高等数学习题集

[苏] Я. С. 布格罗夫
C. M. 尼科尔斯基 著

鲁 石 译
冯汉桥 校

陕西人民教育出版社

Higher Mathematics

Ya. S. Bugrov

S. M. Nikolsky

a collection of problems

Translated from the Russian by Leonid Levant

MIR PUBLISHERS MOSCOW 1984

高等数学习题集

〔苏〕 R. C. 布格罗夫
C. M. 尼科尔斯基 著

鲁 石 译

冯汉桥 校

陕西人民教育出版社出版发行

（西安长安南路吴家坟）

陕西省新华书店经销 西安交通大学印刷厂排版

户县大王印刷厂印刷

850×1168毫米1／32开本 8.25印张 205千字

1988年7月第1版 1988年7月第1次印刷

印数：1—6.948

ISBN 7—5419—0231—4／G·194

定价：2.30元

译者的话

本习题集于1982年由莫斯科科学出版社用俄文出版。作者是苏联现代著名数学家Я. С. 布格罗夫教授和С. М. 尼科尔斯基院士。该书是为配合他们著的下列三本教科书而编辑的：《线性代数和解析几何基础》；《微积分》；《微分方程、重积分、级数及复变函数论》。这三本教科书和本习题集构成现行苏联工科学生的高等数学课程的一套完整教材。其内容与我国理工科学生的高等数学课程的内容基本一致。

本习题集大约有1200道习题。其特点是：选题新颖、类型全面。虽然题量不大，但既有作为巩固基本概念和基本运算的习题，又有作为提高解题技巧的习题。全部习题都有答案或提示，许多典型习题都有详细解答，为读者作了解题示范。

本习题集可作为我国理工科学生、函授生、电大生以及自学者学习高等数学的参考书，对高等数学教师也是一本好的教学参考资料。

1984年leonid levant先生将本习题集的俄文版译成英文，并由莫斯科《和平》出版社出版。现在我们又根据英文版把它译成中文。为了更好地适应我国的情况，对原文作了少量删减；另外还对原文中的一些印刷错误作了必要的更正。

译　者

1987.7.

原　　序

为了配合我们的《高等数学》丛书这部教科书，我们编辑了这本习题集。在本习题集中，这些教科书的编号为：

[1]　——微积分；

[2]　——线性代数与解析几何基础；

[3]　——微分方程、重积分、级数及复变函数论。

在本书各节的开头指出了能查到有关理论资料的上述教科书的章节。

每一节包含学习该课题所需要的最少量的习题。我们建议把奇数编号的习题放在课堂中解答，把偶数编号的习题留给学生在家中独立地解答。

教科书[1]——[3]中的习题也可作练习用，这些习题没有包含在本习题集中。

亚科夫·S·布格罗夫

塞　杰·M·尼科尔斯基

封面设计：徐未未

ISBN 7－5419－0231－4／G·194
定价：2.30元

目　　录

第一章　分析初步

第二章　积　　分

第三章　线性代数和解析几何基础

第四章　多元函数

第五章　级　　数

第六章　微分方程

第七章 重积分

第八章 向量分析

第九章 傅里叶级数和傅里叶积分

第十一章 复变函数

第十二章 运算微积

第一章　分析初步

§1.1.　实数．集合

用数学归纳法证明下面的关系：

1.　$1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$。

2.　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$。

3.　$(1+x)^n \geqslant 1+nx$，$x>-1$。

4.　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$。

5.　设集合 A 是由一组青少年组成，集合 B 是由该组青少年中的女孩组成。

求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$。除此之外，还要研究 A 或 B 是空集时的情况。

6.　设 $A=\{2n\}$，$B=\{2n+1\}$。求 $A+B$，$A\cdot B$，$A\setminus B$（n 是自然数）。

7.　在下列各情况中，a 大还是 b 大？

$a=1.\dot{1}23451\dot{2}$，　　$b=1.\dot{1}234\dot{5}$；

$a=1.\dot{1}230\dot{2}$，　　$b=1.\dot{1}2\dot{3}$；

$a=1.\dot{1}2341\dot{2}$，　　$b=1.\dot{1}23\dot{4}$。

8.　实数列

$a_1=0.1010101010\cdots$，

$a_2=0.1100110011\cdots$，

$a_3=0.111000111000\cdots$，

$a_4=0.111100001111\cdots,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$a_n=0.\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个}}1\cdots10\cdots0\cdots,$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

