连续体力学

李　灏
陈树坚　编译

华中工学院出版社

连 续 体 力 学

李 灏 陈树坚编译
责任编辑 燕洪瑞
*
华中工学院出版社出版
（武昌喻家山）
*
开本：787×1092 1/32 印张：6.75 字数：140,000
1982年12月第1版 1982年12月第1次印刷
印数：1—5,000册
统一书号：13255—004 定价：0.80元

内 容 简 介

连续体力学统一研究流体与固体的一般力学原理. 全书共十一章, 着重对形变、运动和应力作了全面分析, 并研究了质量、动量和能量的守恒定律, 最后深入探讨了各种流体和固体的力学本构方程. 为便于阅读, 第二、三章介绍了矩阵代数、矢量与笛卡儿张量等必需的数学基础知识. 各章有不少例题和习题, 书末附有答案.

本书可作为数学、力学或有关专业高年级大学生及研究生的教材, 亦可供大学教师和工程研究人员参考.

编译者的话

连续体力学包括流体力学与固体力学，后二者是力学与应用数学的两个主要分支，也是工程科学的重要基础。近年来不少人主张把连续体力学作为一门课程，统一讲授这两个分支，着重阐述适用于所有物质的普遍力学原理，课程的主要内容有：形变、运动与应力的分析；质量、动量与能量的守恒定律；以及各种流体与固体的力学本构方程。

我们认为这种意见是可取的。因为人们掌握了连续体力学的基本原理后，便能更好地学习其他力学分支。

1980年国外出版了斯潘塞的《连续体力学》，这是一本体系严谨而内容简明扼要的好书，目前国内还缺少这方面的书籍，为此，我们特地将此书编译出来，作为连续体力学的教材。该书的第二章和第三章是连续体力学的数学基础，但有些地方原作者的论证不足，为了讲授和阅读的方便，我们作了许多必要的补充。

本书不仅适用于应用数学、力学和物理学等专业的高年级大学生和研究生，也可供大学教师和工程技术人员参考。

李　灏　陈树坚

1981年4月

原　　序

本书目的在于提供适合大学生研读的连续体力学导论。它以我过去十四年在诺丁汉大学用的讲义为基础。尽管用较高深的数学更能简练而精确地阐明一些理论，但我仍试图使所需数学基础限于数学专业二年级生或重视数学的工科毕业生通常熟悉的内容。本书内容包括矩阵代数、矢量与张量的入门，形变与应力的分析，质量、动量与能量的守恒律的数学表述，以及建立各种流体力学与固体力学的本构方程。除去在最后一章里说明如何用柱极坐标和球极坐标表述理论以外，通篇采用笛卡儿坐标和笛卡儿张量。对于固体力学与流体力学的各个分支，如弹性力学、牛顿流体力学、粘弹性力学与塑性力学，我只提到本构方程的建立。任何详尽处置需要很长篇幅，而这样的论题在长篇专著中会有充分讨论。

当然，我十分感激对我的连续体力学教学曾作出贡献的许多教师、同事和学生，但人数过多，不便一一提及，与其挂一漏万，不如一并致谢。类此，我显然间接引用了许多文献，可是感到在这类导论中不必注明其出处，并乐于感谢对我有影响的所有作者。

许多习题取自诺丁汉大学理论力学系的试题，谨对学校让我采用表示谢意。

最后感谢玛格丽特的打字。

A·J·M·斯潘塞

1979年于诺丁汉

目　　录

第一章 引 言

1.1 连续体力学

现代物理学理论告诉我们：物质在微观尺度上是间断的，是由分子、原子、甚至更小的粒子组成的。但我们往往要涉及比这些粒子大得多的物质部分，在日常生活里，在力学的几乎所有的工程应用中以及在物理学的许多应用中，情况就是如此。在这样的情况下，我们不考虑个别原子和分子的运动，而只考虑它们在某种平均意义下的性质。原则上，如果我们充分了解物质在微观尺度上的性质，那末应用适当的统计方法，就有可能估计出物质在宏观尺度上的性能。实际上，这样的估计是极端困难的，只有对最简单的体系才能这样研究。即使在这些简单的情况下，为了求得结果，也还要作许多近似估计。因此，我们关于物质力学性能的知识几乎完全依赖于在相当大的尺度上对物质的性能进行观察和实验测定。

