科學圖書大庫

微分積分學

譯　者　魏濟邦
校　閱　丁觀海教授
　　　　王釗誠博士
　　　　謝定裕博士

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

微分積分學

譯　者　魏　濟　邦

校　閱　王　觀　海　教　授

　　　　劉　　識　[illegible]

　　　　謝　定　裕　博　士

徐氏基金會出版

譯 者 序

德國歷經兩次大戰的浩刼，居然能在極短期間內由剝而復，再度地顯示她更爲嶄新的面貌，這固然是國民的奮發向上，「篳路藍縷，以啓山林」的精神有以致之。但是，若無雄厚的工業基礎，也不會恢復得如此迅速而踏實。然而，工業的基礎是以科學爲其源泉；而數學又爲科學之母。德國向以數學馳名於世界，由此我們深知數學所佔的地位是何等的重要。適値我國正努力發展科學之際，這不啻是一個頗具意義的啓示。

本書係由德國波昂大學教授FRIEDHELM ERWE 原作，西元1962年初版，西元1964年再版。嗣後又由英國倫敦大學B. Fisher譯成英文而於1967年出版。譯者再從英文本譯成中文，歷時一年始克藏蕆。個人深感譯書的確是一件難事，常人所說的「信」，「達」二字實在不是一蹴可幾的。

本書體裁的新穎，論證的精密，遠非坊間一些其他有關微積分的書籍可與之比擬。內容的廣泛：包括數學基礎，基本函數，線性代數，拓撲學及微分幾何。因此，讀者在閱讀本書時，難免要涉獵一些有關的書籍，以求進一步的瞭解。而本書的論述，由淺入深，陳義雖高，而所需的預備知識很少，實在是一本於基礎訓練中不可多得的書籍。至於更詳盡的內容介紹，則請看原序及導言。

書中數學名辭的中譯是參考兩本詞彙的：主要是現代書局的「數學名詞彙編」，其次爲國立編譯館編的「數學名詞」。另外有少數名詞遍尋不到譯名的，則祇得譯者自行逕譯了。

本書承蒙國立台灣大學土木工程學系系主任丁觀海教授，美國萊斯大學數學系教授王釗誠博士與美國布朗大學應用數學系教授謝定裕博士惠予校閱，譯者由衷感激。另外劉佳明老師及洪敏夫、周克魯、許建德、李小平諸位同學的寶貴意見及協助亦十分感謝。

這本書相當的厚，若有任何瑕疵及未盡事宜，尙請諸位數學先進及各方賢達之士惠予指正是幸！

魏濟邦　謹識於國立台灣大學
中華民國五十九年三月廿九日

德文初版序

大學數學發軔於解析幾何、線性代數與微積分學。而微積分學主要可分成微分學和積分學二部份，是研究其他數學的基礎與其他學科的工具，更爲數學應用者的基本探討對象。本書即爲微積分學的入門。在本書中所使用的數學方法均從基本導出，所以吾人所需要的預備知識很少。但是，當讀者研討前四章時，就必須對於解析幾何與線性代數有一[illegible]括的了解，而這些知識亦將應用於隨後的各章節之中。

爲了要保持這種袖珍版式*，吾人即採用簡明而直接的表示法。又爲了要使讀者易於領悟起見，而將習題與例題穿插於一般的理論敍述之中。但是大部份的例題都不會牽扯太遠，其目的在使讀者多知道一些作爲數學家所必備的各項基本知識，以免囿於一隅。

茲將有關微分積分學的參考文獻選錄於序後。本書所參考的其他有關文獻亦同時列出。茲用方括弧內的號碼分別標出。

由於技術與實用上的理由，本書分成兩册*。本書即是在許多微積分教科書中新添的一員。吾人認爲學生若儘可能地多方面去獲取知識，則必有所助益。且從一書中發現他書所未提及的問題，則可引導學生進而作更深一層的研究。

