从哥德巴赫猜想谈起

CONGGEDEBAHECAIXIANGTANQI

王连笑

天津人民出版社

从哥德巴赫猜想谈起

王 连 笑

天 津 人 民 出 版 社

从哥德巴赫猜想谈起

王连笑

*

天津人民出版社出版
(天津市赤峰道124号)
天津人民出版社印刷厂印刷　天津市新华书店发行

*

开本787×1092毫米 1/32 印张 2 3/4 字数47,000
一九七八年十二月第一版
一九七八年十二月第一次印刷
印数1—200,250

统一书号：7072 · 1081

每册：0.19 元

装帧设计：刘 丰 杰

统一书号：7072·10
每 册 0.19

目　　录

我国著名的数学家陈景润，对“哥德巴赫猜想”问题进行精心解析和科学推算，在这个数论问题的研究方向上取得了世界的领先地位，为我国赢得了国际声誉。

但是，什么是“哥德巴赫猜想”呢？“哥德巴赫猜想”就是指德国数学家哥德巴赫在二百多年前提出的：“每一个大于或等于6的偶数都可以表示为两个奇素数之和，每一个大于或等于9的奇数都可以表示为三个奇素数之和。”这样一个未经论证的猜想。这个猜想中涉及到一些数学概念，例如奇数、偶数、素数等等。那么，什么是奇数呢？什么是偶数呢？什么是素数呢？奇数和偶数有些什么简单的性质呢？奇数、偶数和素数之间有什么关系呢？“哥德巴赫猜想”是怎么一回事呢？以数学家陈景润命名的“陈氏定理”又是什么呢？许多同学都对这些问题感兴趣，也很想了解这些问题，这本小册子就要围绕着与“哥德巴赫猜想”有关的数学概念，做一些极其初等而又十分粗略的介绍，并且利用一些看起来十分明显又十分简单的性质，分析和解决一些稍微困难的数学题目。

1. 奇数和偶数

数起源于“数”，人类在生产实践中，对于物体需要一个一个地数，这样，就产生了自然数：

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

自然数又叫做正整数。

自然数的全体组成一个自然数集合，这个集合中的每一个自然数叫做自然数集合的一个元素。显然，自然数集合中有无限多个元素，因此是一个无限集合。

事物都是一分为二的。自然数集合也可以一分为二。例如，我们可以这样分：

把

$$1, 3, 5, 7, \cdots, 2k-1, \cdots$$

放在一起，这些数叫做奇数，也就是我们平常所说的单数。这些奇数有一个共同特征，这就是它们中的每一个数用2除时，余数都是1。奇数的全体组成一个奇数集合。

另外，把其余的数

$$2, 4, 6, 8, \cdots, 2k, \cdots$$

放在一起，这些数叫做偶数，也就是我们平常所说的双数。这些偶数有一个共同特征，这就是它们中的每一个

数都能被 2 整除。偶数的全体组成一个偶数集合。

奇数和偶数是对立的统一。它们是对立的，例如，一个自然数或者是奇数，或者是偶数，二者必居其一，而决不能既是奇数又是偶数。一个奇数与一个偶数决不能相等。奇数和偶数在一定条件之下又可以转化，例如，奇数加 1 就变成了偶数，偶数加 1 就变成了奇数。奇数和偶数同处于自然数集合这个统一体中。奇数和偶数的相互转化又构成了自然数的全体，例如 1 是奇数，$1+1=2$ 是偶数，偶数 $2+1=3$ 又是奇数，这样继续下去，从 1 出发，加 1 成偶数，再加 1 成奇数，再加 1 又成偶数，无限地做下去，就可以得到全体自然数。

实际上，除了自然数之外，0 是偶数，负整数也可以分为负奇数和负偶数。

通常，奇数用 $2k+1$ 来表示，其中 k 为整数。偶数用 $2k$ 来表示，其中 k 为整数。

奇数和偶数有下面一些简单的性质：

（1）偶数与偶数的和与差是偶数，即

$$偶数 \pm 偶数 = 偶数$$

奇数与奇数的和与差是偶数，即

$$奇数 \pm 奇数 = 偶数$$

奇数与偶数的和与差是奇数，即

$$奇数 \pm 偶数 = 奇数$$

或 $$偶数 \pm 奇数 = 奇数$$

（2）任意多个偶数的和仍为偶数。

奇数个奇数的和是奇数，偶数个奇数的和是偶数。

（3）奇数与奇数的积是奇数，即

$$奇数 \times 奇数 = 奇数$$

特别地，奇数的任意非负整数(即正整数或零)次幂是奇数，即

$$(奇数)^n = 奇数 \quad (n为非负整数)$$

（4）任意整数与偶数的积是偶数，即

$$整数 \times 偶数 = 偶数$$

特别地，n（n是自然数）个偶数的积是2^n的倍数。相邻两个整数的积是偶数。

奇数和偶数的这些性质是很显而易见，我们就不再证明了。

这里顺便提出一个很有趣的问题：在这节的开始，我们曾说，自然数集合分成了两部分，一部分是奇数集合，一部分是偶数集合，那么，奇数和偶数的个数与自然数的个数一样“多”吗？大家可能觉得，这个问题提得多么古怪：这不是很明显吗？把自然数集合一分为二成为奇数集合和偶数集合，就象把一个苹果一切两半一样，当然整个苹果比半个苹果大，全量比部分大。因此，自然数的个数比奇数的个数多，也比偶数的个数多。

