高等学校教学用書

高等数学教程

第二卷　第三分册

В. И. 斯米尔諾夫著

人民教育出版社

本書原系根据苏联国立科学技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的斯米尔諾夫（В. И. Смирнов）著“高等数学教程”（Курс высшей математики）第二卷1952年第十一版譯出的。这次的中文版系根据原書1956年第十四版修訂过的，原書这一版在書中很多地方作了一些不大的改动。原書經苏联高等教育部审定为綜合大学数理系及高等工业学院需用較高深数学的各系教科書。

原書系荣获斯大林奖金的著作。

本書（第二卷）中譯本暂分三册出版。

本书原由高等教育出版社出版。自1960年4月1日起，高等教育出版社奉命与人民教育出版社合并，統称“人民教育出版社”。因此本书今后用人民教育出版社名义繼續印行。

高等数学教程

第二卷　第三分册

В. И. 斯米尔諾夫著
孙念增譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門内承恩寺7号
（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）
上海市印刷四厂印刷
新华书店上海发行所发行
各地新华书店經售

統一书号13010·162　开本850×1168 1/32　印張4 15/16
字数134,000　印数31,001—42,000　定价（4）¥0.50
1953年8月商务初版（共印45,000册）
1958年1月新1版　1959年4月第2版（修訂本）
1960年8月上海第6次印刷

第三分册目次

第七章　数学物理偏微分方程

§ 17.　波动方程

163. 弦的振动方程　求偏微分方程的积分問題屬于分析的最艰深而且最广泛的部門，这里我們只限于考慮这个范圍中的基本問題。这一节中我們講連系于所謂波动方程的問題。下面形状的方程叫做波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \text{ 或 } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2 \Delta u,$$

其中
$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\operatorname{div}\operatorname{grad} u。$$

在[**116**]与[**118**]中考慮声与电的振动时我們遇到过这个方程。設 u 不依賴于 y 与 z，就是說，在任何一个垂直于 X 軸的平面上的所有的点，u 有相同的值。在这情形，波动方程的形状如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

在这样的情形下我們通常說是有平面波。現在我們来說明，当考慮紧張的弦的微小的横振动时，我們得到这样的方程。

所謂弦我們指的是纖細的綫，它可以自由的弯曲。我們設它受有很强的張力 T_0 的作用，并且在平衡状态下，沒有沿 X 軸方向的外力(圖 127)。此外，如果它由平衡位置遭受了随意的外力的作用，弦就开始振动，而且当平衡时弦上具有横坐标为 x 而位置在 N 的点，在时刻 t 就具有位置 M。我們只限于考慮横振动，假定全部运动出現在一个平面上，而且弦上的点垂直于 X 軸运动。我們

把弦上的点的位移 $\overline{NM}$ 記作 u。这个位移就是两个自变量 x 与 t 的未知函数。

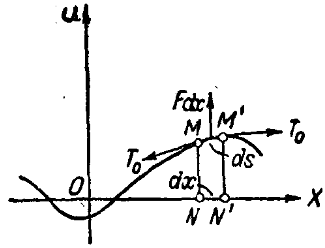

圖 127.

取弦的單元 MM'，平衡时它的位置在 NN'。我們算作形变是很小的，以至于与 1 比較起来可以忽略掉导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的平方項。設 α 是弦的切綫与 X 軸作成的銳角。我們有

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}$$

于是
$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx\frac{\partial u}{\partial x}。$$

把对于單位長計算的，弦上垂直于 X 軸的作用力記作 F。作用在所考虑的單元 MM' 上的就有下列各力：在点 M' 的張力，它的方向沿着在点 M' 的切綫方向，而与 X 軸作成銳角；在点 M 的張力，方向沿着在点 M 的切綫方向，与 X 軸作成鈍角；以及沿 u 軸方向的力 Fdx。由于假定了形变是很小的，我們可以算作上述两个張力的大小等于張力 T_0 的大小。先設在所說的力 F 的作用下弦成平衡。投影在 u 軸上，就有下面的平衡条件

$$T_0\sin\alpha'-T_0\sin\alpha+Fdx=0, \tag{1}$$

其中 α' 是上面說的角度 α 在点 M' 的値，就是說

$$\sin\alpha'=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'};\quad \sin\alpha=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M},$$

