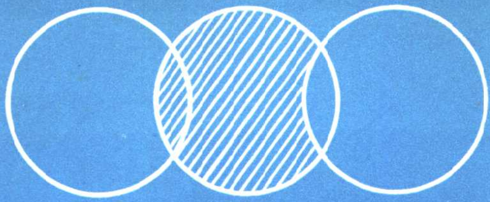
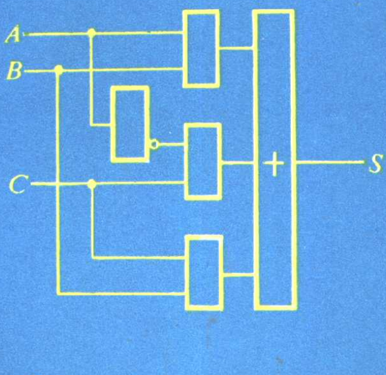


逻辑代数初步
与电子计算机简介

张文贵 著



人民教育出版社

逻辑代数初步
与电子计算机简介

张 文 贵 著

人 民 教 育 出 版 社

内容简介

本书分为逻辑代数与电子计算机基本知识两章.

逻辑代数一章介绍了集合代数、逻辑代数、逻辑运算的性质及逻辑式的化简等知识. 电子计算机基本知识一章简略地介绍了电子计算机的逻辑部件、组成及工作方式, 以及程序设计的简单知识.

本书文字浅显、通俗易懂, 是一本向中学生介绍电子计算机知识的课外读物, 可供课外活动小组学习及教师参考, 也可作为需要了解计算机的读者的科普读物.

逻辑代数初步
与电子计算机简介

张文贵 著

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 3.875 字数 79,000

1983 年 8 月第 1 版 1984 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—15,000

书号 7012·0675 定价 0.39 元

目　　录

第一章　逻辑代数

第二章　电子计算机基本知识

第一章　逻辑代数

§1　集 合 代 数

集合代数和逻辑代数的研究对象是各不相同的，但是它们都是由形式逻辑得到的，它们之间的关系亦是十分密切的.

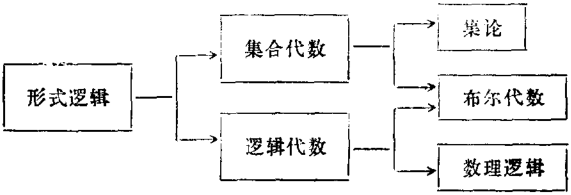
1. 集合代数的三种基本运算与逻辑代数的三种基本运算很相似，因此，由基本运算导出的运算性质与运算公式也很类似. 将这两种代数的运算性质、运算公式对照起来学，可以加深对逻辑代数基本概念的理解.

2. 逻辑代数可以看成是只含有两个集合（{0}与{1}）的集合代数，所以我们可以认为逻辑代数是集合代数的特殊情形. 掌握了集合代数以后，只要稍加变动，就可以得到逻辑代数的有关内容.

学习逻辑代数知识，可以先学习集合代数，然后再学习逻辑代数，也可以不学集合代数而直接学习逻辑代数. 但是，逻辑代数的基本概念对一般初学者，特别是电路知识较少的初学者来说不易接受. 而集合代数所研究的对象较广泛，内容丰富，有很多具体实例都是我们日常生活中所熟悉的，所以它比较容易被人接受. 另一方面，掌握了集合代数知识之后，再学习逻辑代数，实际效果会更好. 基于以上理由，在介绍逻辑代数之前先学习集合代数.

