目　录

第一章　预备知识

第一节　边界元数值方法及发展概述

边界元法(简称 BEM)可以说既是一种新方法,也是一种老方法。说它是一种新方法是指它作为一种解决工程问题的有效数值方法,只有十来年的发展史;说它是一种老方法,是指它的基本思想——用积分方程方法解微分方程的思想可以追溯到本世纪初。

早在 1905 年,Fredholm 就对积分方程的分类作了研究,并首先将其应用于弹性力学问题。此后,许多人对积分方程的性质作了严格的数学探讨,但是直到 40 年代末,除了一些特殊的问题,如第一边值问题外,积分方程求解边值问题的研究一直未有较明显的进展。一方面是由于解析求解这些问题极其困难,甚至是不可能的,另外由于它理论性较强,涉足的人不多,人们未能认识到它的潜在价值,所以一直未受到重视。

60 年代,一些苏联学者对积分方程尤其是奇异积分方程的理论作了更为深入的研究,从而为进一步应用边界积分方程方法开辟了道路。60 年代高速大型计算机的出现及其硬件的迅猛发展使离散求解积分方程成为可能,但当时由于有限元法(简称 FEM)的出现及迅速发展,加上其广泛的适应能力,使得人们的注意力几乎全部集中到它的身上,BEM 的发展暂时受到一定的影响,但这时已有一批开拓者开始尝试用

边界积分方程方法经离散后来求解某些特殊的工程问题。70年代随着 FEM 的日趋成熟及它的缺陷日益明显，人们开始寻找一种能够弥补其不足的新方法，于是将目光转向了边界积分方程方法（简称 BIEM），并逐步尝试将 FEM 中发展起来的一些离散技巧运用于边界积分方程，从而使得 BEM 真正脱颖而出，成为工程分析的一种新的有效工具。有关 BEM 的全面而详细的历史回顾请见参考文献[1]，而边界元研究各领域的具体进展情况，可见每年一度的国际边界元学术会议文集。

BEM 是在综合 FEM 和经典的边界积分方程方法基础上发展起来的，它把 FEM 的离散技巧引入经典的 BIEM 中，通过一个满足场方程的奇异函数——基本解作为权函数，将区域积分化为边界积分，并在边界上进行离散处理。其主要特点：①将问题的维数降低一阶，从而使得数据准备工作量及求解自由度大为减少；②由于离散仅在边界上进行，故误差只产生在边界上，区域内的物理量仍由解析公式求出，因此它拥有较高的计算精度；③计算域内物理量时，无需一次全部求得，只需计算给定点的值，从而避免了不必要的计算，提高了效率；④对应力集中、无限域等问题，该方法处理尤为适用。

边界元法有直接用边界量作为求解变量来建立边界积分方程的直接法和以虚设边界的虚载荷作为求解变量形成边界积分方程的间接法两种，但由于间接法中虚设的分布函数并不具有明确的物理意义，因此工程已很少应用间接法，因而本书也只讨论直接法。

BEM 的研究在我国大约开始于 1978 年，当时以清华大学杜庆华教授为首的一些从事计算力学研究的力学工作者把研究领域从 FEM 转到了 BIEM-BEM 方面来。他们开始的工作采用了 Rizzo 在 1967 年提出的思想，并参考了 Cruse 和 Rizzo

1975 年主编的美国机械工程学会的一本专门文集中的例子。因此，我国 BEM 方面的工作是从固体力学方面的工程应用开始的。

近年来，在我国已举行过三次边界元法在工程中应用的学术会议。有关国内在这方面的研究动态和进展，可见参考文献[2、3、4]。

由于边界元方法的突出优点，正引起了愈来愈多的科技工作者的注意和兴趣，可以预计这种方法将会在各个方面得到迅速的发展。但任何一种方法都不可能十全十美，对边界元法来讲也不例外。例如，它得出的线性代数方程组的系数矩阵是一个满的、不对称的矩阵，这就不便于应用已在 FEM 中发展成熟的处理稀疏对称阵的线代方程组的一系列有效解法。当问题的规模较大时，解此满而非对称阵时显然占内存较多，效率相对较低。再则，应用 BEM 必须事先知道所求问题的控制方程的基本解，但从目前看，非线性问题的基本解不易得出，另外当物体严重不均质时将会大大影响 BEM 的应用范围和效果，因此综合 BEM 的潜在优点和目前存在的不足可以认为 BEM 在未来的研究工作中主要是针对以下几个方面进行：