于是推知：

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}\right]+Fdx=0。 \tag{2}$$

在方括号中的差，表达的是当 x 改变了 dx 时函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的改变

量。用微分来替代这个改变量，就得到[I, 50]：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\text{。}$$

代入到(2)中，消去 dx，就得到弦的平衡方程：

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F=0\text{。}\tag{3}$$

为要得到运动方程，我們只須依照达朗倍尔原理，对于外力再补充以慣性力，它可以由下述方法得到：点 M 的速度显然是 $\frac{\partial u}{\partial t}$，加速度是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，慣性力等于加速度与質量的乘积而取相反的符号，所以單元 MM' 的慣性力是：

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx,$$

其中 ρ 是弦的綫密度，就是單位長的質量，对于單位長来講，慣性力就是

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

并且我們算作 ρ 是常量。

于是，在方程(3)中用 $F-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 来替代 F，我們就得到运动方程：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F\text{。}$$

用 ρ 除，并設

$$\frac{T_0}{\rho}=a^2\ ,\ \frac{F}{\rho}=f,\tag{4}$$

我們就得到弦的强迫横振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\text{。}\tag{5}$$

若外力消失，我們就有 $f=0$，于是得到弦的自由振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{。}\tag{6}$$

在第四卷里，我們将指出如何根据哈米尔頓原理导出方程(5)。

以上我們假定了外力是連續地分布在整个弦上的，但有时我們遇到的是力 P 集中在一个点 C 的情形。考虑这样的情形时，或者看作是上面的極限情形，就是設力是作用在点 C 附近的一个長度为 ε 的无穷小單元上，而当 $\varepsilon\to 0$ 时，力的大小与 ε 的乘积趋向有限的極限，这个極限不等于零；或者对于点 C 附近的單元 MM' 直接运用方程(2)而用 P 来替代 Fdx。这时要注意我們对于 Fdx 不补充以慣性力$\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho\,dx\right)$，因为当 $dx\to 0$ 时我們算作它趋向零。

設單元的端点逼近于点 C，我們把当自右或自左逼近于点 C 时 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 所趋向的極限值分别記作：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-,$$

由方程(2)取極限就得到

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-\right]=-P。\tag{7}$$

如此，我們看出，这个弦在集中力作用所在的点 C 具有角点，就是左右切綫方向不同的点。

像在动力学中一般的情形一样，一个运动方程(5)不足以完全确定弦的运动，还需要給定在初始时刻 $t=0$ 时它的状态，也就是它的点的位置 u，以及当 $t=0$ 时它們的速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$，这都要是 x 的已知函数：

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x)。\tag{8}$$

当 $t=0$ 时，未知函数 u 应当满足这两个条件，它們叫做*初始条件*。

理論上講，可以考虑无穷的弦，在这情形下为要求解只須方程（5）与条件（8）就够了，其中 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 应当是給定在整个无穷区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的。这情形就对应于在无界空間中对于平面波的討論。以后我們将看到，由无穷的弦得到的結果所給出的扰动分布的景象，当这些扰动沒有达到有界弦的端点时，在这样的时間区間里，这种景象也就是对于有界弦的景象。

不过若是在点 $x=0$ 与 $x=l$ 弦是界于一头或界于两头的，就需要說明它的端点的現象。例如，設弦的一端 $x=0$ 是固定住的。在这情形下，我們应当有

$$u\Big|_{x=0}=0。\tag{9}$$

若是端点 $x=l$ 也是固定住的，則我們又得到

$$u\Big|_{x=l}=0,\tag{9_1}$$

对于任何的 t，这两个条件应当滿足。

弦的端点也可能不是固定住的，而是按給定的方式运动的。那时弦的这两个点的縱标应当認为是时間的已知函数，就是說，設

$$u\Big|_{x=0}=\chi_1(t);\quad u\Big|_{x=l}=\chi_2(t)。\tag{10}$$

无論怎样，如果弦是界于一头或界于两头的，对于它的每一个端点就应当有給定的条件，这样的条件叫做边値条件。

因此，我們看出，对于具体的物理問題的解来講，补充的初始条件与边値条件的重要性并不低于运动方程，并且我們的兴趣不在于运动方程的随意的解或者甚至于它的一般解的求法，而是在于求适合于所設置的初始条件与边値条件的解。

164. 达朗倍尔解　在无穷弦的自由振动情形，要求的函数 $u(x, t)$ 应当滿足方程（6）：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

