

多元统计分析

杨维权 刘兰亭 林鸿洲 编

高等教育出版社



本书的出版得到了
加拿大驻华大使馆发展处
公民社会项目资助
在此表示衷心的感谢

中国和加拿大的

社区发展

● 主编 陈启能 姜 芃



民族出版社
The Ethnic Publishing House

内 容 提 要

全书内容共分十章、三个附录以及两个补充，前四章主要讨论多元统计分析的理论基础，包括多元正态分布及其性质、参数估计、抽样分布、假设检验；后六章介绍较实用的多元统计分析方法，包括回归分析、线性模型、经济计量模型、判别分析与聚类分析、主成分分析与因子分析、典型相关分析。

本书可供数学、概率统计、计算数学等专业作为选修课教材使用，也可供工、农、医、经济等学科教学多元统计分析时选用。

多元统计分析

杨维权 刘兰亭 林鸿洲 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13 字数 310 000

1989 年 6 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷

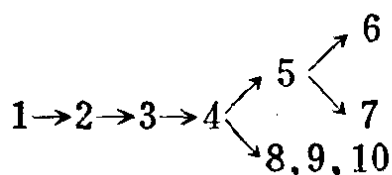
印数 0 001—2 600

ISBN7-04-001023-2/O·654

定价 3.45 元

说 明

本书是为数学、概率统计、计算数学等专业开设多元统计分析选修课而编写的。对于工科、农医、经济等学科开设数理统计选修课，本书也可适用。全书由两大部分组成：第一部分是前四章，讲述了多元统计分析的理论基础，包括多元正态分布及其性质、参数估计、抽样分布、假设检验；第二部分是后六章，包括回归分析、线性模型、经济计量模型、判别分析与聚类分析、主成分分析与因子分析、典型相关分析，它们是多元统计分析中较实用的各种方法。各章之间的相互关系如下图所示：



在全书的安排上，既注意到教学方便，各章都配有习题；还注意到理论与实践相结合，后六章都有实例讲解，这些实例涉及到地质、生化、农医、经济及教育心理学等方面。对于概率统计基础知识不大熟悉的应用工作者，可直接阅读第 8、9、10 后三章，通过实例掌握这几种实用的统计方法。

为使适用面更广，本书没有采用测度论工具，只需要普通的微积分及概率统计基础知识。本书编写了三个附录、两个补充，不占用教学时数，可供教学参考。附录 I 给出了矩阵代数方面的内容，为教学提供方便。考虑到教学时数的限制，将前四章中几个定理的详细证明作为附录 II，供教学参考。附录 III 是介绍参数检验的并交原理，充实假设检验的内容。补充 I 是简介随机成分向量的统计分析及其应用，这个专题的应用面较广。补充 II 是简介椭

球等高分布族,这是多元统计分析近代发展的一个新课题,有利于扩大知识面。

在编写过程中,我们遵守下述基本原则:1. 保证理论的完整性和严谨性,对于多元统计分析中的基本概念和定理,作较全面且较严格的叙述;2. 为使本书的应用性较强,尽量做到阐述基本概念、定理和方法的客观实际意义,所述各种统计方法都用实例作示范;3. 全书力求简明扼要,重点突出,叙述清楚。

本书由杨维权(中山大学)主持编写。其中,第一、二、三、四、七各章及附录 II、补充 I、补充 II 由杨维权执笔,余锦华协助配前四章习题;第六、九、十各章及附录 I、附录 III 由刘兰亭(山西大学)执笔;第五、八章由林鸿洲(山东海洋学院)执笔。杨维权负责全书修改定稿。

本书初稿写于 1983 年,在中山大学、山西大学、山东海洋学院、山西师范大学等院校几经试用与修改,并于 1986 年 9 月在太原市召开了审稿会,到会专家认真地审阅了全书,并就书的结构、选材和论述提出了许多重要的改进意见。在此基础上,我们对全书又作了进一步的修改。谨向他们表示衷心的感谢。