(1)关于 BEM 的基本理论，包括对基本解、方法的收敛性及误差分析等各方面进行理论研究。

(2)在数值计算方法和程序设计方面，如何在最经济的条件下获得高精度的解，它包括对各种奇异积分的有效处理和采用何种最佳方案来形成有效的计算机软件。

(3)如何处理满的、非对称系数矩阵，探讨这类线代方程组的有效而迅速的解法。

(4)扩大 BEM 的应用范围，将其广泛应用于诸如与时间相关的问题，非线性问题等。

(5)将 BEM 应用于结构形状优化等能充分发挥 BEM 优势的领域。

(6)与 FEM 取长补短，耦合 FEM 和 BEM，形成一种更为有效的数值分析工具。

第二节　加权余量法

把泛函极值条件的积分方程经过分部积分转化为欧拉方程——微分方程，然后解微分方程得到问题的解，这就是古典方法。但工程中的很多微分方程，由于研究对象的形状复杂，边界条件的特殊性以及欧拉方程的导数阶次为积分方程阶次的两倍，使得用微分方程的直接解法很难求解，于是转向用直接解变分的积分方程的近似计算方法。这些近似方法有数值积分法、差分法、里兹法、加权余量法、有限元法以及边界元方法。

由于加权余量法(简称加余法)的内在规律性以及它的迅速发展，使得它有可能更广义的解释其它各种近似计算方法并具有明确的物理概念。目前的趋势正是加余法日益作为各种近似方法的最恰当的统一途径而向前发展。基于这一理由，本节首先对该方法加以概括性的阐述，为采用加余法统一推导 BEM 公式及分析提供数学基础。

加余法是假设一试函数(或称基函数)作为微分方程的近似解，在近似解中试函数是给定的，但参数式是未知的。将这个近似解代入原控制方程中若不能满足原方程，便产生一误差——残值，于是组成一个残值在平均意义之下，更确切地说，残值乘以权函数。然后在积分意义下使它等于零的一系列代数方程组，由此确定未知函数，获得问题的解。

加余法的一般表述如下：

控制微分方程：$L(u_0)-q=0 \quad \in \Omega$ (1-1)

基本边界条件：$G(u_0)-g=0 \quad \in \Gamma_1$ (1-2)

自然边界条件：$S(u_0)-p=0 \quad \in \Gamma_2$ (1-3)

其中 $L(u_0)$，$G(u_0)$为各自在域内 Ω 上和边界 Γ_1 及 Γ_2 上的函数。对势问题而言，$G(u_0)$即为势函数 u，而 $S(u_0)$则为势的法向导函数 $\partial u/\partial n$，q、g、p 分别为域内及给定边界上与 u_0 无关的量，整个边界 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$，u_0 为精确解。

选择近似解 u 为：

$$u=\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i \tag{1-4}$$

其中，a_i 为待定的未知参数，试函数 ϕ_i 可以满足基本边界条件，也可以满足或不满足所有边界条件，根据不同边界条件的满足情况，可有不同的加余法表达式。

(1)当 ϕ_i 满足所有边界条件时，残值只在域内存在，即：

$$R_I=L(u)-q\neq 0$$

于是残值方程为：

$$\int_\Omega [L(u)-q]W_I\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega [L(a_i\phi_i)-q]W_I\mathrm{d}\Omega=0 \tag{1-5}$$

(2)当 ϕ_i 满足基本边界条件式(1-2)，但不满足自然边界条件式(1-3)时，其残值不仅在域内存在 R_I，同时在边界 Γ_2 上也存在 R_{B_2}，即：

$$R_I=L(u)-q\neq 0$$

$$R_{B_2}=S(u)-p\neq 0$$

于是残值方程为：

$$\int_\Omega [L(a_i\phi_i)-q]W_I\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_2}[p-S(u)]W_{B_2}\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-6}$$