而要适合初始条件(8):

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

这里由于弦是无界的,函数 $\varphi(x)$与 $\varphi_1(x)$应当是給定在区間$(-\infty,+\infty)$上的。

可以求出方程(6)的具有这种形状的一般解,使得容易适合于条件(8)。

为此,我們变换方程(6),引用新的自变量:

$$\xi=x-at,\ \eta=x+at,$$

由此 $$x=\frac{1}{2}(\eta+\xi);\quad t=\frac{1}{2a}(\eta-\xi)。$$

看作 u 通过中間变量 ξ 与 η 依赖于 x 与 t, 应用求复合函数的导数的法则,由对新变量的导数来表达对原来变量的导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};\ \frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)。$$

再应用一次这两个公式,就得到:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right),$$

由此 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

于是方程(6)就与下面这方程相当:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0。\tag{11}$$

把方程(11)写成

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0,$$

就可以看出 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ 不依赖于 η，就是説它只是 ξ 的函数。設

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\theta(\xi),$$

求积分，就得到

$$u=\int\theta(\xi)d\xi+\theta_2(\eta),$$

其中 $\theta_2(\eta)$ 是 η 的任意函数（当对 ξ 求积分时，“常数”可以依赖于 η）。这里第一項可以算作是 ξ 的任意函数，因为 $\theta(\xi)$ 是 ξ 的任意函数，我們用 $\theta_1(\xi)$ 来記第一項，就有：

$$u=\theta_1(\xi)+\theta_2(\eta),$$

或者，換到原来的变量 (x, t)，

$$u(x, t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at), \tag{12}$$

其中 θ_1 与 θ_2 是各自的变量的任意函数。方程（6）的这个一般解叫做达朗倍尔解；它含有两个任意函数 θ_1 与 θ_2。我們利用初始条件（8）来确定这两个函数，根据等式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a[-\theta_1'(x-at)+\theta_2'(x+at)]。$$

以及等式(12)，得到：

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x); \quad -\theta_1'(x)+\theta_2'(x)=\frac{\varphi_1(x)}{a}, \tag{13}$$

由后一个等式求积分并变号：

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(z)dz+C。$$

讓 $x=0$，我們来确定任意常数 C：

$$C=\theta_1(0)-\theta_2(0)。$$

可以算作 $C=0$，就是設

$$\theta_1(0)-\theta_2(0)=0, \tag{14}$$

这并不失去一般性，因为如果 $C\neq0$，則我們可以引用函数

$$\theta_1(x)+\frac{C}{2},\quad \theta_2(x)-\frac{C}{2}$$

来替代函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$，这样等式(13)并不改变，而满足了(14)。

因此，我們有：

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x)\,;\ \theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(z)dz。\quad (15)$$

由此我們不难确定函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$；

$$\begin{aligned}\theta_1(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)dz;\\ \theta_2(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)dz。\end{aligned}\quad (16)$$

把所得到的表达式代到公式(12)中，就求得：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi_1(z)dz+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi_1(z)dz,$$

結果得到：

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz。\quad (17)$$

显然，如果在 $-\infty<x<\infty$ 时 $\varphi(x)$ 有連續导数 $\varphi'(x)$ 和 $\varphi''(x)$，而 $\varphi_1(x)$ 有連續导数 $\varphi_1'(x)$，則由公式(17)給出的解(所謂古典解)应当是二次連續可微的。可是往往要处理这样的問題，其中初始扰动是由不滿足这些条件的函数給出的。例如，如果在初始时刻弦呈折綫的形状，則 $\varphi(x)$ 在折綫的各頂点处沒有确定的导数。虽然函数 $u(x,t)$ 并不处处都有直到二阶的連續导数，但仍可合理地認为公式(17)給出了問題的解。在这个情形我們說，問題有所謂广义解。广义解的理論将在第四卷里講到。

