上的东西。

光量子按照它的定义[方程(1.1)和(1.2)]是和单色平面波联系起来的。这种波是在空间上和在时间上的无穷简单周期过程。但是量子在任何地方可以找到的假定是和波的彻底的周期性相矛盾：正弦波一经某种变形，它就不再是一种正弦波，而是各种正弦波的集合。

因此，当应用守恒定律(1.3)与(1.4)时，我们应该了解到古典观念对于表示在原子世界中存在的现象是不足够的。我们不可能在这里叙述这些守恒定律的近代解释。那里我们要碰到比本书的对象(粒子体系的量子力学)更复杂(场的量子理论)的问题。在守恒定律(1.3)与(1.4)所规定的范围内来考虑光量子的观念，对于我们来说，将是足够的了。

§ 2. 光量子的能量守恒定律和冲量 守恒定律在实验上的证明

爱因斯坦曾指出过，守恒定律(1.3)可以用来解释古典观念所不能了解的光电效应的规律。这效应的本质是这样的：当金属表面受到了光的作用，电子就由金属发出^①。

这里所观察到的规律不符合于古典的解释。实验证明，光电子的速度只与光的频率 ω （对于某一种金属来说）有关，而与入射光的强度完全没有关系。后者只决定在单位时间内由金属发出的电子的数目。

对于这现象的模型，无论考虑得怎样周密；但电子速度的增加按照牛顿定律是与作用力成正比的。这作用力等于电子的电荷 e 与光波的

① 光电效应的规律曾由斯托莱托夫(A. T. Crozerov)、哈尔瓦克斯(W. Hallowacks)、李奇(A. Rigi)等研究过。

電場強度 $\mathcal{E}$ 的乘積(光波的磁場作用可以忽去)。所以电子所獲得的速度應與 $\mathcal{E}$ 成正比,而動能則與 $\mathcal{E}^2$ 成正比,即與光的強度成正比。但實際上所觀察到的並不是這樣。越非 (Иоффе) 與杜波隆拉瓦夫 (Добронравов) ① 指出當光的強度微弱的時候,也能觀察到光電效應,並且指出电子是按照統計規律由金屬射出,只是电子的平均數目與入射光束的強度成正比。特別重要的是密立根 (R. A. Millikan) 的實驗結果,這結果嚴格地指出,在光電效應中所放出的电子的能量完全由光的頻率決定,而不是由它的強度決定的。

但是如果把能量守恆定律(1.3)應用於光電效應上,則這結果成為很明顯的。假定頻率為 ω 的單色光照在金屬的表面上。因為把电子從金屬中取出來要耗費一定量的功,如果我們用 χ 來表示這功(人們稱它為從金屬中取出电子的功),於是电子在金屬中的原始能量應認為等於 $-\chi$ 。在光電效應下光子完全被吸收,即 $h\omega' = 0$ 。吸收光子後的电子的能量 E 等於 $\frac{1}{2} m_0 v^2$, 其中 m_0 是电子的質量,而 v 是电子從金屬中放出時的速度。結果,方程(1.3)在我們所考慮的情況下取這種形式②:

$$h\omega - \chi = \frac{m_0 v^2}{2}. \quad (2.1)$$

這就是著名的愛因斯坦的光電效應方程。

依照這方程,光电子的能量 $\frac{m_0 v^2}{2}$ 與光的頻率 ω 呈線性的增加。如果用控制電勢 V 來測量电子的能量,則 $eV = \frac{1}{2} m_0 v^2$ (有如密立根曾做的那樣),於是在圖 (V, ω) 中的直線的斜度可以決定數值 $\frac{h}{e}$ 。既知電荷 e , 從實驗決定斜度後,可以求出 h 。密立根曾指出這 h 的值與在