连续体力学研究固体与流体在宏观尺度上的力学性能，它不管物质的离散性质，而把物质当作是均匀分布在整个空间区域里的。于是就能够将密度、位移、速度等这样一些量定义成位置的连续（或至少是分段连续）函数。只要我们所考虑的物体尺度比微观尺度上的特征长度（例如晶体的原子间距或气体的平均自由程）大得多，就会发现这种办法是令人满意的。所谓微观尺度不必是原子尺度，例如只要所涉及的区域尺度比单个颗粒的尺度大得多，就可将连续体力学应

用于沙子那样的颗粒物质．在连续体力学里，假设物体所占空间区域里的每一点都伴有一物质点，并给这些质点以密度、速度等场量．这个办法之所以正当的理由多少根据气体、流体和固体的统计力学理论，但主要因为用它描述和推测一整部分物质的力学性能是成功的．

力学是研究力与运动二者相互影响的科学．因此在连续体力学里出现的变量，一方面是同力有关的变量（往往是每单位面积或每单位体积的力，而不是力本身），而另一方面是运动学的变量，如位移、速度和加速度．在刚体力学里，物体的形状不改变，所以构成刚体的质点只能以非常受限制的方式彼此作相对运动．刚体是连续体，但它是很特殊、很理想化和很不典型的连续体．连续体力学较多地研究能够改变形状的变形体．对于这类物体，各质点的相对运动很重要，因此引入位移、速度等的空间导数作为重要的运动学变量．

连续体力学的方程分作两大类：首先是同样适用于所有物质的方程，它们描述普遍适用的物理定律，如质量与能量的守恒；其次是描述特殊物质力学性能的方程，称之为本构方程．

连续体力学的问题也分作两大类：首先是建立本构方程，这些方程适宜描述各种各类特殊物质的力学性能，而这些方程的建立主要依赖于实验．但为了设计适当的实验和解释实验结果，需要一定的理论体系；第二类问题是，应用连续体力学的普适方程并根据适当的边界条件求解本构方程，证实本构方程的有效性，推测和描述物质在具有工程的、物理或数学的意义下所具有的性能．在这个求解问题的阶段，连续体力学的各个分支便不一样了，我们把这方面的问题留给更全面和更专门的著作去解决．

第二章 矩阵代数

2.1 矩 阵

$m\times n$ **矩阵 $\mathbf{A}$** 是mn个元素A_{ij}(指标$i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$) 排成的矩形表，它由m行与n列组成，我们记为

$$\mathbf{A}=(A_{ij})=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2}\cdots & A_{mn}\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

A_{ij}是矩阵$\mathbf{A}$中第i行第j列的元素。如果$m=n$，则$\mathbf{A}$就称为**方阵**。$m\times 1$矩阵只有一列，称为**列阵**。$1\times n$矩阵只有一行，称为**行阵**。

我们说两矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$**相等**就是指其对应元素A_{ij}与B_{ij}相等，

$$\mathbf{A}=\mathbf{B} \qquad 即 \qquad A_{ij}=B_{ij}.$$

因此，行数或列数不同的矩阵是说不上相等的。如果把矩阵$\mathbf{A}$里每个第j行第i列的元素换到第i行第j列去，得到矩阵$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{B}$为$\mathbf{A}$的**转置阵**，可写为$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$，且

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad 即 \qquad B_{ij}=A_{ji}.$$