然而，这个结论却下得过早，让我们动脑筋思考一下吧。

怎样比较两种东西的个数或者说是两个集合中元素

的个数哪一个多哪一个少呢？下面举一个例子。让我们比较一下教室里的椅子数与这个教室里学生的人数哪一个多。如果我们分别数一数，当然可以。但是，由于我们的问题是比较椅子数和学生数哪一个多，而不是椅子和学生的具体数目，因此，还可以采用这样的方法，就是让这个教室的每一个学生坐一把椅子，而且只许每人坐一把椅子，既不许不坐，也不许一人坐两把。然后，我们看一看，如果教室里有空椅子而没有学生来坐，说明椅子多，学生少；如果教室里有的学生没有椅子坐，说明学生多，椅子少；如果既没有学生没有椅子坐，也没有空椅子，就说明椅子和学生一样多。这种办法就使我们建立了一种对应，让学生和椅子对应起来。下面我们用这种学生坐椅子的办法来看一看自然数的个数与偶数的个数哪一个多。前面我们已经说过，自然数有无限多个，因此，自然数集合是一个无限集合。偶数也有无限多个，因此，偶数集合也是无限集合。下面我们建立自然数与偶数的对应，让自然数 1 和偶数 2 相对应，自然数 2 和偶数 4 相对应，自然数 3 与偶数 6 相对应，……一般地，自然数n与偶数$2n$相对应，即有下面的对应关系：

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \cdots, & n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & \cdots, & 2n, & \cdots \end{array}$$

我们可以清楚地看到，在这样建立的对应关系中，所有

的自然数与所有的偶数都相互对应起来了，任何一个自然数都能找到相对应的偶数，反过来，任何一个偶数都能找到相应的自然数。用上面那种比较椅子数和学生数的办法，可以很快得出结论：自然数与偶数一样“多”，同样，自然数与奇数也一样“多”。

自然数集合是全体，偶数集合是自然数集合的一部分，全体和一部分竟然“相等”了，这是我们刚才得出的结论。全量大于部分和全量等于部分，这两个截然相反结论的根本分界在哪里呢？就在于有限还是无限。我们通常所理解的全量大于它的一部分是针对有限的范围来说的。例如，一个班有50个学生，把它分成甲、乙两组，如果每组都不是空的，即都有学生，那么甲、乙两组任何一组都是这个班的一部分，它的人数都比全班的50人少。这里所说的全班，甲组，乙组所包含的元素的个数都是有限数，因此，全班学生的集合，甲组学生的集合，乙组学生的集合，都是有限集合。在有限集合中，只要全量包含部分，全量就不会小于部分，而对于无限集合来说，这种性质却不适用了。我们仍以自然数集合和偶数集合这两个无限集合为例，一方面，偶数集合是自然数的一部分，在自然数集合里，除了有无限多个偶数以外，还有无限多个奇数，这就是说自然数集合包含着偶数集合（在数学上，偶数集合叫做自然数集合的部分集合或叫做子集合。）从这个意义上看，自然数比偶数“多”；另一方面，由于自然数集合中的每个自

然数与偶数集合中的每个偶数能够一一对应起来，因而这两个集合中的元素的个数又一样“多”，这样，对于无限集合来说，虽然全量可以包含部分，但是全量又可以等于部分，也就是说，对于一个无限集合来说（例如自然数集合），必然能找到一个它的部分集合（也叫子集合），而且这个部分集合也是一个无限集合（例如偶数集合）使得这两个集合中的元素的个数一样“多”。从这里，我们可以看到从有限到无限发生了一个质的飞跃。关于一个无限集合能够找出一个部分无限集合，使这两个集合的元素的个数一样“多”的问题，上面的叙述是很不严格的，更进一步的知识需要涉及到集合论，已经超出这本小册子所要研究的内容，这里就不再多做介绍了。

2. 关于奇数和偶数的一些题目

上一节所介绍的奇数和偶数的性质是很简单的，然而就是这些很简单的性质却能解决一些看起来十分困难的题目。下面我们分析几个题目，其中有的还是中学生数学竞赛中的题目。这些题目有的看起来很难，但是不要被这些貌似困难的题目所吓倒，只要我们灵活运用奇数和偶数的这些简单性质和一些中学课本所学过的数学知识，就能解决它，这对于锻炼我们的逻辑思维能力，提高我们的分析问题和解决问题的能力是很有好处的。

我们先从中学课本的一个例子谈起吧！

在学习无理数时，我们曾证明过$\sqrt{2}$是无理数，也就是

例 1　证明任何一个有理数的平方都不可能等于 2 。

【证】　用反证法。假定有一个既约分数$\frac{n}{m}$它的平方等于 2 ，即

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$$

这里所说的既约分数，就是指它的分子和分母的最大公

约数是 1，也就是我们通常所说的分子和分母不能再约分了。因为我们总可以把一个分数$\frac{a}{b}$经过约分化成一个既约分数$\frac{n}{m}$，所以，我们可以假定$\frac{n}{m}$是一个既约分数。

