高等学校教学用書

原子物理学

第二卷 第一分册

Э. В. 史包尔斯基著

高等教育出版社

高等学校教学用書

原子物理学

第二卷　第一分册

Э. B. 史包尔斯基著
周同庆等譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社(Гостехиздат)出版的史包尔斯基(Э. В. Шпольский)著的"原子物理学"(Атомная Физика)第二卷的1951年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为高等学校教学参考書。

第二卷中文譯本暫分为上、下兩册出版。上册包括第十二至十七章,內容講解量子力学基础,以及其在原子光譜方面的应用。

翻譯工作的分配情况如下:周同庆譯第十二、十三与十七章;周世勛譯第十四章;許国保譯第十五章;謝希德譯第十六章。

原 子 物 理 学

第二卷 第一分册

Э. В. 史包尔斯基著

周同庆等譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

上海大東集成聯合印刷廠印刷 新华書店总經售

統一書号13010·369 开本850×1168 1/32 印張10 5/16 字數215,000 印数1—5,400

1958年2月第1版 1958年2月上海第1次印刷 定价(8)¥1.20

第三版序

为了出第三版，"原子物理学"第二卷又作了重要的修改。但是，各部分所作的更改，性質不同。本書上半部(卽第二卷第一分册部分)改变很多，已使叙述的方法改进并使其更加准确，但是对于本書的計划和內容性質，不加改変。在上半部中，只添了一节，在这节里，对于氫原子能級的移动这样一个有趣而又原则上重要的問題，作了簡短的討論。

本書的后半部(卽第二卷第二分册)專門講原子核，修改得更深入。其中章节的次序，各章中材料的分布及叙述方法都有所改变。我完全沒有这样尝試，在本書中添入許許多多的最新事实：物理学的这个領域發展得如此迅速，使得这种任务几乎不能实現。修改的目的主要是將材料在邏輯性上組織得更严密些，并在这部書的初淺性質所允許的条件下，改进它的叙述方法。講到新数据的采用，那些最重要的新事实(超速粒子的核反应，介子的新形式及它們之間的相互轉变等等)自然也要載在此書中。第二十四章"宇宙綫"，仍如前一版那样，由 A. O. 伐森貝尔格整理。出版社編輯 B. A. 雷希考夫采夫对于我的帮助也很大，衷心表示感謝。

作者希望"原子物理学"第二卷的新版，在很大程度上能滿足許多开始研究近代物理学这个最重要的領域的苏联讀者的要求。

Э. 史包尔斯基

莫斯科，八月，一九五一年。

目　录

第十八章　原子核的一般特性

第十九章　核物理学的实驗方法

A. 快速粒子的观測和計数方法

B. 带电粒子的加速器

第二十章　核反应

第二十一章　放射性

A. 放射性变化的規律

01904

附 录

第十二章 量子力学基础

§153. 引言

在第一卷中我們研究了量子理論的实驗基础，并建立了薛定諤方程，把它应用到最簡單問題的解算上。第一卷的內容，就这样構成关于原子物理学和量子力学的初步知識。現在我們將有系統地对于量子力学作較詳細的認識。

掌握量子力学体系是有几分困难的，这是由于它的异乎寻常的数学工具，以及和它相关的一些观念的特殊性。讀者从前几章的学習中所获得的知識，对于掌握这个体系是有帮助的。而且到一定的阶段，我們必然重新遇到薛定諤方程，但他已以不同的面貌出現。这个新的面貌，不仅从邏輯的和諧性的角度看是重要的，而且因为它使量子力学应用范圍的扩大和普遍化有了新的可能性。