165. 特殊情形 公式(17)給出了所提出問題的完全的解。为要更好的認清所得到的解，我們分別各种特殊情形討論如下。

1. 初始冲量等于零，就是說，弦上点的初始速度等于零。这时由条件 $\varphi_1(x)=0$ 及公式(17)給出：

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}, \tag{18}$$

在初始时刻 $\quad u\Big|_{t=0}=u(x,0)=\varphi(x)$。

現在我們看解(18)的物理意义。表达式(18)的分子由两項組成，我們先看第一項：$\varphi(x-at)$。

設一个观察者由初始时刻 $t=0$ 开始，由弦上的点 $x=c$ 以速度 a 在 OX 軸的正方向移动，也就是說，他的横坐标依照公式 $x=c+at$ 或 $x-at=c$ 改变。对于这样的观察者来講，由公式 $u=\varphi(x-at)$ 所确定的弦的位移总保持一个常数值，而等于 $\varphi(c)$。函数 $u=\varphi(x-at)$ 所确定的这个現象叫做正波的傳播。回到达朗倍尔公式(12)，我們可以說，$\theta_1(x-at)$ 这一項給出正波，它以速度 a 在 OX 軸的正方向傳播。同理，第二項 $\theta_2(x+at)$ 所确定的弦的振动是这样的，这时扰动在 OX 軸的負方向以速度 a 傳播，并且在时刻 t 具有横坐标 $c-at$ 的点与当 $t=0$ 时的点 $x=c$ 具有相同的离开距离 u。它所对应的現象我們叫做反波的傳播。

a 的大小是扰动或振动(横的)的傳播速度。公式(4)指出

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \tag{19}$$

就是說，横振动的傳播速度与弦的密度的平方根成反比而与張力的平方根成正比。

上述的解(18)是正波 $\varphi(x-at)$ 与反波 $\varphi(x+at)$ 的算术平均值，它可以由下述方法得到：作出两个相同的当 $t=0$ 时弦的圖形 $u=\varphi(x)$ 的模样，想像它們彼此是重合在一起的，然后向两側以速度 a 移动。弦在时刻 t 的圖形就可以作为这样移动的两个圖形的算术平均值得出来，就是說，弦在时刻 t 的圖形平分諸縱标界于两

个移动的圖形之間的綫段。

例如，設在初始时刻，弦具有如圖128所示的形状。

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{在区間}(-\alpha,\alpha)\text{之外},\\ x+\alpha & \text{当}-\alpha\leqslant x\leqslant 0\text{ 时},\\ -x+\alpha & \text{当 }0\leqslant x\leqslant\alpha\text{ 时}。\end{cases}$$

圖129上表示出弦在下列时刻的圖形：

$$t=\frac{\alpha}{4a},\ \frac{2\alpha}{4a},\ \frac{3\alpha}{4a},\ \frac{\alpha}{a},\ \frac{5\alpha}{4a},\ \frac{2\alpha}{a}.$$

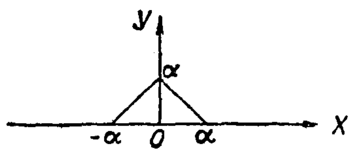

圖　128.

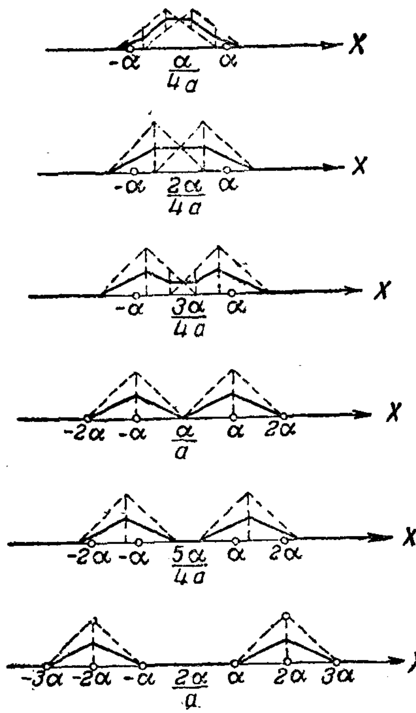

圖　129.