集合代数与逻辑代数进一步发展就形成抽象的集论、布

尔代数与数理逻辑等数学分支．这个关系，可以由下图看出．



1.1 集合与集合的运算

集合是所研究的对象的全体．每个对象称为集合的一个**元素**．

集合可以用它的全体元素表示．若集合 A 由 a_1、a_2、a_3 三个元素组成，则可记作

$$A=\{a_1, a_2, a_3\}.$$

集合也可以用它所研究的对象的共同属性来表示．例如，正整数集合 A，是由所有大于零的整数组成，表示为

$$A=\{x \mid x>0 \text{ 的整数}\}.$$

在数学上，一般把集合 A 记作

$$A=\{x \mid p(x)\},$$

其中 x 表示集合 A 的元素，$p(x)$ 表示 x 应满足的条件，即集合 A 是由满足条件 $p(x)$ 的所有 x 组成．

一般地，用大写字母 A、B、C……等表示集合；用小写字母 a、b、c……表示集合的元素．

若 a 是集合 A 的一个元素，记作

$$a \in A,$$

读作"a 属于 A"．

若 a 不是集合 A 的一个元素，记作

$$a \notin \boldsymbol{A} \qquad (\text{或 } a \bar{\in} A),$$

读作"a不属于 A".

若集合 A 仅有一个元素，则称 A 为**单元集**. 例如，$A=\{0, 1\}$, 则$\{A\}$为一个集合,(注意：集合的元素也可能是集合),它是仅含有一个元素 A的单元集，而 A 本身却是一个具有两个元素的集合.

有两个集合 A 与 B, 若对 B 中任意一个元素 x 皆满足条件:

$$x \in B \Longrightarrow x \in A \quad (\text{即若 } x \in B, \text{则 } x \in A).$$

称集合 B 为集合 A 的**子集合**(简称**子集**),记作

$$\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}.$$

B是 A 的子集的含意是：集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素.

若两个集合 A 与B, 满足条件:

$$B \subseteq A \quad \text{同时} \quad A \subseteq B,$$

称集合 A 与 B **相等**, 记作

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}.$$

容易证明, 若 A 与B相等, 则两个集合有完全相同的元素.

若$B \subseteq A$, 且$B \neq A$(B 与 A 不相等), 称 B 为 A 的**真子集合**.

记作 $$\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$$

我们称不含任何元素的子集合为**空集合**，用$\varnothing$表示. **空集合是任何一个集合的子集合**.

我们把所研究的对象的全体称为**全集合**，用 I 表示. **任何一个集合都是全集合的子集合**, 特殊地有

$$\varnothing \subset I.$$

1. 集合的运算

运算 I 若 A、B 为两个集合，我们称集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

为集合 A 与集合 B 的**并**，并称这种运算为**并运算**.

例 1 若 $A=\{0\}$, $B=\{1\}$，则 $A\cup B=\{0,1\}$.

例 2 若 $A=\{x\mid x>0$ 的实数$\}$, $B=\{0\}$，则 $A\cup B=\{x\mid x\geqslant 0$ 的实数$\}$.

例 3 若 $A=\{n\mid n$ 为正整数, n 能被 3 整除$\}$, $B=\{n\mid n$ 为正整数, n 能被 2 整除$\}$，则 $A\cup B=\{n\mid n$ 为正整数, n 能被 2 或 3 整除$\}$.

类似的方法，可以定义两个以上集合的并：

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid x\in A_1$ 或 $x\in A_2$ 或…或 $x\in A_n\}$.

运算 II 若 A、B 为两个集合，我们称集合

$$A\cap B=\{x\mid x\in A, \text{ 且 } x\in B\}$$

为集合 A 与集合 B 的**交**，并称这种运算为**交运算**.

我们应该注意到，对 $A\cup B$ 的元素只要求它属于 A, B 之一即可(包括既属于 A，又属于 B)，而对 $A\cap B$ 的元素必须同时属于 A 与 B.

例 1 若 $A=\{0\}$, $B=\{1\}$，则 $A\cap B=\varnothing$(空集合).

例 2 若 $A=\{x\mid x\geqslant 0$ 的实数$\}$、$B=\{x\mid x\leqslant 0$ 的实数$\}$，则 $A\cap B=\{x\mid x=0\}=\{0\}$(只含一个元素—数 0 的单集合).

注意：虽然$\{0\}$只含一个零，但它不是空集，即$\{0\}\neq\varnothing$.

例 3 若 $A=\{n\mid n$ 为正整数, n 能被 3 整除$\}$, $B=\{n\mid n$ 为正整数, n 能被 2 整除$\}$，则 $A\cap B=\{n\mid n$ 为正整数, n 能被 6 整除$\}$.