在前章建立薛定諤方程时，我們受到微粒具有波性这一事实的指导。对于量子力学体系的構成，我們从不同的方面入手。

指导性的观点，將是使量子力学的合理組織尽可能接近經典力学的組織。所謂"經典力学"已在極大范圍的現象中証实了它的应用价値，卽使从这一点看，也就已經可以理解这种企圖的原因了。此外，根据对应原理，我們預期，宏观体系的力学必須是微观的量子力学的極限情形：在我們可以令普朗克常数等于零的那些情形中，量子力学的定律和結果必然自动地轉变为經典力学的定律。因此我們自然地預料，經典力学的基本观念和方程对应于量子力学中的某些重要的观念和方程。当然这將是新的观念，比經

典力学的观念的普遍性更大，因为后者不适用于極小粒子的运动。

§154. 綫性算符

为了發展量子力学的体系，綫性算符的数学观念是必要的。假如应用某种法则从函数 $u(x_1, x_2, \cdots)$ 得到那些同样的独立变量①的另一函数 v，那末可用 u 和相当的算符的乘积形式作为符号来表示。例如，假如函数 $v(x)$ 是經过求微商的手續从函数 $u(x)$ 得来，那末可以如此写：

$$v=\frac{du}{dx}=\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}u。\tag{154.1}$$

在此情形下，$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}$ 是个算符，被应用到函数 v 上。第二个例子：假如函数 v 系以独立变量 x 乘 u 得来（此处 x 代表独立变量的任意一个），那末可以写成

$$v=xu=\boldsymbol{x}u。\tag{154.2}$$

$\boldsymbol{x}$ 是用独立变量相乘时的算符。以 $\boldsymbol{F}$ 表示算符，我們將写

$$\boldsymbol{F}u=v。\tag{154.3}$$

假如任意兩个算符 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 分别地作用在函数 u，然后把結果相加，那末可把它写成式子

$$\boldsymbol{F}u+\boldsymbol{G}u=(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})u。$$

对調等式的左右兩端，

$$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})u=\boldsymbol{F}u+\boldsymbol{G}u,\tag{154.4}$$

我們可把它看作是算符之和的定义。例如若 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{G}=\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}$，则

$$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})u=\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\right)u=xu+\frac{du}{dx}。$$

---

① 在量子力学中引起兴趣的，还有另外一些算符，它們把一些变量（例如笛卡兒坐标）的函数换变为另外一些变量（例如分动量）的函数。但在本書中，我們將遇不到这样的算符。

算符的乘积是用来称呼这样的算符，它作用在函数 u 时，把它改变为函数 v，而这个結果也可經相乘的算符因式連續作用的方法得到：假如算符 $\boldsymbol{K}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 的乘积，那末它的意思就是

$$\boldsymbol{K}u=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{G}u)。\tag{154.5}$$

例如，从所考察的算符 $\boldsymbol{x}$ 和 $\dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}$，可以組成算符乘积

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}},$$

有如下的意义：

$$\boldsymbol{K}u=\boldsymbol{x}\left(\frac{du}{dx}\right)=xu'。$$

同一算符繼續重复 n 次，是用算符的幂的形式写下

$$\boldsymbol{F}^2u=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}u),\quad \boldsymbol{F}^3u=\boldsymbol{F}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}u)],$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\right)^2u=\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left(\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}\right)=\frac{d^2u}{dx^2}。$$

算符乘积的特点，在于它一般說来并不满足换位定則（对易律），使得

$$\boldsymbol{FG}\neq\boldsymbol{GF}。$$

算符 $\boldsymbol{x}$ 和 $\dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}$ 正可作为不可对易的算符的例子。的确，

$$\boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}u=xu',\tag{154.6}$$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{x}u)=\frac{d}{dx}(xu)=u+xu',\tag{154.7}$$

所以

$$\left(\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\right)u=u\neq 0。$$

相反的，算符 $\boldsymbol{x}_1$ 和 x_2 或算符 $\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x_1}}$ 和 $\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x_2}}$ 是可对易的算符，因为

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x_1}}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x_2}}u(x_1,x_2)=\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}u(x_1, x_2)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}。$$