我们常用粗正体大写字母($\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$等等)表示矩阵，而用粗正体小写字母($\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$等等)表示列阵，将行阵当作列阵的转置阵($\mathbf{a}^{\mathrm{T}},\mathbf{b}^{\mathrm{T}},\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$等等)。指标常取值1,2,3，虽然这是连

续体力学中经常碰到的情况，可是给出的大多数结果对于任意的指标范围都仍是正确的。

所谓方阵 $\mathbf{A}$ 是对称的，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad \text{或} \qquad A_{ij}=A_{ji}; \tag{2.2}$$

所谓它是反对称的，即

$$\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad \text{或} \qquad A_{ij}=-A_{ji}. \tag{2.3}$$

单位阵

$$\mathbf{I}=(\delta_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

这里克罗内克符号 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=j; \\ 0, & \text{若 } i\neq j.\end{cases}$ (2.5)

显然 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$。δ_{ij} 的一个重要的性质反映在下列代换法则里：

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}A_{jk}=A_{ik}, \qquad \sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}A_{kj}=A_{ki}. \tag{2.6}$$

方阵 $\mathbf{A}$ 的**迹**用 $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ 表示，它是 $\mathbf{A}$ 的主对角线上的元素之和。因此，对 $n\times n$ 方阵 $\mathbf{A}$，

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}, \tag{2.7}$$

特别是

$$\mathrm{tr}\mathbf{I}=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ii}=n.$$

方阵 $\mathbf{A}$ 有与其相伴的**行列式** $\det\mathbf{A}$（假设大家熟悉行列式的基本性质）。对于 3×3 方阵 $\mathbf{A}$，因

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}e_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}=e_{123}\det\mathbf{A},$$

故有

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}e_{ijk}A_{ir}A_{js}A_{kt}=e_{rst}\det\mathbf{A},$$

其中交错符号

$$e_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{若}(i,j,k)\text{是}(1,2,3)\text{的偶排列;}\\ -1, & \text{若}(i,j,k)\text{是}(1,2,3)\text{的奇排列;}\\ 0, & \text{若}\ i,j,k\ \text{不都互异.}\end{cases}$$

由于

$$\det\mathbf{A}=\frac{1}{6}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{3}e_{rst}e_{rst}\det\mathbf{A},$$

所以

$$\det\mathbf{A}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{3}e_{ijk}e_{rst}A_{ir}A_{js}A_{kt}.$$

将

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix}$$

互换行或列时会改变正负号，因此将行或列改变任意次，便有

$$\begin{vmatrix}A_{i1} & A_{i2} & A_{i3}\\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3}\\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3}\end{vmatrix}=e_{ijk}\det\mathbf{A},\quad \begin{vmatrix}A_{1r} & A_{1s} & A_{1t}\\ A_{2r} & A_{2s} & A_{2t}\\ A_{3r} & A_{3s} & A_{3t}\end{vmatrix}=e_{rst}\det\mathbf{A},$$

而将行和列作任意改变，便有

$$\begin{vmatrix} A_{ir} & A_{is} & A_{it} \\ A_{jr} & A_{js} & A_{jt} \\ A_{kr} & A_{ks} & A_{kt} \end{vmatrix} = e_{ijk}e_{rst}\det\mathbf{A},$$

当 $A_{ij}=\delta_{ij}$ 时，$\det\mathbf{A}=1$，故在克罗内克符号与交错符号之间，存在恒等式

$$\begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} = e_{ijk}e_{rst}.$$

特别是

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} e_{ijp}e_{ijq} = 2\delta_{pq},$$

$$\sum_{p=1}^{3} e_{ijp}e_{rsp} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}.$$

行数和列数均相同的矩阵 **A** 与 **B** **相加之和**是对应元素之和形成的元素所组成的矩阵 **C**，就是说

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B} \quad 即 \quad C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}.$$

