数理逻辑

俞瑞钊 编著

浙江大学出版社

内 容 简 介

数理逻辑是从事计算机工作的重要基础。

本书内容主要包括命题演算，谓词演算以及与计算机直接相关的归结原理、人工智能语言 Prolog，另外还有递归函数（包括符号集上的递归函数），整个内容既注意严格性与系统性，又特别注意与计算机科学技术的结合。

全书取材理论与技术结合，叙述简明，适合作为计算机专业及有关专业的教材，也可供有关专业的科技人员参考。

数 理 逻 辑

俞瑞钊 编著

责任编辑 傅百荣

•

浙江大学出版社出版

德清雷甸印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

•

开本：850×1168 1/32 印张：9.3125 字数：233千字

1990年11月第1版 1990年11月第1次印刷

印数 0001—3000

ISBN 7—308—00486—4

O·072 定价：2.45元

前　　言

数理逻辑与计算机科学技术有着密不可分的关系，是计算机科学理论的重要基础，对计算机科学与技术的发展起了很大的作用。而今，计算机科学技术正蓬勃向前发展，数理逻辑在其过程中，将焕发出新的生命力。

本书是作者多年来为计算机专业本科生开设数理逻辑课的基础上编撰而成的。在取材方面，既注意了数理逻辑本身的系统性、严格性；同时又十分注意与计算机科学技术的结合，这一方面体现在内容的选择上，另一方面又体现在讲法上，注重计算机技术的需要和特点。

"数理逻辑"是以计算机及有关专业的教材为目标编写的，主要讲解与计算机科学技术关系密切的谓词演算及递归函数论。在谓词演算部分，除了包括一阶逻辑的基本内容外，还包括了定理证明中的归结方法、人工智能语言Prolog等，在递归函数中，主要讲述原始递归函数，还介绍一般递归函数及递归字函数。

整个内容取舍和讲法有其明显的特点，可作为计算机及有关专业的学生的教材，也可作为有关专业的科技工作者参考。

由于作者水平和写作时间限制，书中难免有不足之处，恳请读者批评指正。

作　者

1990年7月于求是园

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

第一章　绪　论

§1　形式系统

数学的发展，逻辑学的发展，是一个公理化、形式化的过程，而所谓形式系统就是完全形式化的公理系统。

欧几里得的“几何原本”已是公理化的几何学，它从初始概念和公理出发，通过演绎推理，逐步展开，推导证明了大量的定理，构成了一个几何体系，称为公理几何学。在公理几何学中公理的真实性是以直观为基础的，是明显而直接的，故有时也称为直观公理几何学。公理几何学的发展，导致希尔伯特“几何基础”的诞生，此时不仅仅公理化，而且还形式化了，因此是一个形式的公理系统。形式公理系统较之直观的公理系统，有其自身的明显特征，主要就是选择作为公理的命题必须能够充分地确定所要处理的对象及其性质和关系，但不要求直观自明，并要满足不会引导出逻辑矛盾，其次是在形式公理系统中，要求除了已给定的公理和已经证明的定理之外，在证明过程中，不得不自觉地附加上其它前提，而且要求推理所遵循的规则也必须十分明确地给定，任何一步推导，都要按给定的规则进行。

近似代数的发展，数学分析的发展，也都走了一条公理化，形式化的道路。

那么，什么是形式系统的一般结构呢？从语法上讲，一个形式系统由四部分组成：

（1）系统符号——规定系统允许使用的符号；

（2）形成规则——规定符号连接成合法序列的规则；

（3）初始公式——即公理，是无需证明的合法序列；

（4）推理规则——说明对系统中的合法序列可以进行一些什么样的处理，以使一个合法序列演变为另一个合法序列。

形式系统中的定理，是一个系统中的合法序列，该合法序列可以由系统的公理出发，严格地利用形式系统中允许使用的推理规则逐步演变得到。

形式系统中的符号及其序列在一个具体问题领域中的意义，叫做它的一个解释，这是一个形式系统的语义。

下面举一个简单例子说明一下：

例 pq 系统

系统符号——p，q，—；

公式（形成规则）——p,q,—组成的任意符号串；

公理——xp—qx—，其中x表示若干个符号“—”组成的串；

变形规则——xpyqz→xpy—qz—，其中x，y，z均表示由“—”组成的串，“→”表示允许从它左边的符号串演变为它右边的符号串。

这样，我们就构造了一个形式系统——pq系统，在这个系统中，我们可以证明很多定理，如可以证明-p---q----是定理。这可以由公理出发，构造一个利用变形规则逐步演变到-p---q----的过程（该过程叫做证明）如下：