(3)ϕ_i 不满足任何边界条件时，残值方程为：

$$\int_{\Omega}[L(a_i\phi_i)-q]W_i\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_2}[p-S(u)]W_{B_2}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}[G(u)-g]W_{B_1}\mathrm{d}\Gamma=0 \quad (1\text{-}7)$$

式(1-7)就是加余法表达式的通用形式。

加余法的精度完全依赖于试函数 ϕ_i 的选择及权函数 W 的选择。

当试函数满足所有边界条件，但不满足域内方程时称为域内余量法，此即式(1-5)。当试函数已满足域内控制方程，而不满足边界条件时，称为边界余量法，其残值方程由式(1-7)令第一项为零而得：

$$\int_{\Gamma_2}[p-S(u)]W_{B_2}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}[G(u)-g]W_{B_1}\mathrm{d}\Gamma=0 \quad (1\text{-}8)$$

当选择的试函数既不满足域内控制方程，又不满足边界条件时称为混合余量法，如式(1-6)、(1-7)。目前常用的近似计算方法中，有限元法属于域内余量法，边界元法是边界余量法中的一种，间接 BEM 则为典型的边界余量法。

选择不同的权函数，即可得到不同的近似方法，例如在域内余量法中，选择不同的权函数就可得到配点法、子域法、最小二乘法、矩量法、伽辽金法五种常见的方法。其中伽辽金法是一种应用很广的加余法，用它即可导出 FEM 的基本方程。有关这方面的论述可参见有关专著。

下面重点讨论近似函数既不满足域内控制方程，又不满足边界条件的加余法表达式(1-7)，为具体起见以二维拉氏方程为例：

域内控制方程：$\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0 \qquad \in\Omega \qquad (1\text{-}9)$

基本边界条件：$u_0=\bar{u} \qquad \in\Gamma_1 \qquad (1\text{-}10)$

自然边界条件： $\dfrac{\partial u_0}{\partial n}-\bar{p}=0 \qquad \in \Gamma_2$ (1-11)

其中，u_0，$\bar{u}$、$\bar{p}$ 分别为精确解、边界上的给定值及导数值。

所选择的函数为：$u=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\phi_i(x,y)$ (1-12)

因 $u\neq u_0$，则式(1-12)代入式(1-9)、(1-10)、(1-11)中均不能满足等于零，将拉格朗日乘子法应用于加余法中得出新的误差方程：

$$R=\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)W\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}\lambda_1(u-\bar{u})\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_2}\lambda_2\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{p}\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{1-13}$$

式中 W 为权函数，λ_1、λ_2 为暂时未知的拉格朗日乘子，它有明确的物理意义，下面将逐一明确。

对上式第一项进行分部积分一次得：

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)W\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial y}n_y\right)W\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{1-14}$$

再对式(1-14)第二项分部积分一次得：

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)W\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial y}n_y\right)W\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma\left(\frac{\partial W}{\partial x}n_x+\frac{\partial W}{\partial y}n_y\right)u\mathrm{d}\Gamma+\int_\Omega u\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial^2 y}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{1-15}$$

式(1-14)、(1-15)进一步可写成：

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)W\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}W\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{1-16}$$

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)W\mathrm{d}\Omega$$
$$=\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}W\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma}\frac{\partial W}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}u\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{1-17}$$

上两式分别代入式(1-13)可得：

$$R=-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}\lambda_1(u-\bar{u})\mathrm{d}\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_2}\lambda_2\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{p}\right)\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}W\mathrm{d}\Gamma \tag{1-18}$$

$$R=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)u\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}\lambda_1(u-\bar{u})\mathrm{d}\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_2}\lambda_2\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{p}\right)\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma}W\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma}u\frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma \tag{1-19}$$