弗瑞赫爾姆・厄微

* 譯者註：係指德文版。

符號與縮寫

w.l.o.g.	普遍性之保持
▱	原題得證
$\Rightarrow$	蘊涵
$\Leftrightarrow$	等價
$\in$	屬於
$=$	相等
$\equiv$	恒等
$\notin \neq \not\equiv$	$\in = \equiv$ 之否定
$\subseteq$	爲…之子集合
$\subset$	爲…之正常子集合
$\cap$	交集
$\cup$	聯集
N, R	自然數，實數
$\ll \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p \gg$	有序自然數集合 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p$ 而 $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_p$
$[x]$	小於或等於 x 之最大整數
$\pm$	正負性質符號；意即有時取正，有時取負
$[a,b], [a,b), (a,b], (a,b)$	a 至 b 之區間（方括弧：閉；圓括弧：開）
R^N	N 個元素組成之行向量集合（N－維空間），N，K，L 均表示產生不同空間之維
$\mathbf{0}$	零向量
e_ν	ν 次單位向量
O	零矩陣
E	單位矩陣
A^T	A 之轉置
tr(A), r(A), det A	A 之跡，秩，行列式

$a \cdot b$	a 和 b 之數積	
sup	上確界	
inf	下確界	
max	最大值，極大值	
min	最小值，極小值	
$\overline{M}$	閉包	
$\underline{M}$	內部	集合 M
Fr M	邊界	
F_N^L 或 F^L	R^N 映至 R^L 之集合	
C^j	j 次連續可微分函數之集合	
$T(k)$	曲線 k 之承戴集合	
$\eta(P)$	劃分 P 之估量	
$P_1 \vee P_2$	劃分 P_1 和 P_2 之疊加	
$\overline{a_0, a_1, \cdots, a_n}$	連接 $a_{\nu-1}$ 和 a_ν（$\nu = 1, 2, \cdots, n$）之折線	
f^{-1}	f 之反函數	
$\frac{df}{dx}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x}$	函數 f 之函數矩陣（雅谷比式）	
∇f	f 之梯度，（∇ 爲行向量）	

目　　錄

第四章　初等函數

第五章　多變數函數之微分學

第六章　單變數函數之積分學

第七章　多變數函數之積分學

導 言

歷史演進

微積分學（The Infinitesimal Calculus）論及實數中含有無限觀念的運算；或更詳言之，即是將無限觀念作合理的探討。它在實質上與希臘數學（Greek Mathematics）截然不同。縱然阿基米德在數學上之建樹良多，而事實上微積分學僅於近代十七世紀才開始奠基。因此，在那時代裡，重新深入地研究科學和非宗教性的古典事物。人們超越了希臘思想的模式，進而開拓了知識領域的新途徑。

微積分學的先驅是牛頓（I. Newton）與萊布尼茲（G. W. Leibniz）。在他們之前的啓蒙者，吾人僅能提出下列數位：卡發萊利（B. Cavalieri）、費麻（P. De Fermat）、海更斯（Chr. Huygens）與格列哥里(J. Gregory)。而新學科的基礎一旦奠定，其發展自可預期。微積分學幾乎永遠有新的應用領域出現。然而，它除了在科學上的應用，特別是物理學（Physics）之外，許多在數學上深入研究的領域猶雨後春筍；例如：常微分方程式和偏微分方程式（Ordinary & Partial Differential Equation）、變分學（Calculus of Variation）、微分幾何學（Differential Geometry），函數論(Function Theory)。在十七和十八世紀發現狂潮的興奮聲中，對於數學上的理論基礎卻予以忽視。這個缺陷直到十九世紀初葉，由高奇（A. L. Cauchy）與其他學者建立起微分數學（Infinitesimal Mathematics)精確而健全的根基才得彌補。而其繼起的發展並非僅限於微積分學的基本領域。特別是積分學（Integral Calculus），它經過了不斷的精煉，並由卡潭（E. Cartan）交錯微分形式而有現代的新貌。

微積分學的歷史是非常令人興奮而饒有趣味的，但是在此吾人不予詳述。現謹列出一些有關的專門書籍，以供有興趣的讀者參閱：

E. T. Bell. The development of mathematics. Mc Graw-Hill, New York-London 1945；

F. Cajori. A history of mathematics. Macmillan, New York 1924；

M.Kline. Mathematics: a cultural approach. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1962;
J. R. Newman, ed. The world of mathematics. I-IV. Allen and Unwin, London 1960;
而更易了解的有：
A. Hooper. Makers of mathematics. Faber and Faber, London 1949.