这样就有

$$n^2 = 2m^2$$

n肯定不是奇数，因为奇数的平方仍然是奇数，而等式右边 $2m^2$是偶数，所以n只能是偶数，设$n = 2k$，那么

$$n^2 = 4k^2 = 2m^2$$

$$2k^2 = m^2$$

同样的道理，m也不能是奇数，而只能是偶数。这样一来，m和n都是偶数，这就引出了矛盾，因为m和n都是偶数，$\frac{n}{m}$至少可以用 2 去约，这就与我们假定的$\frac{n}{m}$是既约分数相矛盾。于是，证明了不可能有一个既约分数，它的平方等有 2，也就是说$\sqrt{2}$是无理数。

例 2　求证：不存在这样的整数a，b，c，d，使得

$$abcd - a = \underbrace{11\cdots1}_{1977个}$$

$$abcd - b = \underbrace{11\cdots1}_{1978个}$$

$$abcd - c = \underbrace{11\cdots1}_{1979个}$$

$$abcd-d=\underbrace{11\cdots1}_{1980个}$$

【证】 我们先分析第一个等式。

因为 $$abcd-a=a(bcd-1)=\underbrace{11\cdots1}_{1977个}$$

由于$11\cdots1$是奇数，所以a是奇数。否则，若a是偶数，则$11\cdots1$应为偶数，这是不可能的。

同理，从第二、三、四个等式中可推知：b，c，d也都是奇数。

因此，bcd是奇数，$bcd-1$是偶数。

这样就有

$$a(bcd-1)=奇数\times偶数=偶数$$

与$11\cdots1$是奇数相矛盾，所以不可能存在满足题目所给四个等式的整数a，b，c，d。

从这个题目的解题过程中可以看出来，等式右边不一定非要是$11\cdots1$不可，只要是任意奇数，这个题目都成立。

这种用反证法来证明问题，从否定题目的结论出发，最后得出奇数不能等于偶数这个矛盾，从而解决问题的方法，在证明与奇数和偶数有关的题目时是比较常用的。我们再看几个例子。

例 3 是否有满足方程

$$m^2+1978=n^2$$

的整数解m和n？

【解】 假设有一组整数m和n满足方程

$$m^2+1978=n^2$$

那么 $$n^2-m^2=1978$$

$$(n+m)(n-m)=1978$$

若m，n皆为奇数或者皆为偶数，则

$$n+m\text{和}n-m$$

皆为偶数，而偶数×偶数必定是 4 的倍数，但是1978不能被 4 整除，所以方程

$$m^2+1978=n^2$$

不可能有都是奇数或者都是偶数的整数解m和n。

若m，n一为奇数，一为偶数，则

$$n+m \quad \text{和} \quad n-m$$

皆为奇数，于是$(n+m)(n-m)$为奇数，然而1978是偶数，所以方程

$$m^2+1978=n^2$$

不可能有一奇数，一偶数的整数解m和n。

当然，这个题目也不一定必须是1978，只要是$4k+2$（k为整数）就可以了。

下面这个例题是北京市1963年数学竞赛高中二年级第二试的一个题目。

例 4　已知多项式x^3+bx^2+cx+d的系数都是整数，并且$bd+cd$是奇数。证明，这个多项式不能分解

为两个整系数多项式的乘积。

【证】 假定多项式 x^3+bx^2+cx+d 能分解成两个整系数多项式的乘积，这两个多项式因式中必定有一个一次因式。

设 $$\begin{aligned} & x^3+bx^2+cx+d \\ =& (x+p)(x^2+mx+n) \\ =& x^3+(m+p)x^2+(mp+n)x+pn \end{aligned}$$

则有 $$\begin{aligned} b &= m+p \\ c &= mp+n \\ d &= pn \end{aligned}$$

因为 $bd+cd=(b+c)d$ 是奇数，则 $b+c$ 与 d 都是奇数，否则若 $b+c$ 与 d 有一个是偶数，它们的乘积 $(b+c)d=bd+cd$ 便是偶数，与假设条件 $bd+cd$ 是奇数相矛盾。

因为 d 是奇数，并且 $d=pn$，那么 n 和 p 也是奇数。

因为 $b+c=m+p+mp+n=m(p+1)+n+p$ 由于 n 和 p 都是奇数，则 $p+1$ 是偶数，$m(p+1)$，$n+p$ 都是偶数，于是

$$b+c=m(p+1)+n+p=\text{偶数}+\text{偶数}=\text{偶数}$$

然而，前面已证出 $b+c$ 是奇数，这就引出了矛盾，于是本题得证。

这个题目还有更简便的证法：

【证法二】 假设多项式 x^3+bx^2+cx+d 能分解为两个整系数多项式的乘积，即

$$x^3+bx^2+cx+d=(x+p)(x^2+mx+n) \qquad (1)$$