类似的方法，可以定义两个以上集合的交:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1,\ 且\ x \in A_2,\ \cdots,\ 且\ x \in A_n\}.$$

运算 III₁ 若 A、B 为两个集合，我们称集合

$$A - B = \{x \mid x \in A,\ x \overline{\in} B\}$$

为集合 A 与集合 B 的差.

运算 III₂ 若 Γ 为全集，A 为 Γ 的子集合，我们称集合

$$\bar{A} = \{x \mid x \in \Gamma,\ x \overline{\in} A\}$$

为 A 在 Γ 中的补集合，简称 $\bar{A}$ 为 A 的补集合.

补集合也可以记作: $\bar{A} = \Gamma - A$.

对于补集合可以理解为从全集合 Γ 中挖去集合 A 后，剩余的部分.

例 1 $\Gamma = \{x \mid x > 0$ 的整数$\}$，$A = \{x \mid x > 0$ 的整数，x 为奇数$\}$，则 $\bar{A} = \{x \mid x > 0$ 的整数，x 为偶数$\}$.

例 2 若 Γ 为全体实数的集合，A 为全体非负实数的集合，则 $\bar{A}$ 就是全体负实数的集合.

例 3 $\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 是平面上单位圆及其所围部分，$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. 则 $\bar{A} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 为平面上一个单位圆.

2. 集合运算的性质

前面我们定义了两个集合的并运算，交运算及一个集合关于全集合的补运算. 下面，我们来学习集合运算的几点性质.

(1) 若 A、B 为任意两个集合，则有

$$A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B;$$

$$A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B.$$

证明：先证 $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$.

对任意 $x\in A\cap B\Longrightarrow x\in A$, 同时 $x\in B$ （交运算定义），

$\therefore\qquad A\cap B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq B.$

再证 $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$.

对任意 $x\in A\Longrightarrow x\in A\cup B$(并运算定义)，

$\therefore\qquad A\subseteq A\cup B.$

同理，$B\subseteq A\cup B$.

（2）对于两个集合 A、B 下面三个关系等价：

1° $A\subseteq B$; 2° $A\cup B=B$; 3° $A\cap B=A$.

证明：先证 $1^\circ\Longrightarrow 2^\circ$.

任意 $x\in A\cup B\Longrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$.

又$\because\qquad A\subseteq B$,

即任一$x\in A\Longrightarrow x\in B$.

$\therefore$任意 $x\in A\cup B$, 有 $x\in B$.

即 $\qquad A\cup B\subseteq B.$

又$\because\qquad B\subseteq A\cup B$,

$\therefore\qquad A\cup B=B.$

再证 $2^\circ\Longrightarrow 3^\circ$.

任意 $x\in A\Longrightarrow x\in A\cup B$.

又$\because\qquad A\cup B=B$,

$\therefore$当 $x\in A\cup B$ 时，$x\in B$.

即 $\qquad x\in A$、$x\in B$ 同时成立.

$\therefore\qquad x\in A\cap B.$

$\therefore\qquad A\subseteq A\cap B.$

又$\because\qquad A\cap B\subseteq A$,

$\therefore$ $$A\cap B=A.$$

最后证 $3^\circ \Longrightarrow 1^\circ$:

$\because$ $A=A\cap B$, 当任意 $x\in A$时, 有 $x\in A\cap B$.

又$\because$ $$A\cap B\subseteq B,$$

$\therefore$ $$A\subseteq B.$$

(3) 德·莫干(De Morgan)定律:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

证明: 先证 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

任意 $x\in\overline{A\cup B}\Longrightarrow x\notin A\cup B$

$\Longrightarrow x\notin A$ 同时 $x\notin B$

$\Longrightarrow x\in\overline{A}$ 同时 $x\in\overline{B}$

$\Longrightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$.

$\therefore$ $$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}.$$

任意 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}\Longrightarrow x\in\overline{A}$ 同时 $x\in\overline{B}$

$\Longrightarrow x\notin A$ 同时 $x\notin B$

$\Longrightarrow x\notin A\cup B$

$\Longrightarrow x\in\overline{A\cup B}$.