本書之結構及預備知識

實數（real number）是微積分學的基礎。第一章即討論其形式，使用的法則及這些法則的證明。次一章仍爲初步性質，論及實數的序列（sequences）、級數（series）、和集合（sets）。而在最後一節中將涉及實函數（real functions）的極限法（limiting processes）。

本書的主要內容，在於闡明微分學（differential calculus）的連續性（continuity）與積分學最基本之應用；吾人將於第三、六及五、七章分別就單變數函數和多變數函數（function of one and several variables）詳述之。線積分理論（theory of curvilinear integrals）被置於第六章（單實變數函數之積分學）而並非被置於第七章講述，此點可能出乎讀者的預料。

當討論多變數的問題時，吾人將普遍使用矩陣學（matrix calculus）。而吾人所需要的所有論據，將於第五章的前部予以闡明。

同時，曲線長（curve length）將藉第六章中的方法予以討論；曲面積及容積（surface area and volume）之決定將於第七章中討論而爲多變數函數理論的一環。

第四章或多或少地會打斷各章的邏輯關聯（logical sequence），它就是初等函數（elementary functions），包括了代數、指數、對數、三角及反三角諸函數。由前數章得知某些初等函數有啓蒙的本質，特別是有理函數（rational functions），指數函數及對數函數。吾人常需舉例說明一般理論，而這些例題最好出自初等函數。

本書的內容有許多是初學者所見過的，吾人將就中學數學與微積分學有關的部份以較新穎的觀點並以精密而完全合于邏輯與科學的方法討論，無庸諱言，吾人將遠超過中學所討論的範圍。當然吾人並不忽視在中學裡所學的東西，而僅用中文* 作爲本書的預備知識。吾人先設定在邏輯與數學上的某些基礎；特別是，吾人先假定讀者已熟習了數學符號與最基本的數學術語。

此外，正如吾人在序言中所提議：即在研讀前四章的同時，讀者必須對解析幾何（analytic geometry）與線性代數（linear algebra）的基本性質有所了解；因其爲了解第五、七章所述的多變數函數理論所必需。

本章的其他部份，吾人期能精確發展實數及有關微積分學的理論，故論其有關邏輯和數學（以集合理論爲基本）的基礎。特別是在一集合觀念上，幾乎使初學者感到某些困難。吾人建議必須仔細地閱讀本書，但不須記其所有細節。在本書中，必要時讀者可隨時翻閱以求更明細的了解而作透徹的研究。之後，在微積分學的範圍與內容中，吾人即是應用這些概念貫通之。

邏輯基礎

不以邏輯則數學無從探討。但邏輯卻是一種廣泛而艱深的科學。是故，吾人不能預期一位初學者在着手於實際數學課目之前，對邏輯能有一透徹的研究。事實上，具備一些簡單邏輯命題（propositions）的知識，甚或可謂具備簡單的普通常識，吾人即能很順利地瞭解本書。但是本書對此仍扼要予以討論，吾人的主要目的僅是提示讀者一些基本的命題並熟悉其術語。

每個命題（吾人所將論及者爲數學命題）不爲眞（ture）便爲假(false)。若命題A爲眞，則吾人亦稱：“A是眞確的”或“A成立”。

命題A導引出“A爲非眞”的新命題（簡稱：“非A”），此爲A的否定（negation）。若A與B皆爲命題，則吾人可組成如下的新命題：

“A與B”——契合（conjunction）。

“A或B”——備擇（alternative）。

“若A爲眞，則B爲眞”，以符號表示：$A \Rightarrow B$，或：$B \Leftarrow A$ —— 蘊涵(implication)①

契合“A與B”意指：“A爲眞且B爲眞”。吾人有下述之約定（convention）：若有兩命題A與B，其間用一逗點分離，則作契合“A與B”的解釋。而多於兩命題時亦然。

備擇中的“或”字不含“排取”之意。“A或B”不排斥命題A和B皆爲眞的可能性。至於“排取”的“或”字必須以“兩者擇一”表達，其意爲：（A與非B）或（非A與B）。命題“A或非A”恒爲眞。

蘊涵$A \Rightarrow B$可用下述的方式表達：

“由A得B”；

---

* 譯者註：本書爲德文版時，則以德文爲預備知識；英文版時，則以英文爲預備知識。

"若A眞，則B眞"；

"當A眞時，B眞"；

"A眞，唯若（only if）B眞"；

"B爲A的必要條件（necessary condition）"；

"A爲B的充分條件（sufficient condition）"；

由命題$A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow C$，吾人可得命題$A\Rightarrow C$。此重要法則可被重覆應用。