式(1-18)、(1-19)称为以弱形式表示的加余法，两式中 u 的导数的阶次分别降了一阶和二阶，而 W 的阶次反而升了一阶和二阶。这样弱形式的加余法中，选择近似函数 u 时从数学上来说就可放松要求(这主要指对 u 的连续性)。

当函数的内积空间中两组函数 u 和 w、算子 L 满足如下条件时：

$$\int_{\Omega}uL(w)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}wL(u)\mathrm{d}\Omega+\text{边界项} \tag{1-20}$$

算子所满足的性质称为自伴性或对称性，如微分方程是偶阶次，那么算子的自伴性总是存在的。L 称为自伴算子，显然式(1-19)正具有这样的性质。

将误差函数 R 看成泛函，把式(1-19)作为 u、λ_1、λ_2 的泛函，求一阶变分得：

$$\delta R=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\delta u\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}\lambda_1\delta u\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}(u-\bar{u})\delta\lambda_1\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_2}\lambda_2\frac{\partial\delta u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{p}\right)\delta\lambda_2\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma}\frac{\partial\delta u}{\partial n}W\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma}\frac{\partial W}{\partial n}\delta u\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-21}$$

考虑到 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ 得：

$$\delta R=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\delta u\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}\left(\lambda_1-\frac{\partial W}{\partial n}\right)\delta u\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_1}(u-\bar{u})\delta\lambda_1\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_2}(\lambda_2+W)\frac{\partial\delta u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{p}\right)\delta\lambda_2\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\delta u}{\partial n}W\mathrm{d}\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_2}\frac{\partial W}{\partial n}\delta u\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-22}$$

式(1-22)给出如下条件：

$$\begin{aligned}
&(1)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0 && \in\Omega\\
&(2)\lambda_1=\frac{\partial W}{\partial n} && \in\Gamma_1\\
&(3)u-\bar{u}=0 && \in\Gamma_1\\
&(4)\lambda_2=-w && \in\Gamma_2\\
&(5)\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{p}=0 && \in\Gamma_2\\
&(6)\frac{\partial\delta u}{\partial n}=0\text{ 或 }W=0 && \in\Gamma_1\\
&(7)\frac{\partial W}{\partial n}=0\text{ 或 }\delta u=0 && \in\Gamma_2
\end{aligned} \tag{1-23}$$

上式中(2)、(4)式给出了拉格朗日乘子 λ_1、λ_2 的物理意义。(3)、(5)两式表明：误差方程的泛函式 R 中不带约束条件，也即式(1-13)是约束条件已被满足的误差方程。(1)式表

明当权函数 W 取为方程原函数时($W=u$)满足控制方程的条件，最后两式在一般情况下自动得到满足。

将 λ_1、λ_2 的表达式代入式(1-13)，并使其误差 $R=0$ 即得拉氏方程的加余法通用表达式：

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)W\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial W}{\partial n}(u-\bar{u})\mathrm{d}\Gamma$$
$$-\int_{\Gamma_2}W\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{p}\right)\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-24}$$

式(1-24)即为式(1-7)的具体展开形式。

把 λ_1、λ_2 代入弱形式表示的加余法式(1-19)中得：

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)u\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_2}u\frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_1}\bar{u}\frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}W\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_2}\bar{p}W\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-25}$$

显然上式放松了对 u 的连续性要求，但对 W 有两阶导数可积的连续性要求。

以上推导出的两式可写成通式如下：

$$\int_\Omega(\nabla^2 u)W\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial W}{\partial n}(u-\bar{u})\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_2}W\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{p}\right)\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-26}$$

$$\int_\Omega(\nabla^2 W)u\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}W\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_2}\bar{p}W\mathrm{d}\Gamma$$
$$-\int_{\Gamma_2}u\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_1}\bar{u}\frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-27}$$

以上通式对二维、三维皆能适用，这就是以后边界积分方程推导中常用的基本公式及相应的推导过程。

第三节　基　本　解

在研究各种定解问题时，常常用到控制微分方程的基本解，这种解都是满足方程而在某一点具有奇异性的解。

在 BEM 中，把微分方程定解问题转化为边界积分问题求解过程中，微分方程的基本解起着很大的作用。本节对基本解的定义及概念的物理解释作一概述。

1. δ 函数的定义

定义：δ 函数是满足下列性质的函数：

$$(1)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\begin{cases}0 & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0\\ \infty & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0\end{cases} \tag{1-28}$$