我們在平面上作出两条互相垂直的軸：一个是关于变量 x 的，另一个是关于 t 的。在圖130上我們只画出了一个 X 軸。这平面上任何一点由两个坐标 (x, t) 确定，就是說，这样的点表現出在确定的时刻 t 弦上的确定的点 x。这时不难用画圖的方法确定出弦上那样的点，这些点的初始扰动在时刻 t_0 达到点 x_0。依照以上所述，这就是具有横坐标 $x_0\pm at_0$ 的点，因为 a 是振动的傳播速度。为要在 OX 軸上找出它們来，只須过点 (x_0, t_0) 作两条直綫：

$$\left.\begin{aligned}x-at&=x_0-at_0,\\x+at&=x_0+at_0,\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

它們与 OX 軸的交点就是所要求的点。直綫(20)叫做点(x_0, t_0)的特征綫。沿着其中第一条直綫 $\varphi(x-at)$ 保持常数值，就是說，对于由这直綫給出的那些值(x, t)来講，正波給出相同的离开距离，也就是对应于(x_0, t_0)这一对值的离开距离。对于反波来講，(20)中第二条直綫有同样的作用。簡單的可以說是，扰动沿着特征綫傳播。

应用上述的作法，可以發覚下述的事实。

設只在弦的某一个区間(α_1, α_2)上具有初始扰动(圖 130)，就是說，在这区間之外 $\varphi(x)=0$。我們限于上半个(x,t)平面$(t>0)$，

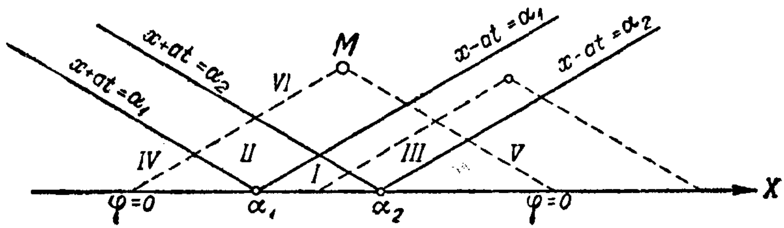

圖 130.

因为只有它才有物理意义，作出 OX 軸上的点 α_1 与 α_2 的特征綫，如圖上画的实綫。这些特征綫把整个上半平面分为六个区域。区域(I)所对应的点是这样的，在所指定的时刻正波与反波都要达到这些点。区域(II) 所对应的点在指定的时刻只是反波达到；区域(III)則相反，只是正波达到。区域(IV)与(V)所对应的点是这样的，在所指定的时刻，沒有扰动达到这些点。最后，区域(VI)所对应的点是这样的，扰动已經达到它們而且經过了它們，在所指定的时刻它們呈靜止状态。这是由于，如果过这个区域中随便那一点作特征綫，則它們与 OX 軸的交点 $x=c$ 落在有初始扰动的綫段之

外，于是 $\varphi(x\pm at)=\varphi(c)$ 等于零。此外，若过 M 作垂直于 OX 軸的直綫，則这直綫的下段，就是对应于 x 不变而时間提前的一段，至少通过区域(I)，(II)，(III)中之一，而这直綫的上段，就是对应于时間推后的一段，整个出現在区域(VI)中。以下我們将看到，弦所具有的这个值得注意的性質——波經过之后回到原来的状态——并非对于任何的初始扰动都是如此的。

2. 初始位移等于零而只有初始冲量。

这时我們得到解

$$u(x, t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\,dz。\tag{21}$$

若用 $\Phi_1(x)$ 記函数 $\frac{1}{2a}\varphi_1(x)$ 的随意一个原函数，就得到：

$$u(x, t)=\Phi_1(x+at)-\Phi_1(x-at),\tag{22}$$

就是說，也是具有正波与反波的傳播的。如果初始扰动只限于在区間 (α_1, α_2) 之上，我們可以得到与情形1同样的作法，主要的区别是在区域(VI)中位移不是等于零而是由下面这积分来表达

$$\frac{1}{2a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi_1(z)\,dz。\tag{23}$$

实际上，依照区域(VI)的作法，对于这个区域来講，我們有 $x+at>\alpha_2$ 而 $x-at<\alpha_1$，就是說，在公式(21)中求积分所需要沿着的区間包含 (α_1, α_2) 在其內。不过依照条件，在 (α_1, α_2) 之外函数 $\varphi_1(z)$ 等于零，于是只剩下沿 (α_1, α_2) 的积分，因而对于 $u(x, t)$ 我們就得到表达式(23)，它代表某一个常数。

如此，随着时間的变化，初始冲量的作用使得弦上的点移动一个綫段，这个綫段的長度由积分(23)表达，并在这新的位置保持不动。

还可以用下述的方法来解釋公式(21)。設点 x 位于区間 (α_1, α_2) 之右，卽 $x>\alpha_2$。当 $t=0$ 时，积分区間 $(x-at, x+at)$ 退化成一