命題"（$A\Rightarrow B$）與（$B\Rightarrow A$）"可縮寫成"$A\Leftrightarrow B$"，稱爲A與B等**價**（equivalence）。它可用下列任何形式表達：

"B成立，若且唯若（if and only if）A成立"；

"B爲A的充要條件（a necessary and sufficient condition）"。

命題$A\Rightarrow B$等價於：非B$\Rightarrow$非A。讀者對此應自求了解。

許多數學定理（theorem）皆爲$A\Rightarrow B$的形式。A被稱爲**假設**（hypothesis），B爲**斷定**（assertion）。命題$B\Rightarrow A$稱爲$A\Rightarrow B$之**逆**（converse）；當命題$A\Rightarrow B$爲眞時，其逆不一定爲眞。② 若$A\Rightarrow B$與$B\Rightarrow A$皆成立，則吾人可將此二定理合而爲一，即$A\Leftrightarrow B$；吾人稱命題$A\Leftrightarrow B$的斷定在$\Rightarrow$與$\Leftarrow$二方向上均成立；其證明必須從兩方面着手，亦即吾人必須證出$A\Rightarrow B$與$B\Rightarrow A$皆成立。

間接證法（indirect method of proof）常能得心應手：欲證定理$A\Rightarrow B$，可先設斷定B爲假，再導出與假設A矛盾（contradiction）的結果，因而該定理得證。

最後，吾人對"所有（for every）"與"存在（there exists a）"二式的邏輯意義作一觀察研究。茲假定吾人有一含變數x的命題A，即$A(x)$。若$A(x)$對所有x皆爲眞，則吾人稱：$A(x)$對所有x皆成立。而"$A(x)$對所有x皆成立的否定"的否定可寫成：有一x存在，對$A(x)$爲眞。該命題"有一

註：① 邏輯是使複雜命題更趨明晰的形式化體系。在數理邏輯所使用的各種符號中，吾人僅介紹表示蘊涵者。有許多符號表示此蘊涵關係，但無一符號受普遍的採用，吾人在此採用 $\Rightarrow$ 。

② 定理$B\Rightarrow A$的眞確不能由A導出B的正確論證予以證明。由一命題，吾人可證明任何事物而不管它爲眞命題或假命題，吾人僅藉此一隅提醒初學者通常易犯的謬誤如下：現欲證明命題A，雖由A以正確的論證導至命題B，C等直至命題E，而E爲顯然眞之命題，並不能證A爲眞確。例如一公式：$A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow\cdots\Rightarrow E$。是故，吾人必須也自求相反方向的論證，即：$A\Leftrightarrow B\Leftrightarrow C\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow E$成立。吾人可稱：B，C，… E爲命題A的**等價變換**（transformation）。

x 存在，對 A(x)爲眞”不能排斥A(x)對多個相異 x 爲眞的可能性；若吾人欲强調此情況時，則謂：“至少有一 x 存在，使 A(x)爲眞” ，此即**存在定理**(existence theorem)。若A(x)對某一特定 x 爲眞，但對其他所有 x 皆爲假，則吾人可用下述的方式說明：恰有一(exactly one) x 存在，或稱：有一且唯一(one and only one) x 存在，使A(x)爲眞。式“至多有一(at most one)”，亦即“無或恰有一”亦常被使用。此即唯一性定理(uniqueness theorem)。

數學基礎

集合概念

集合論是在十九世紀末葉由坎脫(G. Cantor)所奠定。它爲一基本的數學理論；即使在實數導論中，吾人亦一再地利用它的基本概念。集合(set or collection)的基本概念是“明定而相異物體的一整體”。這些物體即稱爲集合中的元素(elements)。若吾人用 M 表示一集合，則可得一命題：a 爲 M 的一個元素；而其他的表達方式計有：a 屬於(belongs to) M；或 a 包含於(is contained in) M；或：M 包含(contains) a。用符號表示則爲

$$a \in M$$

其他的記法：

$a, b \in M$ 爲 $a \in M$， $b \in M$ 的縮寫；應用於 M 中超過二個元素時亦然；

$a \notin M$ 表示 $a \in M$ 的否定，即命題：a 不是 M 的元素。

現欲闡明集合的概念：就每一物體而論，必須很清楚地確定它是否屬於集合 M（此即在定義中所述的“明定”）；而 M 的每一元素僅能存在一次(此即“相異”的眞義)。吾人亦可使集合中不包含任何元素，此稱爲**空集合**(empty set)。而許多集合論中的命題不適用於空集合；若處於此種特殊情況時，則雖無明文陳述，但吾人由其上下文的關聯，將可淸楚地看出。