$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{r}=1 \tag{1-29}$$

据此定义，δ 函数可作为单位集中量的密度函数。由于该函数首先由狄拉克(Dirac)提出，所以它亦称为狄拉克函数。它的引入为物理学领域中遇到的集中量的描述提供了方便，下面基本解正是 δ 函数涉及的范围。

δ 函数的一个主要性质是：

$$\int_{\Omega}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}_0) \tag{1-30}$$

有关 δ 函数的其它性质及论述详见数理方法教材中相应内容。

2. 基本解的定义及物理解释

定义：对于线性微分方程：

$$L(u)=f(\boldsymbol{r}) \tag{1-31}$$

其中 L 为线性微分算子，称满足方程：

$$L(u)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{1-32}$$

的解 $U(r,r_0)$ 为方程的基本解，有时也称为下列方程：

$$L(u) = 0 \tag{1-33}$$

的基本解。事实上，据线性微分方程的迭加原理有：

$$U(r) = \int u(r,r_0)f(r_0)\mathrm{d}r_0 \tag{1-34}$$

满足方程 $L(u)=f(r)$。

因此对基本解也常定义如下：如果 $U(r,r_0)$ 在 $r\neq r_0$ 时满足齐次方程 $L(u)=0$，而对任何足够光滑的函数 $f(r)$，由积分式(1-34)所表示的函数 $u(r)$ 满足方程式(1-30)，那么就称 $U(r,r_0)$ 为方程式(1-30)的基本解。

由前面分析及定义可看出，基本解实际上是描述一个集中量所产生的效果。对一般非齐次方程 $L(u)=f$，如果 f 是连续分布的量，那么由于线性迭加原理，常将一连续分布的量看成无数个集中量的迭加，而连续量所产生的效果，则由这些集中量中各自产生的效果迭加，而集中量产生的效果即为基本解。针对不同的研究对象，基本解有不同的解释，例如力学中它描述了一集中力作用下产生的位移，传热学中基本解则描述了一个集中点热源作用下在域中产生的温度场。

参 考 文 献

1 Mackerle, J, Brebbia C A. The Boundary Element Reference Book. Computational Mechanics Pub, 1988.

2 杜庆华等. 我国工程中边界元法研究的十年. 力学与实践, 1988, 4：1

3 姚寿广. 边界元法在热传导问题中的应用研究及动力机械热负荷分析. 哈尔滨船舶工程学院硕士学位论文, 1990.

4 杜庆华主编. 全国第三届工程中的边界元法会议论文集. 武汉：中国力学学会等主办, 1991.

第二章　稳态热传导问题的边界元法

本章介绍边界元数值方法应用于二维平面及轴对称稳态热传导问题的研究，所得结论可完全推广应用于由拉普拉期方程或泊桑方程描述的所有位势问题。

第一节　稳态热问题边界元法的基本列式

稳态热传导问题的控制方程由泊桑方程表述：

$$\nabla^2 T = b \qquad \in \Omega \tag{2-1a}$$

工程中常遇到的是不存在内热源的情况，此时问题的描述方程即为拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 T = 0 \qquad \in \Omega \tag{2-1b}$$

下面以式(2-1b)为出发点推导出边界元的基本列式，有关源项的处理放在后面专门阐述。

边界条件：

$$T = \overline{T} \qquad \in \Gamma_1 \tag{2-2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{a}{k} T = \bar{q} \qquad \in \Gamma_2 \tag{2-3}$$

式中，k、a分别是固体的导热系数和固体与流体之间的对流换热系数，总边界 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$。当 $a=0$ 时，q 就是负的已知热流量，式(2-3)即为第二类边界条件(简写 2nd. B. C)，当 $\bar{q} = aT_f/k$(T_f 为环境温度)时，式(2-3)就给出第三类边界条件