梁之舜教授及张尧庭、方开泰、林少宫、魏宗舒、常学将等教授对本书的编写一直关注与支持,王隼骧、王学仁、邓集贤、邓炜材、周光亚等同行专家及高尚华、周纪乡、谢平民等同志对本书初稿提出了许多宝贵的意见,我们衷心感谢他们。

由于编者水平有限,本书难免还会有不少缺点及不当之处,恳请读者批评指正。

编 者

1986 年 12 月

目 录

第一章 多元正态分布	1
§ 1.1 多元分布的基本概念	1
§ 1.2 多元正态分布	6
一、多元正态分布的定义	7
二、边沿分布与条件分布	12
§ 1.3 偏相关与多重相关	16
习题	23
第二章 参数估计	26
§ 2.1 极大似然估计	26
§ 2.2 最优无偏估计	37
§ 2.3 多参数的 Rao-Cramér 不等式	43
习题	49
第三章 抽样分布	50
§ 3.1 非中心分布	50
§ 3.2 Wishart 分布及其性质	54
§ 3.3 Hötelling T^2 分布	63
§ 3.4 均值向量的置信区域	67
一、 Σ 为已知正定阵的情形	67
二、正定阵 Σ 未知的情形	68
§ 3.5 广义方差及回归系数的分布	68
习题	71
第四章 假设检验	74
§ 4.1 检验法及其优良性	74
§ 4.2 均值向量的检验	77
一、单一总体情形	77
二、多个总体情形	82
§ 4.3 协方差阵的检验	84

§ 4.4 μ 及 Σ 的联合检验	88
§ 4.5 独立性检验	90
一、 $H_0: \Sigma_{12} = 0$ 的检验	91
二、 $q=1$ 时, 建立 H_0 的否定域	92
三、 π 的分布推导	94
习题	94

第五章 回归分析.....97

§ 5.1 引言	97
§ 5.2 回归方程的计算	101
§ 5.3 回归方程的检验	104
§ 5.3.1 关于方程线性性的检验	104
§ 5.3.2 关于变量的显著性检验	105
§ 5.3.3 实施步骤	106
§ 5.4 回归因子的选择	110
§ 5.4.1 联立推断	111
§ 5.4.2 均方误差准则	114
§ 5.5 回归模型的改进	115
§ 5.5.1 压缩回归	116
§ 5.5.2 岭回归估计	117
§ 5.5.3 主成分回归估计	119
习题	121

第六章 多元线性模型.....124

§ 6.1 引言	124
一、广义最小二乘估计	124
二、参数带约束的最小二乘估计	125
三、正态线性模型	126
§ 6.2 多元线性模型及其参数估计	128
§ 6.2.1 多元线性模型	128
§ 6.2.2 参数估计	130
§ 6.3 估计量的性质及其分布	132
一、估计量的性质	132
二、估计量的分布	135
§ 6.4 假设检验	137

§ 6.5 多元方差分析	141
*§6.6 方差分量线性模型	143
一、模型的提出	143
二、参数估计	144
习题	147
第七章 经济计量模型	148
§ 7.1 引言	148
§ 7.2 两段最小二乘法估计	152
§ 7.3 系统方程的识别问题	157
§ 7.3.1 简化型结构	157
§ 7.3.2 识别问题	159
一、从 π 出发讨论方程的识别	159
二、从 B 及 Γ 出发讨论方程的识别	161
§ 7.4 联立方程的参数估计	163
§ 7.4.1 两段最小二乘估计	163
§ 7.4.2 Zellner 两段估计	165
一、 Σ 为已知的情形	165
二、 Σ 为未知的情形	167
§ 7.4.3 三段最小二乘估计	167
§ 7.4.4 有限信息极大似然估计	168
§ 7.4.5 充分信息极大似然估计	169
§ 7.5 实例	170
习题	174
第八章 判别分析与聚类分析	176
§ 8.1 判别分析概述	176
§ 8.2 似然比准则下的判别法——距离判别	177
§ 8.2.1 两个正态总体的判别问题	177
一、似然比检验	177
二、误判概率及 c 值的确定	178
§ 8.2.2 参数未知的情形	179
一、 μ_1, μ_2 及 Σ 都是未知的情形	179
二、 μ_1, μ_2 未知, Σ 为已知的情形	182
三、 (μ_1, Σ_1) 及 (μ_2, Σ_2) 都未知的情形	184