-p-q--

-p--q---

-p---q----

对于该形式系统，可有不同的解释，一种解释为：

e(p)：+

$e(q)$: =

$e(-)$: 1

$e(-^n)$: n

其中$e(x)$表示"x的解释为"，$-^n$表示n个－组成的串，这样公理的意义为：

$$x+1=x+1$$

而推理规则的意义为：若$x+y=z$，则$x+(y+1)=(z+1)$。

对于这个同样的形式系统，可有另外的不同解释，如

$e(p)$: =

$e(q)$: 从…减去

$e(-)$:1

$e(-^n)$:n

此时，公理表示

$$(x+1)-1=x$$

推理规则表示，若$z-y=x$，则$(z+1)-(y+1)=x$。

从中我们可以看到，形式系统是抛开具体符号的意义，将客观存在的同构的事物，加以一般化抽象描述。这是一种很重要的方法，数学中是这样，逻辑学中也是这样。

对于计算机而言，要计算机解决问题，就是编制程序，不论是数字的或是非数字的，它实际上都是在一步一步地进行有限符号集上(数字也是符号)的有限符号序列的形式变换，从初始符号串按照一定的规则，转化为目标符号串。因此，任何问题要交给计算机去解，实际上都是基于某个形式系统，只不过是显式或隐式罢了。

§2 逻辑的形式化

传统的形式逻辑始于古希腊的亚里士多德，至今，已有2300多年的历史，形式逻辑研究的是人类思维的形式与规律，包括概念，作为思维结构的判断、思维规律及推理等，其中核心是推理的规则，即形式逻辑的主要任务是研究正确的思维规律、推理规则。这里，特别要注意的是，涉及的推理规则是形式推理规则，它不研究前提与结论的内容本身，而是研究前提与结论的形式关系。

如在下例中：

闭区间上连续函数都有最大值，

sin x在闭区间$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上是连续的，

所以，

sin x在$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上有最大值

这里，结论与两个前提之间的关系，是具体的数学上的关系，它的正确与否完全由数学本身去研究。抛开上述具体内容，有形式逻辑中的直言三段论，即

所有的A有B

a是A

则　a有B

此时，不涉及a、A、B的具体内容，它们可以赋于任何其他的内容。这样的形式推理规则是形式逻辑中所允许的正确的推理规则。

再如，在数学上有关系

a是偶数或a是奇数

a 不是偶数

则　a 是奇数

在形式逻辑中，对应的有选言三段论：

A 或者 B

不是 A

则　B

在形式逻辑中，虽然研究的是形式的思维规律和推理规则，但它是采用自然语言来描述的，并且没有一个严格的体系。

数理逻辑也称为符号逻辑，是把数学上的形式化方法用到逻辑学上的结果，是用数学方法去研究演绎方法的科学。按照这种方法，用一套人工符号语言，表达思维的逻辑结构和推理规则，从而把对思维的研究转化为对符号的研究，这种方法摆脱了自然语言的局限，人们的思维推理规则能够在逻辑的形式系统中推导出来，犹如算术和代数那样构成严格准确的演算，因此，从这一点讲，数理逻辑是传统逻辑的新发展，是形式逻辑的精确表达。

数理逻辑的创始人，德国的著名数学家莱不尼兹曾明确地提出数理逻辑的指导思想，并且做了大量的工作。他指出："我们需要的是，它能使人们的推理不依赖于对推理过程中的命题的含义内容的思考，正象近代数学，使得广义的计算也可以不依赖于对计算中出现的符号的含义和内容的思考"。

对数理逻辑来讲，首先要构造一套人工的符号语言，或叫形式语言，这样，可以克服自然语言的含糊性，不一致性，以便使逻辑研究精确化。在形式语言中前述选言三段论表示为：

$$\frac{\begin{array}{l}A \vee B \\ \neg A\end{array}}{B}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