趋近于哪一个实数 a？

9. 求实数 $a=0.\dot{1}\dot{2}$ 与 $b=0.\dot{1}\dot{3}$ 的和。

10. 已知集合 $A=[2,5]$, $B=(3,6)$。
求 $A+B$, AB, $A\setminus B$。

11. 解下列不等式：

(a) $|x+3|<0.1$;　　(b) $|x-3|\geqslant10$;

(c) $|x|>|x+3|$;　　(d) $|3x-1|<|x-1|$;

(e) $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right|\leqslant1$。

12. a 和 $-a$ 两个数哪个大？

13. 设 $a\geqslant0$，对于什么样的数 b 下列关系式成立？

(a) $|a+b|=|a|+|b|$;

(b) $|a-b|=|a|+|b|$;

(c) $|a+b|<|a|+|b|$;

(d) $|a-b|<|a|+|b|$。

14. 求下列各数的模

(a) $\ln\dfrac{1}{e}$;　　(b) $\sin\dfrac{3\pi}{2}$;　　(c) $\cos\dfrac{7\pi}{4}$。

§1.2. 数列的极限

15. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

并且对于每个 $\varepsilon>0$，求出数 $n_0=n_0(\varepsilon)$，使得

当 $n>n_0$ 时 $$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon.$$

填表：

ε	0.1	0.001	0.00001	…
n_0				

求习题 16 至 19 中的极限。

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^6 n}{n^2+1}$.　　17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha\sin(n!)}{n+1}$　$(0\leqslant\alpha<1)$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

20. 证明，当

$$\alpha_n=\frac{n}{n^3+1};\qquad \alpha_n=\frac{1}{n!};\qquad \alpha_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

时，变量 α_n 是一个无穷小量。

21. 证明，当

$$\beta_n=(-1)^n n^2;\qquad \beta_n=2^{\sqrt{n}};\qquad \beta_n=\ln(n+1)$$

时，变量 β_n 是一个无穷大量。

22. 数列 $x_n=n^{(-1)^n/2}$ 是无穷大吗？

证明习题 23 和 24 中的等式。

23. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+10}-\sqrt{3n})=0$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{2n^2+3n+1}=\dfrac{3}{2}$.

用单调数列的极限存在定理证明下面的数列是收敛的（习题 25 和 26）：

25. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

26. $x_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdots\frac{n+1}{2n-1}$.

27. 求以下各数列的最大项：

$$x_n=\frac{n^2}{2^n};\qquad x_n=\frac{\sqrt{n+1}}{10+n}.$$

28. 求以下各数列的最小项：

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;\qquad x_n=n^2-9n-10.$$

29. 设 $x_n=1-\frac{1}{n}$; $\quad x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{2+(-1)^n}{3}$ $(n\in N)$.

求 $\inf x_n$, $\sup x_n (n\in N)$, $\varliminf x_n$, $\varlimsup x_n$.

30. 哪些数是数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{3},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{4},\ -1,\ 1,\ \cdots$$

的部分极限？

所谓一个有界数列的部分极限就是该数列的收敛子列的极限。根据波尔察诺——维尔斯特拉斯定理，在有界数列中一定存在这样的子数列。

应用关于收敛性的柯西判别法，证明下面的数列是收敛的（习题 31 至 33）：

31. $x_n=\frac{\sin 1^2}{2}+\frac{\sin 2^2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^2}{2^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin k^2}{2^k}$.