在那些情形中，当算符 FG 作用的結果所得函数，和算符 GF 作用的結果，除差一負号外，完全相同，使得

$$FG=-GF,$$

則此兩算符称为反对易的。

用常数 c 乘一算符，即算符 cF，是在 F 作用于 u 的結果上乘以 c，

$$(cF)u=cFu。$$

为了更好地掌握前面所叙述的，我們建議讀者作下面的練習：

練習：1. 証明算符 x 和 $\frac{\partial}{\partial y}$，$y$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}$，$x$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}$，并一般地“独立变量”的和“对其它独立变量求微商”的算符都是可对易的。

2. 証明，对函数 $\sin x$ 以算符 $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)x\right]^2$ 作用的結果是 $\sin x+3x\cos x-x^2\sin x$，而以算符 $\left[x\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^2$ 对那同一函数作用的結果是 $x\cos x-x^2\sin x$。

3. 証明，(a) $\left(\frac{d}{dx}+1\right)^2 u=\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}+u,$

因而

$$\left(\frac{d}{dx}+1\right)^2=\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}+1。$$

(b) $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 u(x_1, x_2)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$

因而

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}。$$

4. 証明，$\left(\frac{d}{dx}+x\right)^2 u=\frac{d^2u}{dx^2}+2x\frac{du}{dx}+x^2u+u。$

注意

$$\left(\frac{d}{dx}+x\right)^2\neq\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}x+x^2,$$

为此計算前面不等式右边部分的算符作用于函数 u 的結果。

5. 証明，

$$(F+G)(F-G)=F^2-G^2-(FG-GF),$$
$$(F-G)(F+G)=F^2-G^2+(FG-GF),$$

所以因式分解

$$F^2-G^2=(F+G)(F-G)$$

只对于可对易的算符成立。

有些算符，作用于任何函数后，所得函数并無改变。例如，从 (154.6) 和 (154.7) 我們得

$$\left(\frac{d}{dx}x-x\frac{d}{dx}\right)u=u。$$

这样的算符称为么正的或"算符單元"：

$$\frac{d}{dx}x-x\frac{d}{dx}=1。\tag{154.8}$$

根据所叙述的势必得出，我們可像代数运算那样处理算符，但同时記住，它們的乘积一般講是不可对易的，因此必須严格地区别以算符从左边相乘[参考(154.6)]或从右边相乘[参考(154.7)]的兩种情形。

例子　利用算符代数，証明，假如

$$FG-GF=1,\tag{154.9}$$

那末

$$FG^2-G^2F=2G。$$

为了証明，我們用 G 从左边乘 (154.9)

$$GFG-G^2F=G;\tag{154.10}$$

从右边相乘

$$FG^2-GFG=G。\tag{154.11}$$

把(154.10)和(154.11)相加，我們得

$$FG^2-G^2F=2G。$$

令 $F=\frac{d}{dx}$，$G=x$。根据 (154.8)，

$$FG-GF=\frac{d}{dx}x-x\frac{d}{dx}=1 。$$

因此我們可立刻写下

$$\left(\frac{d}{dx}x^2-x^2\frac{d}{dx}\right)u=\frac{d}{dx}(x^2u)-x^2\frac{du}{dx}=2xu 。$$

練習 求証

$$FG^3-G^3F=3G^2$$

并一般地

$$FG^n-G^nF=nG^{n-1} 。$$

滿足下面要求的算符

$$F(u_1+u_2)=Fu_1+Fu_2,$$
$$F(cu)=cFu,$$

称为綫性算符;此处的 c 是常数。显然地,算符 $\frac{d}{dx},\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},$ $\cdots$, x 等是綫性的。