或者可简单地表示为：

$$A \vee B, \neg A \vdash B$$

而直言三段论则表示为：

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), A(a) \vdash B(a)$$

其次，在研究逻辑时，要把形式与内容分开，也就是说，数理逻辑不是研究具体内容之间的关系，而是形式的推理关系。

一般讲，讨论任何问题时，都要使用某种语言，而且，当讨论的对象也是语言时，就要涉及两种语言。其一是被讨论的语言，称之为对象语言，另一是用以进行讨论的语言，称之为元语言。例如，当我们用汉语来讨论英语时，那么英语是对象语言，而汉语则是元语言。在数理逻辑中，当讨论逻辑演算时，它的形式语言是一种对象语言，而讨论时还要用到汉语，故汉语对逻辑演算的形式语言而论是元语言。

和自然语言一样，形式语言也有它的语法和语义，语法涉及的是怎样由符号构成公式（即合法序列），它是纯形式的，与符号和由符号构成的公式的涵义没有关系，在形式系统中规定了系统符号及形成规则，也就完全确定了一个相应的语言。语义涉及的是给符号以某种解释以及在这种解释下公式所具有的涵义，语法和语义有区别又有联系。

在数理逻辑中就是使用形式系统来刻划形式语言及其上的变形规则（在逻辑中通常叫推理规则）。对数理逻辑而言，不仅仅把逻辑完全符号化，而且类似于直言三段论这样的思维形式推理关系，都可以在形式系统中推导出来。

下面我们再介绍几个形式系统中有关的概念：

在形式系统中，若不存在任何公式A，使得A和非A都是系统中的定理，则称这样的形式系统是一致的，或者说形式系

统具有一致性。一致性也叫无矛盾性。

在形式系统中，若对满足一定限制的任一公式A，或者A是系统中的定理，否则非A为系统的定理，则称这样的形式系统是完全的，或者说，系统具有完全性。

一致性和完全性是从语法角度反映一个形式系统的性质和功能的。

对逻辑演算的形式推理系统来说，就有可靠性与完备性问题。

如果在一个形式的推理系统中，凡推得的定理，都是逻辑上真的命题,或逻辑真命题,我们称这样的形式系统是可靠的。

如果逻辑真命题，都能在一个形式推理系统中作为定理导出，那么称这个形式系统是完备的。

可靠性与完备性是从语法和语义联系的角度去反映一个形式系统的性质和功能的。可靠性是逻辑演算系统性质优劣的反映，而完备性则是系统功能强弱的反映。

在谓词演算的形式推理系统中，如果证明序列中的每一步,都是由公理或推理规则得到,则这样的证明称为是有效的,有效证明得到的结论称为是有效的结论。

§3 数理逻辑的发展

用数学方法研究和处理传统形式逻辑，开始于17世纪的70年代，大家公认这一工作的创始人是莱不尼兹，他提出一个设想，希望能建立一套通用语言，并且要设计具有一套推理的普遍演算,以达到按规定的变换规则和运算规则,使逻辑能按确定的办法进行演算，虽然他最终没有实现这一目标，但他的思想是开创性的。到了19世纪，英国的布尔实现了这一设想，完成了第一个逻辑演算，即著名的布尔代数。

从19世纪80年代开始，人们把初等数论和集合论等方法运用到逻辑上，使数理逻辑取得较大的突破，完成了命题演算和谓词演算两个系统。1879年，德国逻辑学家弗雷格，构成了一个初步自足的逻辑演算系统，这是历史上第一个严格的关于逻辑规律的公理系统，到了20世纪初，英国著名的哲学家罗素，建立了一个完全的命题演算和谓词演算系统，对现代逻辑学的发展起了很大的推动作用。

从20世纪30年代开始，是数理逻辑蓬勃发展的时期，取得了许多重大的成就，其中包括哥德尔的完备性定理及不完全性定理，这些是非常深刻的，谓词演算中极为重要的结果。对哥德尔的多方面的成就，人们给予了极高的评价。1930年，在哥尼兹堡会议上，冯·诺依曼热情地说："哥德尔在数理逻辑方面的成就是优异的，不朽的，确实它不只是一座纪念碑，而是一座其意义由于受到时间、空间限制还远未显现的里程碑"。

哥德尔在1930年发表的"逻辑谓词演算公理的完备性"中，证明了谓词演算的完备性，他指出："狭谓词演算的每一个有效公式都可证"，这里的有效公式指的是逻辑真公式，也就是说，任何一个逻辑真公式都可以在谓词演算的形式系统中推导出来。由此，人们思维中所用的演绎推理规律，都可用数理逻辑采用的现代数学方法来刻划。