§ 8.2.3 多个正态总体的情形	186
一、 $\mu_1, \dots, \mu_k$ 及 Σ 都已知的情形	186
二、 $\mu_1, \dots, \mu_k$ 及 Σ 都未知的情形	187
§ 8.3 Fisher 准则下的判别法	192
§ 8.3.1 两类判别	193
一、整理历史数据	193
二、确定线性判别函数	193
三、 C 的估计值	195
四、确定临界值	196
§ 8.3.2 实例计算	197
§ 8.3.3 多类判别	201
一、整理历史数据	201
二、建立线性判别函数	202
三、确定临界值与判别规则	204
§ 8.4 聚类分析	205
§ 8.4.1 概述	205
§ 8.4.2 分类统计量	206
一、 Q 型分类统计量	207
二、 R 型分类统计量	208
§ 8.5 系统聚类法	209
§ 8.5.1 概述	209
一、最短距离法	210
二、最长距离法	211
三、中间距离法	212
四、重心法	213
五、类平均法	214
六、可变类平均法	214
七、可变法	215
八、离差平方和法(亦称 Ward 法)	215
§ 8.5.2 例题	217
习题	226
第九章 主成分分析及因子分析	227
§ 9.1 主成分分析法	227
§ 9.2 主成分的定义及求法	227

§ 9.3 主成分的性质	232
§ 9.4 样本主成分	234
一、由 V 出发求样本主成分向量	235
二、由 R 出发求样本主成分向量	237
§ 9.5 主成分分析法在经营管理中的应用	238
§ 9.6 因子分析法	245
§ 9.6.1 引言	245
§ 9.6.2 因子分析的线性模型	246
一、 $D(X)$ 及 $D(e)$ 为已知的情形	248
二、 $D(X)$ 及 $D(e)$ 为未知的情形	251
§ 9.7 方差最大正交旋转法	254
习题	259
第十章 典型相关分析	262
§ 10.1 引言	262
§ 10.2 总体典型相关	262
§ 10.3 样本典型相关变量	268
§ 10.4 典型相关系数的显著性检验	271
一、检验 $H_0: \Sigma_{12} = 0$	271
二、Bartlett 检验法	272
§ 10.5 两个实例	274
习题	279
附录 I 矩阵代数知识	281
一、正定阵	281
二、矩阵分块求逆	283
三、行列式的分块表示	284
四、矩阵求迹	284
五、投影阵	285
六、矩阵分解定理	286
七、矩阵的特殊运算	290
八、矩阵微商	294
九、雅可比行列式	297
十、广义逆矩阵	299
附录 II 抽样分布的几个定理的证明	303

一、样本协方差阵是概率为1的正定阵的充要条件的证明及讨论	303
二、Wishart 分布密度函数的推导	305
三、Höteiling T^2 分布定理的严格证明	311
四、回归系数矩阵估计量的分布	312
五、 $H_0: \Sigma_{12} = 0$ 检验统计量的分布	315
附录 III 参数检验的并交原理	320
补充 I 随机成分向量的统计分析	327
一、引言与记号	327
二、独立性概念	329
三、 S^d 上的概率分布及其性质	333
四、多元统计方法及实例	340
补充 II 椭球等高分布族	347
一、引言	347
二、球对称分布的定义与性质	348
三、球对称分布的二次型分布	355
四、线性回归分析	363
五、椭球等高分布族的有关结论	365
附表及其使用说明	366
表 1 χ^2 -分布的上侧临界值表	370
表 2 F 检验的临界值 (F_α) 表	372
表 3 $T^2(m, n)$	382
表 4 $L(m, \nu)$	394
表 5 $W(m, n)$	395
表 6 $M(m, \nu_0, k)$	404
参考文献	406