矩阵 **A** 与纯量 α **相乘之积**是 **A** 的各元素与 α 之积形成的元素所组成的矩阵 **B**，就是说

$$\mathbf{B}=\alpha\mathbf{A}=\mathbf{A}\alpha \quad 即 \quad B_{ij}=\alpha A_{ij}.$$

矩阵 **A** 的列数与矩阵 **B** 的行数相同时，**A 右乘以 B**（或称 **B** 左乘以 **A**）之积是 **A** 的第 i 行上元素 A_{ij} 与 **B** 的第 k 列上元素 $\mathbf{B}_{jk}$ 相乘之积 $A_{ij}B_{jk}$ 从 $j=1$ 到 n 求和形成的元素 C_{ik} 所组成的矩阵 **C**，就是说

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB} \quad 即 \quad C_{ik}=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}.$$

因此，对于方阵，有

$$\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}.$$

由(2.6)，对于与方阵 **A** 同阶的单位阵 **I**，有

$$\mathbf{IA}=\mathbf{A}=\mathbf{AI}.$$

令

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{C},$$

则 $C_{ik}=A_{kj}B_{ji}=B_{ji}A_{kj}$，即

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\tag{2.8}$$

就是说，两矩阵乘积的转置与它们的转置左右互易后的乘积有同样的结果。

若 A_{ij}^{*} 为 A_{ij} 的余子式，则方阵 **A** 的**伴随阵**

$$\mathrm{adj}\mathbf{A}=(A_{ji}^{*}),$$

因此

$$\mathbf{A}\mathrm{adj}\mathbf{A}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}A_{jk}^{*}=(\delta_{ij}\det\mathbf{A})=\mathbf{I}\det\mathbf{A}.$$

若方阵 **A** 为**非奇异矩阵**，即 $\det\mathbf{A}\neq 0$，则 **A** 的**逆阵**

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}},$$

因而有

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{I}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}.$$

反之，由上式有

$$\det\mathbf{A}\det\mathbf{A}^{-1}=1,$$

故

$$\det\mathbf{A}\neq 0.$$

可见，方阵 **A** 为非奇异阵是 **A** 的逆阵存在的充要条件。

对于非奇异阵，因为

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I},$$

故

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \tag{2.9}$$

就是说，两方阵之积的逆阵等于它们的逆阵左右互易后相乘之积。

又因

$$(\mathbf{A}^{T})^{-1}\mathbf{A}^{T} = \mathbf{I},$$

两边右乘以$(\mathbf{A}^{-1})^{T}$，得

$$(\mathbf{A}^{T})^{-1}\mathbf{A}^{T}(\mathbf{A}^{-1})^{T} = (\mathbf{A}^{T})^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{T} = (\mathbf{A}^{T})^{-1}\mathbf{I} = (\mathbf{A}^{T})^{-1}$$
$$= \mathbf{I}(\mathbf{A}^{-1})^{T} = (\mathbf{A}^{-1})^{T},$$

可见

$$(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}. \tag{2.10}$$

就是说，方阵转置与求逆之次序可以颠倒。

方阵$\mathbf{Q}$是**正交的**，意味着它具有性质

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{T}, \tag{2.11}$$

因此对于正交阵$\mathbf{Q}$，有

$$\mathbf{QQ}^{T} = \mathbf{I} = \mathbf{Q}^{T}\mathbf{Q}. \tag{2.12}$$

因为 $\det(\mathbf{QQ}^{T}) = (\det\mathbf{Q})^{2} = \det\mathbf{I} = 1,$

所以有

$$\det\mathbf{Q} = \pm 1. \tag{2.13}$$

我们主要关心的是**正常正交阵**，对于这类矩阵，

$$\det\mathbf{Q} = 1,$$

而对于非正常正交阵

$$\det\mathbf{Q} = -1.$$

如果$\mathbf{Q}_1$和$\mathbf{Q}_2$是两个正交阵，则它们的乘积$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$也是正交阵。这是由于