$\therefore$ $$\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}.$$

得 $$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

再证 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

任意 $x\in\overline{A\cap B}\Longrightarrow x\notin A\cap B$

$\Longrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$

$\Longrightarrow x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$

$\Longrightarrow x\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

$\therefore$ $$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}.$$

再证 $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$.

任意 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}\Longrightarrow x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$

$\Longrightarrow x\overline{\in}A$ 或 $x\overline{\in}B$

$\Longrightarrow x\overline{\in}A\cap B$

$\Longrightarrow x\in\overline{A\cap B}$.

∴ $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$.

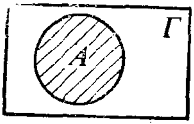
得 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

由以上证明可知，德·莫干定律成立．德·莫干定律给出的两个公式，是联系并、交、补三种运算的重要公式，应该熟练掌握.

1.2 集合间关系的几何表示

集合间的关系可以用下面的图形（文氏图）表示．其中设 Γ 为全集，用一个长方形表示，而 Γ 中的子集 A、B、……都用圆表示.

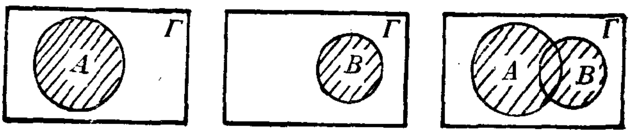
1. $A\subset\Gamma$.



A

（此图表示了 $A\subset\Gamma$，阴影部分表示集合 A；矩形内无阴影部分表示 $\overline{A}$.）

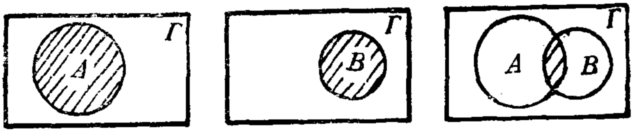
2. $A\cup B$.



A　甲　　B　乙　　$A\cup B$　丙

（丙图中，两圆内的阴影部分表示 $A\cup B$，说明 $A\cup B$ 包括两集合的所有元素.）

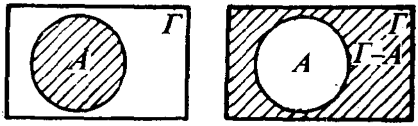
3. $A\cap B$.



A 甲 B 乙 $A\cap B$ 丙

（丙图中的阴影部分表示 $A\cap B$，说明它只是两集合的公共部分.）

4. $\Gamma-A$.

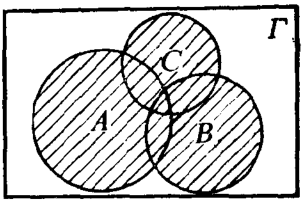


A $\Gamma-A$

（此图说明 $\Gamma-A=\bar{A}$.）

例 1 试给出集合 $A\cup B\cup C$ 的几何表示.

解:



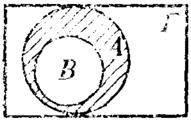
$A\cup B\cup C$

（图中阴影部分表示 $A\cup B\cup C$.）

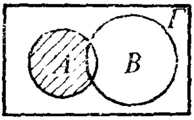
例 2 试给出 $A-B$ 的几何表示（A 和 B 不相等）.

解: 分几种情况给出（图中阴影部分表示运算结果）:

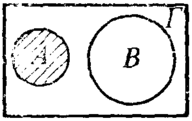
(1) $B\subset A$; (2) $B\cap A\neq\varnothing$; (3) $B\cap A=\varnothing$; (4) $A\subset B$.



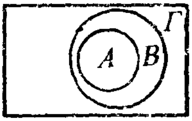
(1) $B\subset A$ 的情况



(2) $B\cap A\neq\varnothing$ 的情况



(3) $B\cap A=\varnothing$ 的情况

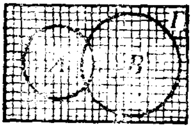


(4) $A\subset B$ 的情况

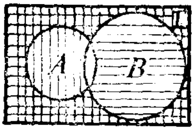
其中第(3)种情况表明当 $B\cap A=\varnothing$ 时，$A-B=A$；第(4)种情况表明，当 $A\subset B$ 时，$A-B=\varnothing$.