第一章 多元正态分布

数理统计学的重要基础之一是一元正态分布，因为大多数实际问题中的随机变量服从正态分布，如长度(高度、厚度、宽度等)、重量、含量、容量等测量误差作为随机现象研究其统计规律性，都属于这种情形。对于一元正态分布的研究早已较为完美，并建立了一整套的统计推断方法(如估计理论、假设检验原理及其在回归分析、试验设计等各种统计方法中的应用)。由于正态分布在理论研究及实际应用中起着重要的作用，因此对于非正态分布的随机变量，在什么样的条件下渐近地服从正态分布，也研究得较为充分。多元统计分析是研究客观事物中多个变量(或多个因素)之间相互依赖的统计规律性，它的重要基础之一是多元正态分布。

多元正态分布是最常用的一种多元概率分布。除此之外，还有多元对数正态分布、多项式分布、多元 β 分布、多元 χ^2 分布、多元指数分布等。

§1.1 多元分布的基本概念

多元分布的基本概念，可由二元概率分布的自然推广而得到，如联合分布、边缘分布、条件分布、独立性、特征函数、数字特征等。对此，只作扼要的综述。

定义 1.1.1 随机向量、随机矩阵。 称由 p 个随机变量 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 构成的 p 维列向量

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_p)' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

为 p 维随机向量, 它的概率分布称为 p 元分布. 称

$$X = (x_{ij})_{p \times n}$$

为随机矩阵, 是指矩阵中每个元素 x_{ij} 都为随机变量, 常记

$$X = (x_{ij})_{p \times n} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n}$$

$$= (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)})_{p \times n} = \begin{pmatrix} X'_{(1)} \\ X'_{(2)} \\ \vdots \\ X'_{(p)} \end{pmatrix}_{p \times n}$$

(1.1.1)

在此以 $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ 表示 X 的列向量, $X_{(1)}, \dots, X_{(p)}$ 表示 X 的行向量的转置向量. X 是 $p \times n$ 阶随机矩阵, 它可看成 n 个 p 维(列)随机向量所构成的, 也可看成 p 个 n 维(行)随机向量构成的. X 的概率分布是指按列拉直的全体元素(随机变量) $x_{11}, \dots, x_{p1}, x_{12}, \dots, x_{p2}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{pn}$ 组成的 pn 元分布. (注: 以后称向量都是指列向量.)

定义 1.1.2 数字特征. 依次称

$$E(X) = \begin{pmatrix} Ex_1 \\ Ex_2 \\ \vdots \\ Ex_p \end{pmatrix}, \quad E(Y) = \begin{pmatrix} Ey_1 \\ Ey_2 \\ \vdots \\ Ey_q \end{pmatrix}$$

为 $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$ 及 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_q)'$ 的均值向量, 称

$$E(X) = (Ex_{ij})_{p \times n}$$

为随机矩阵 X 的均值矩阵. 称

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, X) &= E[X - E(X)][X - E(X)]' \\ &= \begin{pmatrix} \text{Cov}(x_1, x_1) & \cdots & \text{Cov}(x_1, x_p) \\ \text{Cov}(x_2, x_1) & \cdots & \text{Cov}(x_2, x_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(x_p, x_1) & \cdots & \text{Cov}(x_p, x_p) \end{pmatrix}_{p \times p} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

为 p 维随机向量 X 的自协方差阵, 简称为 X 的协方差阵. 称 $|\text{Cov}(X, X)|$ 为 X 的广义方差, 它是协方差阵的行列式之值. 称

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[X - E(X)][Y - E(Y)]' \\ &= \begin{pmatrix} \text{Cov}(x_1, y_1) & \cdots & \text{Cov}(x_1, y_q) \\ \text{Cov}(x_2, y_1) & \cdots & \text{Cov}(x_2, y_q) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(x_p, y_1) & \cdots & \text{Cov}(x_p, y_q) \end{pmatrix}_{p \times q} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

为 X 与 Y 的互协方差阵, 简称为 X 与 Y 的协方差阵.