集合的定義並非如吾人在數學上所慣用的定義一般明確。此因吾人所考慮者爲一個基本概念，不能用更基本的概念說明之故。即使在數學中，吾人必須有一出發點，吾人絕不能從“無”中導出什麼。無論如何，吾人不用任何語法上有意義的語文去界定一集合；譬如：吾人不討論所有集合的集合。可是，吾人不能討論這些與集合論基礎有關的難題。吾人假定所將論及的集

合均爲有意義。

若二文字 a ，b 表示集合 M 中的同一元素，吾人可稱：a **相等於**（equals）b ，記爲：$a=b$ 。否則，吾人可記爲（$a=b$ 的否定）：$a \neq b$ 。此相等關係可滿足下述邏輯上顯然成立的法則：

$$a=a\,,$$
$$a=b \Rightarrow b=a\,,$$
$$a=b\,,\ b=c \Rightarrow a=c\,.$$

依最後一法則，吾人可寫出鏈鎖方程式（chains of equations），譬如：$a=b=c=\cdots=e$ ，意即所有的 $a, b, c, \cdots, e$ 表示集合 M 中的同一元素。

子集合（Subsets）

若集合 M_0 的所有元素均屬於 M ，亦即：

$$a \in M_0 \Rightarrow a \in M$$

爲眞，則吾人稱集合 M_0 爲 M 的**子集合**，即爲：$M_0 \subseteq M$ 或 $M \supseteq M_0$ 。若有一 b 存在，使 $b \in M$ ，$b \notin M_0$ ；則吾人稱：M_0 爲 M 的正常子集合（proper subset）。記爲 $M_0 \subset M$ 或 $M \supset M_0$ 。空集合是所有集合的子集合；通稱爲非正常子集合（improper subset）。

若二集合 M_1，M_2，$M_1 \subseteq M_2$，又 $M_2 \subseteq M_1$，則稱爲**相等**；亦即若 M_1 恰有與 M_2 相同的元素，則記爲 $M_1=M_2$ 。

若 $M_0 \subset M$ ，則 b 屬於 M ，但不屬於 M_0 之所有元素的集合稱爲 M_0 在 M 中的**餘集合**（complement），吾人記爲：$M-M_0$ 。

已知集合 M ，則其所有子集合所組成的集合稱爲 M 的**權集合**（power set）。權集合的子集合將會常常見到。

函數（Functions）

正如集合一樣，函數是數學的基本概念。吾人不能很明確地由較基本的概念將它導出，但是可由舉例的方式予以闡明。吾人茲考慮二集合（可以相等）M，M^* 。若 M 中的每個元素 x 在 M^* 中均有特定的唯一元素（unique element）y 與之對應，此即吾人所稱的**函數**（或稱**映像**（mapping），或更明確地說，由 M 至 M^* 的映像）。吾人前已說過，對每一 x 所特定的 y 必須是唯一，亦即對每個 $x \in M$，則 M^* 中必有一且唯一的 y 與之對應。若吾人

欲强調定義中此點，則吾人可稱之爲：單値函數（single-valued function）。因此，函數是聯繫一集合內的元素與另一集合內的元素的方法。同一概念下，在數學中不同的各部份裡，則有不同適當的名稱；**映像**（如前所述），**運算**（operation），**運算子**（operator），**變換**（transformation）。

函數通常用字母 f, g, h 表示（或者用大寫字母，有時外加一指標，或爲一星形，或爲粗體字）或附加一些記號，諸如：一撇 ′ 或一箭號→。③

令 f 爲 M 至 M^* 的一映像。M 與 M^* 的元素分別用字母 x 與 y 表示，此即通稱之**變數**（variables），或稱**參數**（parameters）。x 稱爲**自變數**（independent variable）或**變元**（argument），y 爲**因變數**（dependent variable）。M^* 的元素 y 藉 f 特定對應於 x 者，稱爲 x 的**像**（image），或 f 在 x 的**値**（value）。吾人可記爲：

$$y = f(x) \qquad \text{或} \qquad y = fx$$

集合 M（x 在其中變動）稱爲 f 的**定義域**（domain of definition），而吾人稱 f 定義於 M 上或定義於 M 中。M^* 的各個元素不必均爲 f 的値。f 的値的集合稱爲 f 的**値域**（range）$f(M)$：亦即 M^* 的子集合，而在上述情況下恰爲一正常子集合。若 $f(M)$ 等於 M^*，則 f 稱爲 M 映成 M^* 的一映像。