① 參考 П. С. Тартаковский, Кванты света, ГИЗ, 1928。

② 在這情況下,方程(1.4)沒有意義,因為它簡單地證明,光量子的沖量將全部傳給金屬塊。

黑体辐射理论中所得到的值相同。因此证明了把方程 (1.3) 应用在光电效应上的正确性。

现在爱因斯坦方程是奠定电子仪器理论基础的基本方程之一^①。

方程 (1.3) 与 (1.4) 在实验上曾由康普顿 (Compton) 研究散射着的 X 射线的频率与散射角的关系所证明。康普顿取电子对原子结合得很弱的物质 (白蜡、石墨) 作为散射光的物质。因为 X 射线的量子能量很大, 所以在计算时可以忽略电子在原子中的能量 (至少对于原子最外层的电子可以这样考虑), 而把电子当做自由的静止粒子。由于这点, 我们把电子的原始能量 E 与它的冲量 $\mathbf{P}$ 可认为等于零。

电子和 X 射线的量子碰撞后, 它的能量可以变为很大, 所以我们要用相对论公式, 这些公式考虑粒子的质量与它的速度的关系。根据相对论, 具有速度 $\mathbf{v}$ 而运动的电子的动能是等于

$$E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2, \quad (2.2)$$

其中 m_0 是电子的静止质量, c 为光速, 而冲量等于

$$\mathbf{P}' = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.3)$$

把这些数值代入 (1.3) 与 (1.4), 并注意 $E=0$, $\mathbf{P}=0$, 我们得到

$$h\omega = h\omega' + m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right], \quad (2.4)$$

$$h\mathbf{k} = h\mathbf{k}' + \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (2.4')$$

此处 ω 与 $\mathbf{k}$ 是入射辐射的频率和波矢量, 而 ω' 与 $\mathbf{k}'$ 是散射辐射的频

^① 密立根的实验的详细情况可参阅 Harnwell and Livingood, *Experimental Atomic Physics*, 1936, §75; П. С. Тартаковский, *Кванты света ГИЗ*, 1928; R. A. Millikan, *Electrons (+ and -), Protons, Photons, Neutrons, Mesotrons and Cosmic rays* (1947)。

率 and 波矢量。

由第一个方程可直接得出 $\omega > \omega'$ 。由此可見散射辐射的波長比入射辐射的波長大。这結論是由康普頓的實驗所証实的,可是照古典理論散射光的頻率必須与入射光的頻率相等(瑞利散射)。

由方程(2.4)与(2.4')引出一个重要的結論:自由电子不能吸收光而只能散射光。实际上,完全吸收就是 $\omega' = 0$ (和 $k' = 0$)。於是由(2.4')得出 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{v}$ 是同一方向的。所以(2.4)可以寫成标量形式:

$$hk = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

把这方程和方程(2.4)合起来,對於光的吸收,我們得到:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

由此 $\beta = 0$, 並推得 $k = 0$ 。从這點就証明吸收是不可能的。

在上面所考慮的光电效应中,量子整个地吸收,光电效应只是可能由於这个原因:电子与金屬結合着,要把它取出来必須要耗費功 χ 。

为了要能証实方程(2.4),問題提在康普頓面前的是从这些方程決定散射光的頻率 ω' 与散射角 θ 的關係。在圖一中,直線 OA 表示原始 X 射線的傳播方向。方向 OC 为观察被电子所散射的光線的方向。圖一中所划的平行四边形表示入射量子的冲量 $h\mathbf{k}$ 是散射量子的冲量 $h\mathbf{k}'$ 和电子的冲量 $\mathbf{P}'$ 之和。角 θ 是散射角,而角 α 是原始量子的冲量和碰撞后的电子(即所謂“反冲电子”)的冲量之間的角度。要求出角 θ 与散射量子之值 $h\omega'$ 之間的關係,我們可取方程(2.4)在兩個互相正交軸 OA 与 OB 上的投射。注意 $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$, 而 $|\mathbf{k}'| = \frac{\omega'}{c}$ 我們求得:

$$\frac{h\omega}{c} = \frac{h\omega'}{c} \cos \theta + \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos \alpha,$$

$$0 = \frac{h\omega'}{c} \sin \theta - \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sin \alpha.$$

用簡單的代數方法,从这些方程可以把 β 与角 α 消去,而得到

$$\omega - \omega' = \frac{2h}{m_0 c^2} \omega \omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$