1931年，哥德尔又发表了重要论文："论数学原理和有关系统 I 的形式不可判定命题"，在该文中，哥德尔给出了著名的不完全性定理，该定理指出："任何包含初等数论的一致的形式系统都是不完全的"，也就是说，在包含初等数论的一致的形式系统中，存在一个命题A，该命题及它的否定命题都是不可证的，即都不是这个系统的定理。因此，在适当大的形式系统中，存在不可判定问题，这称为哥德尔第一定理。该定理的另一说法为："一个包含初等数论的形式系统的一致性，在

系统内是不可证明的”，这称为哥德尔第二定理，这意味着，即使是包含全部初等数论的系统，也不可能证明系统本身的一致性，即无矛盾性，这个结果对证明论的发展起着非常深刻的影响。

随着数理逻辑的发展，除了在逻辑演算方面出现一系列的新成果以外，还逐渐形成了它自己的其它四个方向，即公理集合论、证明论、模型论及递归论。

下面简单地说明一下数理逻辑研究的五个方向：

一、逻辑演算

包括命题演算及谓词演算，讨论纯逻辑概念及一般的推理规则。

二、公理集合论

是关于集合概念外延的逻辑理论，是对集合论所作的形式的公理化处理。

三、证明论

这是关于数学证明的理论，试图用元数学去研究一个数学形式系统的逻辑性质，论证某个数学形式系统的无矛盾性。

四、模型论

这是语义的理论，研究形式系统与其模型（满足一定条件的解释）之间的关系。

五、递归论

是关于可计算性及可判定性的理论。

上述五部分内容中，逻辑演算与递归论与计算机科学与技术有着紧密的关系，是计算机科学技术的重要基础，也是我们将在本书中详细讲述的内容。

第二章　命题逻辑

§1　命题及逻辑联结词

命题是能够判断真或假的陈述句。

“杭州是浙江省省会”是一个命题，并且它是真的。又如“4是素数”也是命题，但它是假的。命题的真假分别用t及f来表示，一命题的真或假称为命题的真假值。

假若给出下列语句：

（1）雪是白的。

（2）齐次线性方程组是无解的。

（3）他是工人。

（4）你复习完了吗？

（5）这句话是假的。

（6）18是6和3的公倍数。

（7）请坐汽车去！

我们容易看出，语句(1)、(2)、(6)都是命题，语句(3)只有明确他指的是谁以后，才是命题，语句(4)、(7)是疑问句和祈使句，它们不是命题。至于语句(5)，它的真假无法判断，是一个悖论，因而也不是命题。

通常用P、Q、R等表示命题，此时我们不涉及其具体涵义，它们可以表示值为真的命题，也可以表示值为假的命题。并将其称为原子命题。

一些命题可通过逻辑联结词组成新的命题，所得到的新命题的真假值完全由诸旧命题的真假值所决定。

常用的逻辑联结词有下列五个：

1、联结词“非”，记作“$\neg$”，一个命题P的非记作$\neg P$，联结词“非”表示否定的意思，新命题$\neg P$为真当且仅当P为假。

2、联结词“合取”，记作“$\wedge$”，它联结两个命题，设有命题P、Q，则新命题“P且Q”或写成“$P\wedge Q$”，其为真当且仅当P、Q皆为真。这里的“合取”与日常生活中的“并且”“不仅……而且……”相当，也相当于逻辑代数中“与”的关系。

3、联结词“析取”记作“$\vee$”，命题$P\vee Q$为假当且仅当P、Q均为假，或者说，$P\vee Q$为真当且仅当P、Q两者有一为真。这里的析取与逻辑代数的“或”意思一致。

4、联结词“蕴涵”，记作“$\rightarrow$”，“$P\rightarrow Q$”意接近于“如果P则Q”，$P\rightarrow Q$为假当且仅当P为真且Q为假。

5、联结词“等价”，记作“$\longleftrightarrow$”，$P\longleftrightarrow Q$为真当且仅当P、Q同时为真或者同时为假。

命题P、Q通过上述五个逻辑联结词得到的新命题的真值可用下表表示：

表 2.1.1

P	Q	$\neg P$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\rightarrow Q$	$P\longleftrightarrow Q$
f	f	t	f	f	t	t
f	t	t	f	t	t	f
t	f	f	f	t	f	f
t	t	f	t	t	t	t

若干原子命题通过联结词组成的新命题称为复合命题，此

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c