量子力学的全部算符是綫性的,因此,往后説到算符,我們將專指綫性算符。

練習 求証,假如算符 F 和 G 是綫性的,那末

$$c_1F+c_2G \quad 和 \quad c_3FG$$

也是綫性的。

§ 155. 綫性算符的本征值和本征函数

有时,算符 F 作用于函数 u 的結果,就是那同一函数乘以某数 λ:

$$Fu=\lambda u 。\tag{155.1}$$

例子 $$F=-\frac{d^2}{dx^2},\quad u=\cos 4x,$$

$$Fu=-\frac{d^2}{dx^2}\cos 4x=16\cos 4x 。$$

假如(155.1)关系成立并且对于 x 的任意数值 u 是个連續、有限和單值的函数，那末 u 被称为算符 F 的本征函数，而 λ 是相当于本征函数 u 的算符的本征值。在我們的例子中，$\cos 4x$ 是算符 $-\frac{d^2}{dx^2}$ 的本征函数，而 16 是相当于 $\cos 4x$ 的那同一算符的本征值。但我們要注意，按本征函数的定义，双曲余弦函数 $\operatorname{ch} 4x$ 不是算符 $-\frac{d^2}{dx^2}$ 的本征函数，虽然

$$-\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{ch} 4x=-16\operatorname{ch} 4x;$$

不錯，

$$\operatorname{ch} 4x=\frac{1}{2}\left(e^{4x}+e^{-4x}\right),$$

由此可見，当 $x\to\pm\infty$，$\operatorname{ch} 4x$ 趋于無穷大，即是它不滿足有限性的要求。

練習　求証，$e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 是算符 $-\frac{d^2}{dx^2}+x^2$ 的本征函数，所屬的本征值是 1，而 $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ 是那同一算符的本征函数，所屬的本征值是 3。

讓我們注意，在量子力学中，某些在独立变量变化的全部区域内可确定的坐标的函数 ψ 起着最重要的作用。假如独立变量是笛卡兒坐标，那末对于坐标 x, y, z 的每一个，ψ 必須在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的范圍内是确定的；假如独立变量是球面極坐标 r、θ、φ，那末函数 ψ 在 r 的变化区域 0 到 ∞，θ 的变化区域 0 到 π，及 φ 的变化区域 0 到 2π 都是可确定的。在独立变量的全部可变的区域，有限、連續和單值性的这些要求的总体我們往后將称为标准条件。当独立变量是角 θ 和 φ 时，單值性条件起着特别重要的作用。

算符的全体本征值称为它的本征值譜。求本征值譜的工作归結到找寻滿足方程(155.1)及标准条件的函数 u。假如，正如我們所关心的大多数情形是如此，F 是求微商的算符$\left(\frac{d}{dx}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\text{ 等}\right)$，

那末問題化为微分方程的求解并在它的解中找寻滿足标准条件的解。值得注意的，由于綫性微分方程的性質，常常發現，这类可接受的解(即滿足标准条件的)只有当参数 λ 形成分立的一組选定数值，例如（参考下面例 3）奇整数 1，3，5，… 时，方可获得。在此情形下，本征值譜称为分立的。同时有些情形是，对于連續地变化的 λ 数值，解具有所要求的性質。在这些情形中，本征值譜被称为連續的。为了説明起見，考察三个例子：我們求某些算符的本征值譜。

1．算符

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{i}\frac{d}{dx}。\tag{155.2}$$

此算符的特点在于其中有虛数單位 $i=\sqrt{-1}$。我們时常必須处理这样的算符。(155.1)条件在此例中化为方程

$$\frac{1}{i}\frac{du}{dx}=\lambda u$$

或

$$\frac{du}{dx}-i\lambda u=0。$$

此方程之解

$$u=e^{i\lambda x}=\cos\lambda x+i\sin\lambda x,$$

显然地对于任何实数的 λ，滿足标准条件。假如 λ 是虛数（或复数）呢，那末有限性的条件不滿足。的确，令 $\lambda=i\alpha$，此处 α 是实数，那末