32. $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

33. $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos k!}{k(k+1)}$.

§1.3. 函数。函数的极限

求函数 $y=f(x)$ 的定义域 E 和值域 $E_1=f(E)$（习题 34 和 35）。

34. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$，　　35. $y=\sqrt{2+3x-x^2}$。

36. 设：$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$。

求 $f(0)$，$f(x+2)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x)+1$，$\dfrac{1}{f(x)}$。

作出习题 37 至 41 中的函数的图形。

37. $y=8x-2x^2$。　　38. $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$。

39. $y=-x^2+2x-1$　　40. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$。

41. $y=\dfrac{3x+4}{4x-3}$。

42. 设：在 $[-2, 5]$ 上，$f(x)=x^2$；

在 $(0, 3]$ 上，$\varphi(x)=x+\dfrac{1}{x}$，

求各函数的值域的下界和上界。

提示。在集合 $(0, 3]$ 上，$\varphi(x)\geqslant 2$。

43. 作函数 $f(x)=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant x}\{\sin t\}$；$\varphi(x)=\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant x}\{\sin t\}$ 的图形。

求习题 44 至 48 中的函数的极限。

44. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+3x^3}$；

(e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;　(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-1}{2x^2-x+4}\right)^x$;

(g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

(h) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

(i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}]$。

45. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;　(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}4x}{x}$。

46. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$。

47. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$;　(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{a}{x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$。

48. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$;　(b) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$　$(a>0)$。

研究习题 49 至 56 中的函数的连续性，用图表示这些函数，并且判断间断点的性质。

49. $f(x)=|x-1|$。　50. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ A\ , & \end{cases}$

51. $f(x)=\mathrm{sgn}(x^2-2x-3)$。

52. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

53. $y=\dfrac{x}{1+x}$.

54. $y=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

55. $y=\begin{cases} 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 0<x\leqslant 2. \end{cases}$

56. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leqslant 0, \\ a+x, & x>0. \end{cases}$

证明习题 57 至 58 中的函数 $f(x)$在$[a, b]$上一致连续，即，$\forall \varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$（与区间中的点无关），使得当$|x_1-x_2|<\delta$时，总有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

57. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 20-8x, & 2\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$

58. $f(x)=x^3$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

59. 求函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$的反函数。

令 $x\to 0$，分离出 Ax^m 形式的主项（习题 60 和 61）

60. $f(x)=3x+x^4$.　　61. $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$.

§1.4. 导数

62. 设 $f(x)=2-2x+x^3$，求 $f'(0)$，$f'(2)$。

63. 设 $f(x)=x\cdot\arcsin\dfrac{x}{x+1}$，求 $f'(0)$，$f'(1)$。

求习题 64 至 71 中的函数的导数。

64. $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$.

65. (a) $y=x+\sqrt[3]{x}$;　　(b) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

(c) $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$;　　(d) $y=x\sqrt{1+x^2}$

(e) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;　　(f) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(g) $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$;　　(h) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

(i) $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$;　　(j) $y=\frac{1}{\cos^n x}$;

(k) $y=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$;

(l) $y=e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$;　　(m) $y=x^{a^a}+a^{x^a}\quad(a>0)$;

(n) $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(o) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

66. $y=\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

67. $y=e^{-x^2}$.

68. (a) $y=\sin x^2$;　　(b) $y=\sin^n x$;

(c) $y=\sin^3 x^7$;　　(d) $y=\cos(\sin x)$;

(e) $y=\cos x^2$;　　(f) $y=\cos^2 x^4$.

69. (a) $y=\arcsin\frac{x}{a}$;　　(b) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$;

(c) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(d) $y=\arcsin(\sin x)$;

(e) $y=\arccos\frac{x}{a}$;　　(f) $y=e^{x^2+x}$.