例 3 试给出德·莫干定律的几何表示.

解：(1) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

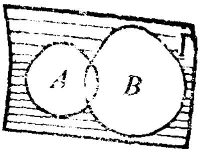


$\overline{A\cap B}$

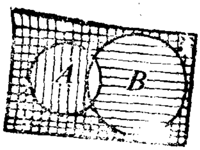


$\bar{A}\cup\bar{B}$

(2) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.



$\overline{A\cup B}$



$\bar{A}\cap\bar{B}$

(右图中横线阴影部分表示 $\bar{A}$，竖线阴影部分表示 $\bar{B}$.)

集合的几何表示可以帮助我们直观地理解集合间的关系，还可以检验集合间关系式的正确性. 因此，集合的几何表示是帮助我们理解和掌握集合的基本运算的一种有效的工具.

1.3 集合运算的基本性质

把全集记作 I，空集记作 $\varnothing$.

性质 1 （交换律） $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

性质 2 （分配律） $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

性质 3 $A\cup\varnothing=A$，$A\cap I=A$.

性质 4 （求补律） $A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\varnothing$.

以上四个性质是集合运算的基本性质，这几个性质有以下两个特点：

（1）由这四个性质可以推导出集合运算的其他重要性质. 因此，这四个性质也称为**集合运算的基本公式**；

（2）在这四个基本性质中，公式都是成对出现的. 如果将其中一个公式中 $\cup$、$\cap$ 运算与 $\varnothing$、I 进行下列变换：

$$\cup\longrightarrow\cap,\ \cap\longrightarrow\cup,\ \varnothing\longrightarrow I,\ I\longrightarrow\varnothing,$$

则可得到另一基本公式. 例如

$$\begin{array}{ccc} A\cup\varnothing=A & \qquad & A\cup\bar{A}=I \\ \ \ \downarrow\ \downarrow & & \downarrow\qquad\downarrow \\ A\cap I=A; & & A\cap\bar{A}=\varnothing. \end{array}$$

这种公式成对出现的性质不仅在基本公式中存在，而且在由基本公式导出的关系式（称为导出公式）中也存在. 这是

因为，推导这个导出公式的推导过程中的每一式子都进行这样的变换，由于基本公式是成对出现的，所以新的推导过程仍然成立，这样，由导出公式经变换所得的公式亦成立．变换所得的公式叫做原公式的**对偶公式**．

为了说明这个道理，我们举一个具体例子，在这个例子中将导出公式与导出公式的对偶公式的证明同时给出．

例 1　证明：$A\cup I=I$　　$A\cap\varnothing=\varnothing$．

证明： 显然，要证明的两个公式互为对偶公式．

证明：$A\cup I=I$	证明：$A\cap\varnothing=\varnothing$
$A\cup I=(A\cup I)\cap I$	$A\cap\varnothing=(A\cap\varnothing)\cup\varnothing$
(由性质 3)	(由性质 3)
$=I\cap(A\cup I)$(由性质 1)	$=\varnothing\cup(A\cap\varnothing)$　(由性质 1)
$=(A\cup\bar{A})\cap(A\cup I)$	$=(A\cap\bar{A})\cup(A\cap\varnothing)$
(由性质 4)	(由性质 4)
$=A\cup(\bar{A}\cap I)$(由性质2)	$=A\cap(\bar{A}\cup\varnothing)$　(由性质 2)
$=A\cup\bar{A}$　(由性质 3)	$=A\cap\bar{A}$　(由性质3)
$=I.$　(由性质 4)	$=\varnothing.$　(由性质4)

这样我们就可以得到一个重要的对偶定理：

定理　若某导出公式成立，则该导出公式的对偶公式也成立．

下面我们利用性质 1—4 来证明几个集合运算的重要性质．

例 2　证明：$A\cup A=A,\ A\cap A=A$．

证明： $A\cup A=(A\cup A)\cap I$　　(由性质 3)