$$u=e^{i\lambda x}=e^{-\alpha x}。$$

当 $x\to-\infty$ 时，此函数趋于無穷大。因此，算符 (155.2) 有任何正或負实数(零在内)所組成的本征值的連續譜。

2．算符

$$\boldsymbol{F}=-\frac{d^2}{dx^2}。\tag{155.3}$$

条件(155.1)产生

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0\text{。}$$

此方程的特解將是

$$u=e^{\pm\sqrt{-\lambda}x};$$

(a) $\lambda>0$, $\sqrt{-\lambda}=i\sqrt{|\lambda|}=i\alpha$, 此处 $\alpha=\sqrt{|\lambda|}$,

$$u=e^{\pm i\alpha x}=\cos\alpha x\pm i\sin\alpha x$$

是滿足标准条件的解.

(b) $\lambda<0$, $\sqrt{-\lambda}$ 是实数. 令 $\sqrt{-\lambda}=\beta$, 那末

$$u=e^{\pm\beta x}\text{。}$$

此解不滿足有限性的要求(取正号的解, 当 $x\to\infty$ 时, 增加到無限大; 取負号的解, 当 $x\to-\infty$ 时, 也無限地增加)。因此, 算符(155.3) 有一連續譜, 包含 λ 的全部正的实数。

3. 算符

$$\boldsymbol{F}=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\text{。}\tag{155.4}$$

条件(155.1)产生

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right)u=\lambda u;$$

作出所指的运算,我們得

$$\frac{d^2u}{dx^2}+(\lambda-x^2)u=0\text{。}\tag{155.5}$$

將此方程与我們在第一卷中曾遇到的方程

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+(\lambda-\alpha^2x^2)\psi=0\tag{149.4}$$

比較时, 我們看出, 后一方程在 $\alpha=1$ 时与 (155.5) 符合。但方程(149.4)只当参数 λ 取一些选出的数值时,才有滿足有限性标准条件的解。这些数值是:

$$\lambda=2n+1,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

因此，算符 (155.4) 有不連續的本征値譜，包含正的奇数值 1, 3, 5, …。

§156. 自軛算符

在綫性算符中，我們关心的將是屬于自軛的或厄密的一类算符。这些算符滿足如下的判据。令 $u(x_1, x_2, \cdots)$ 与 $v(x_1, x_2, \cdots)$ 为兩函数；算符 $\boldsymbol{F}$ 称为自軛的，假如

$$\int u^* \boldsymbol{F} v \, dX = \int (\boldsymbol{F} u)^* v \, dX, \qquad (156.1)$$

此处的 $dX = dx_1 dx_2 dx_3 \cdots$ 并且在独立变量变化的全部区域中求积分。假如这些独立变量是笛卡兒坐标 x, y, z，那末求积分扩展到 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的范圍，并且要求函数 u 和 v 是平方可积的，就是当变量接近积分限的时候，它們要足够快地減小。

我們对于自軛算符兴趣的引起，是由于这样的算符具有实数本征値。为了証明，我們从算符 $\boldsymbol{F}$ 的本征函数中选擇任意一个函数 v。在此情形下，按照本征函数的定义

$$\boldsymbol{F} v = \lambda v,$$

此处的 λ 是相当于 v 的 $\boldsymbol{F}$ 的本征値。更假定 $u = v$，我們有

$$\int u^* \boldsymbol{F} v \, dX = \int v^* \boldsymbol{F} v \, dX = \lambda \int v^* v \, dX,$$

$$\int (\boldsymbol{F} u)^* v \, dX = \int (\boldsymbol{F} v)^* v \, dX = \lambda^* \int v^* v \, dX \text{。}$$

这些等式的左边部分，按照自軛性 (156.1) 的定义是相等的，所以

$$\lambda = \lambda^* \text{。}$$

但只有在 λ 是实数的情形下这才是可能。

讓我們考察几个例子。

1. 用独立变量相乘的算符 $\boldsymbol{F} = x$。旣然 x 是实数量，即

$$x = x^*,$$