注意: 有时记 $\text{Cov}(X, X) = D(X)$, 其中对角线上的元素 $D(x_i)$ 是随机变量 x_i 的方差, $i = 1, \dots, p$. 一般说来, $\text{Cov}(X, Y) \neq \text{Cov}(Y, X)$, 因为

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[X - E(X)][Y - E(Y)]' \\ &= \{E[Y - E(Y)][X - E(X)]\}' \\ &= \{\text{Cov}(Y, X)\}' \end{aligned}$$

对于 p 维随机向量 $X = (x_1, \dots, x_p)'$, 称

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(x_i, x_j)}{\sqrt{D(x_i)}\sqrt{D(x_j)}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, p$$

为分量 x_i 与 x_j 之间的相关系数, 称 $R = (\rho_{ij})_{p \times p}$ 为 X 的相关矩阵. 对于两个不同的随机向量 X 及 Y , 它们之间的相关问题将在第十章典型相关分析中进一步讨论.

定义 1.1.3 特征函数. 随机向量 X 的特征函数定义为

$$\varphi(t) = E(e^{it'X}) \quad (1.1.4)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, t 是实数列向量, 其维数与 X 的维数相同, 即 $t = (t_1, \dots, t_p)'$, 则

$$\varphi(t) = E(e^{i \sum_{j=1}^p t_j x_j})$$

随机矩阵 $X = (x_{\alpha\beta})_{p \times n}$ 的特征函数是用 pn 维随机向量 $(x_{11}, \dots, x_{p1}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{pn})'$ 的特征函数来定义的, 即为:

$$\varphi(T) = E(e^{i \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^n t_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}}) = E(e^{it_r(T'X)}) \quad (1.1.5)$$

其中 T 是与 X 的阶数相同的实数矩阵, t_r 是矩阵 $T'X$ 的迹, 即 $T'X$ 的对角线上元素之和.

由上述定义及向量、矩阵有关运算的基本知识, 可以证明下述等式成立. 设 A, B, C 为常数矩阵, X, Y 为随机矩阵, X, Y, U, V 为随机向量, 则有:

$$1^\circ E(AXB + C) = AE(X)B + C \quad (1.1.6)$$

$$2^\circ E(AX + BY) = AE(X) + BE(Y) \quad (1.1.7)$$

$$3^\circ \text{Cov}(X, Y) = E[XY'] - [E(X)][E(Y)]' \quad (1.1.8)$$

$$4^\circ \text{Cov}(AX, BY) = A\text{Cov}(X, Y)B' \quad (1.1.9)$$

$$\begin{aligned} 5^\circ \text{Cov}(aX + bY, dU + eV) &= ad\text{Cov}(X, U) \\ &+ ae\text{Cov}(X, V) + bd\text{Cov}(Y, U) + be\text{Cov}(Y, V) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

其中 a, b, d, e 皆为实常数.

$$6^\circ D(BX + K) = BD(X)B' \quad (1.1.11)$$

其中 K 为实常数向量.

这里假定上述各式的运算总可进行(如协方差阵的存在及阶数、维数协调一致等). 详细证明留作练习.

p 维随机向量 $X = (x_1, \dots, x_p)'$ 的协方差阵及相关矩阵都是非负定矩阵。事实上

$$\text{Cov}(X, X) = (\text{Cov}(x_i, x_j))_{p \times p}$$

记

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \sigma_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, p$$

则

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j) = \text{Cov}(x_j, x_i) = \sigma_{ji}$$

可见协方差阵是对称的。 又对任意 p 维实向量 $C = (c_1, \dots, c_p)'$, 则有

$$\begin{aligned} C' \text{Cov}(X, X) C &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p c_i c_j E(x_i - E x_i)(x_j - E x_j) \\ &= E \left[\sum_{i=1}^p c_i (x_i - E x_i) \right]^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

可见, 协方差阵是非负定阵 (常用 $\text{Cov}(X, X) \geq \square$ 表示非负定阵, $\square$ 表示元素为零的矩阵)。由此可知, 相关矩阵 R 也是非负定阵。

定义 1.1.4 条件分布、独立性. 将 p 维随机向量 $X = (x_1, \dots, x_p)'$ 分成两个子向量: $1 \leq q \leq p$,

$$X = \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ \dots \\ X_{(2)} \end{pmatrix}, \quad X_{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}, \quad X_{(2)} = \begin{pmatrix} x_{q+1} \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad (1.1.13)$$