函數 f 在一已知點 $x_0 \in M$（f 在 x_0 的像）的値，亦即 M^* 的元素藉 f 特定對應於 x_0 者，可用 $f(x_0)$ 或 $[f(x)]_{x=x_0}$ 表示。

有關函數的一些其他重要概念

定義域是函數定義的一基本部份。吾人常欲考慮在一較小集合中的函數。令 $M_0 \subset M$，則映 M_0 至 M^* 的 f_0 與定義於 M_0 上的 f 相重合而稱爲 f 於 M_0 的**限制**（restriction）。茲定義爲

$$f_0(x) = f(x) \quad \text{且所有 } x \in M_0$$

f 稱爲**擴充**（extension）至 M 的 f_0。習慣上，限制函數仍使用原來的符號，若稍予留意即能免除混淆；但定義的限制定義域必須用 M_0 以替代 M。因此，吾人仍以符號 f 代替 f_0，而稱之爲定於集合 M_0 上的函數 f。

假設函數 f，g 的定義域均包含集合 M_0。若 f 與 g 對 M_0 的限制**相等**（即：$f(x) = g(x)$，對所有 $x \in M_0$），則吾人謂 f 與 g 在 M_0 上爲**恒等**（ide-

---

註：③ 箭號亦常作其他的用途，即如極限法的記號。但無混淆之虞。

ntical）（即全等 identically equal），並記爲：$f(x)\equiv g(x)$ 對 $x\in M_0$。

一函數的値域僅由單一元素組成時，稱爲**常數**（constant），記爲：$f\equiv$ 常數（const.）。

集合 M 映成其本身的映像 f（M 同時是 f 的定義域與值域），而使M的所有元素固定。亦即

$$f(x)=x \qquad \text{且所有 } x\in M$$

此稱爲**恒等**（identity）映像。

令 $y=f(x)$是 M 至M^* 的映像，又令 $z=g(y)$是 M^* 至 M^{**} 的映像。則該二映像可連續完成，於是吾人得到一 M 至 M^{**} 的映像F；即對各個 $x\in M$，特定在 f 之下 x 的映像在 g 之下的映像。吾人記爲：$F(x)=g(f(x))$，並稱爲函數 f 和 g 的**合成**（composite），而作**置換**（substituting）（f 被代入 g，此置換法有意義，概因 f 的值域是 g 的定義域的子集合）。又超過二個函數的合成亦循此理。

令 $y=f(x)$是 M 映成 M^* 的映像。吾人茲考慮一（單值）函數，並對各個 $x\in M$ 而特定一且唯一的元素 $y\in M^*$. 在另一方面，在 M 中不同的元素導致 f 的同一值（例如：常數函數 constant functions）。設非如此，即若

$$f(x_1)\neq f(x_2) \quad \text{對所有 } x_1,x_2\in M \text{ 而使 } x_1\neq x_2$$

則映像 f 稱爲：**一對一**（one-one），**二重一致**（biuniform）或**唯一可逆**(uniquely invertible)（當 $M=M^*$，f 亦稱爲**排列**（permutation）），且稱函數 f 爲**可逆**（invertible）④。f 的**反函數**（inverse function）（亦稱**逆**（reverse）或**逆映像**（inverse mapping））即是由 M^* 映成 M 的映像，對各個 f 值，$f(x)$指定其**逆像**（inverse image）x，吾人記爲 f^{-1}，或簡示爲：$x=f^{-1}(y)$。由定義知

$$f^{-1}(f(x))\equiv x \qquad \text{對所有 } x\in M$$

與

$$f(f^{-1}(y))\equiv y \qquad \text{對所有 } y\in M^*$$

亦即：$f^{-1}(f(x))$與 $f(f^{-1}(y))$ 分別是 M 與 M^* 的恒等映像。

註：④ 在適當時機，吾人可用雙箭號 ↔ 替代單箭以表示映像的可逆性。