点 x，以后当 t 增加时，它以速度 a 向两侧伸展。当 $t<\frac{x-\alpha_2}{a}$ 时，它与 (α_1, α_2) 沒有公共点，在其中函数 $\varphi_1(z)$ 等于零，于是公式(21)給出 $u(x, t)=0$，就是說，在点 x 是静止的。由时刻 $t=\frac{x-\alpha_2}{a}$ 开始，区間 $(x-at, x+at)$ 就重合在区間 (α_1, α_2) 上，在 (α_1, α_2) 上 $\varphi_1(z)$ 不等于零，于是点 x 开始振动(波的前陣面通过点 x 的时刻)。最后，当 $t>\frac{x-\alpha_1}{a}$ 时，区間 $(x-at, x+at)$ 就包含有整个的区間 (α_1, α_2)，沿区間 $(x-at, x+at)$ 求积分就化为沿区間 (α_1, α_2) 求积分，因为依照条件，在区間 (α_1, α_2) 之外 $\varphi_1(z)$ 等于零，就是說当 $t>\frac{x-\alpha_1}{a}$ 时，$u(x, t)$ 具有由表达式(23)所确定的常数值。时刻 $t=\frac{x-\alpha_1}{a}$ 是波的后陣面通过点 x 的时刻。

关于一般的情形我們作一些附注。我們提出，在一般情形下，正波或反波可以全部消失。实际上，例如，設在初始条件中出現的函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 滿足关系式：

$$\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz=0。\tag{24}$$

这时，根据(16)中第二个公式，函数 $\theta_2(x)$ 就恒等于零，于是在一般解(12)中反波就消失了。如果我們在(24)的右边用一个常数来替代零，则 $\theta_2(x)$ 成为常数，而在公式(12)中这个常数項可以算在 $\theta_1(x-at)$ 中，就是說，也是沒有反波的。回到我們的情形 1 中所考虑的例。圖 128 給出初始离开距离的圖形(各处的初始速度都等于零)。圖 129 中最后一个給出在某一个时刻 $t=t_0$ 时弦的圖形，它是由各别的两段构成的。对应于区間 $(\alpha, 3\alpha)$ 的右边这一段以速度 a 向右移动，而左边那一段以速度 a 向左移动。不过我們可以用下述方法来描述当 $t>t_0$ 以后的現象：取时刻 $t=t_0$ 作为初始

时刻，計算出在这时刻的离开距离 u 与速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$，并应用一般公式(17)，在其中只是右边需要用 $(t-t_0)$ 来替代 t，因为我們現在把 t_0 取作初始时刻。在这情形下，只是在区間 $(-3\alpha,\ -\alpha)$ 与 $(\alpha,\ 3\alpha)$ 上初始条件不等于零。在一般情形下，在这两个区間的每一个上，扰动給出正波和反波。不过在这里的情形下，如以上我們所看到的，在区間 $(\alpha,\ 3\alpha)$ 上（比方說）扰动只給出正波。这是由于，在这区間上，除去由圖 129 中最后一个所表示的离开距离外，当 $t=t_0$ 时振动的結果中也产生有速度，以使得反波消失。同理，在区間 $(-3\alpha,\ -\alpha)$ 上的扰动不給出正波。这种現象是吉金斯原理的构成之一。

166. 有界弦 設有两端固定住的有界的弦，并設弦的端点是 $x=0$ 与 $x=l$。

除初始条件(8)之外

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 是对于 $0<x<l$ 給定的，还需要满足边値条件：

$$u\Big|_{x=0}=0;\ u\Big|_{x=l}=0。\tag{25}$$

达朗倍尔解(12)

$$u(x,\ t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at)\tag{12}$$

自然适用于这个情形，不过由公式(16)

$$\left.\begin{aligned}\theta_1(x)&=\frac{1}{2}\ \varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)dz;\\ \theta_2(x)&=\frac{1}{2}\ \varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)dz\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

来确定函数 θ_1 与 θ_2 在这里遇到了困难，依照問題的物理意义，函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 以至于 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 只是确定在区間 $(0,\ l)$ 上，而在公式(12)中变量 $(x\pm at)$ 可能位于这区間之外。

因而，为要可能应用特征綫的方法，就需要把函数 $\theta_1(x)$ 与