在此 $X_{(1)}$ 、 $X_{(2)}$ 分别表示 X 的两个子向量, 也为随机向量。记 $F(x_1, \dots, x_p)$ 为 X 的联合分布函数, $F_1(x_1, \dots, x_q)$, $F_2(x_{q+1}, \dots, x_p)$ 分别为 X 的边沿分布函数。随机向量 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立是指

$$F(x_1, \dots, x_p) = F_1(x_1, \dots, x_q) F_2(x_{q+1}, \dots, x_p) \quad (1.1.14)$$

若记 $\varphi(t)$ 为 X 的特征函数, $\varphi_1(t_{(1)})$ 及 $\varphi_2(t_{(2)})$ 分别表示 $X_{(1)}$ 及 $X_{(2)}$ 的特征函数, 其中

$$t = \begin{pmatrix} t_{(1)} \\ \dots \\ t_{(2)} \end{pmatrix}, \quad t_{(1)} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_q \end{pmatrix}, \quad t_{(2)} = \begin{pmatrix} t_{q+1} \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix}$$

则 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立等价于

$$\varphi(t) = \varphi_1(t_{(1)})\varphi_2(t_{(2)}) \quad (1.1.15)$$

条件分布通常是分别就离散型、连续型给出定义. 现在就连续型情形讨论条件分布问题, 对于离散型情形可类似地给出有关结论. 设 X 具有分布密度函数 $f(x_1, \dots, x_p)$, 则 $X_{(1)}$ 及 $X_{(2)}$ 具有各自分布的密度函数, 分别记作 $f_1(x_1, \dots, x_q)$ 及 $f_2(x_{q+1}, \dots, x_p)$. 由 (1.1.14) 式知, $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立又等价于

$$f(x_1, \dots, x_p) = f_1(x_1, \dots, x_q)f_2(x_{q+1}, \dots, x_p) \quad (1.1.16)$$

若 (1.1.16) 式不成立, 则 $X_{(1)}$ 及 $X_{(2)}$ 中一方的概率分布必与另一方有关. 当给定 $X_{(2)} = x_{(2)}$ 的数值向量时, 若 $f_2(x_{q+1}, \dots, x_p) \neq 0$, 则 $X_{(1)}$ 具有条件分布密度函数 $f_1(x_1, \dots, x_q | x_{q+1}, \dots, x_p)$, 可以证明

$$f_1(x_1, \dots, x_q | x_{q+1}, \dots, x_p) = \frac{f(x_1, \dots, x_p)}{f_2(x_{q+1}, \dots, x_p)} \quad (1.1.17)$$

同理, 在给定 $X_{(1)} = x_{(1)}$ 的数值向量时, 若 $f_1(x_1, \dots, x_q) \neq 0$, 则 $X_{(2)}$ 具有条件分布密度函数 $f_2(x_{q+1}, \dots, x_p | x_1, \dots, x_q)$, 可以证明

$$f_2(x_{q+1}, \dots, x_p | x_1, \dots, x_q) = \frac{f(x_1, \dots, x_p)}{f_1(x_1, \dots, x_q)} \quad (1.1.18)$$

对照 (1.1.16)、(1.1.17)、(1.1.18) 三式可见, $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立等价于

$$\begin{aligned} f_2(x_{q+1}, \dots, x_p | x_1, \dots, x_q) &= f_2(x_{q+1}, \dots, x_p) \\ f_1(x_1, \dots, x_q | x_{q+1}, \dots, x_p) &= f_1(x_1, \dots, x_q) \end{aligned}$$

§ 1.2 多元正态分布

多元正态分布是一元正态分布及二元正态分布的自然推广, 当然内容更为丰富. 我们知道, 若 y 服从 $N(0, 1)$, 记 $x = \mu + \sigma y$, 其中 μ 及 $\sigma > 0$ 为实数, 则 x 服从 $N(\mu, \sigma^2)$. 就是说, 可用标准正