高等数学教学漫谈

卢锷 编著

化 学 工 业 出 版 社

内 容 简 介

本书是一本颇具特色的高等数学参考书．全书共42篇既有对基本概念基本理论的分析和重点、难点的阐释，又有教法建议和有关的历史资料，不少内容是对教材的补充和引伸．本书是作者多年教学经验的总结，有些观点比较新颖，行文流畅生动，是从事高等数学教学工作的新教师和自学者的良师益友．

本书可供理工科院校（包括电大、函大、业大、中专）和师范院校有关系科的师生以及高中数学教师阅读．对于广大自学高等数学的读者也是一本实用的学习参考书．

高等数学教学漫谈

卢锷 编著

责任编辑：任文斗
封面设计：郑小红

化学工业出版社出版发行
（北京和平里七区十六号楼）
化学工业出版社印刷厂印刷
化学工业出版社印刷厂装订
新华书店北京发行所经销

开本 $787\times1092\ 1/32$ 印张 $16\ 3/4$ 字数 388 千字
1989年8月第1版 1989年8月北京第1次印刷
印 数 1—1,750
ISBN 7-5025-0572-5/G·160
定 价：7.00元

目　　录

一、浅说函数概念教学

函数是微积分学的重要基础概念．函数理论（其中最基本的部分是微积分）由于深刻地揭示了客观世界中各种量之间的联系和变化规律，成为科学技术的有力工具．

在高等数学中，函数概念教学的重要性是不言而喻的．但由于中学数学已经讲过不少函数的内容，学生对函数概念已有基本的了解，因此教学时应在此基础上有所深化、扩充，在有关教学内容的取舍详略上有所侧重．

"函数"是什么？按照近代数学的说法，函数即是映射：

设有集合X、Y，如果存在某个对应规律（或关系、法则）f，使对于集合X的每一个元素x，都有集合Y的唯一的元素y和它对应，则称给出了一个从X到Y的映射（函数）f，用$f:X\to Y$表示．与元素x对应的y常记作$f(x)$，称为x在映射f之下的象，而x称为y的原象．因此，映射（函数）f也记为$y=f(x)$．这里的X、Y可以不是数集，而是其他更一般的集合，它们分别称为映射（函数）f的定义域和值域．如果X、Y都是实数集或实数集的子集，那么这种映射就是在高等数学中要讨论的一元函数．简言之，两个集合X、Y的元素（实数）之间的对应规律（或关系、法则）f就是函数．

近代函数（映射）定义可比喻为：X是一堆原料，Y是一堆加工后的成品，它们之间的对应规律f就是机器（图1-1）．

可以看出，这个定义不仅更加具有普遍性，而且抓住了概念的本质，把现实世界中许多事物的量之间相关变化的原型抽

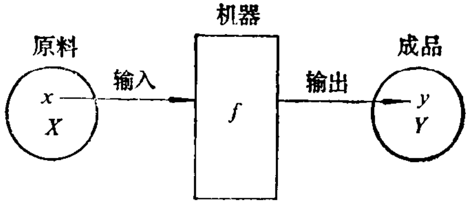


图 1-1

象出来，加以准确地描述，突出了其中最主要的东西——对应规律.从“原料”到“成品”，在两者的关系中，最重要的、决定事情本质的是什么呢？当然是“机器”。

但在一般高等数学教材中，函数定义基本上是重复中学课本的传统说法，不是把对应规律f定义为函数，而是把因变量y叫做自变量x的函数.这就可能模糊人们对于函数概念的本质属性的认识，因为按照变量x、y及其相互关系的模型（函数的近代定义科学地描述了这个模型），y只是数集Y(即值域)中的元素，当y作为对应于x的函数值时它才可记为$f(x)$.如果称$f(x)$是x的函数，还勉强可以说得过去，因为其中指明了对应规律f.此外，y既是因变量又是函数，y到底是什么呢？只能得出“因变量＝函数”的结论了.而根据近代定义，函数指的是因变量与自变量之间的对应规律（关系）f，这样y、f不分，影响到后面有关函数性质的讨论.例如，反函数概念及其图形，用因变量概念来讨论就很难讨论清楚.如果用对应规律来讨论则很方便：函数$y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$，就是对应f的逆对应f^{-1}(假定f是一一对应的）[1]，避开了谁是谁的函数等冗杂的说法.

据上所述并考虑到现行教材的具体状况，关于函数概念的

[1] 参看本书第三篇《反函数及其图形》.

教学应突出以下几点：

（一）在讲述函数定义的“三要素”时，突出对应规律．对应规律常常也称函数关系，是函数概念的核心．传统说法“y是x的函数”用符号表示就是$y=f(x)$，其中f代表变量y与x之间确定的对应规律．通过f，由变量x的值可得出对应的y值，因而可确定自然定义域和值域。但反过来，由定义域和值域决定不了对应规律。从实际问题建立函数，最重要的也是寻找变量之间的对应规律，求定义域和值域在中学已经讲得很多，教学时可从略．

对应规律f，并不总是能用公式即通过有限次的初等数学运算和复合步骤，把表示有关变量的符号与必要的常数联结在一起的数学式子表示出来。例如，“y是不超过x的最大整数”这句话，就给出了实数集与整数集之间的一个对应规律，即给出了一个函数。因为对任一实数x，总存在一个整数N，有

$$N\leqslant x<N+1.$$

这个用一句话给出的函数，其对应规律无法用公式表示。虽然为简单起见，常将这个函数记为$y=[x]$，但$[x]$并非公式，只是一个记号，是那句话的缩写符号罢了，函数$y=[x]$的图形如图1-2所示。

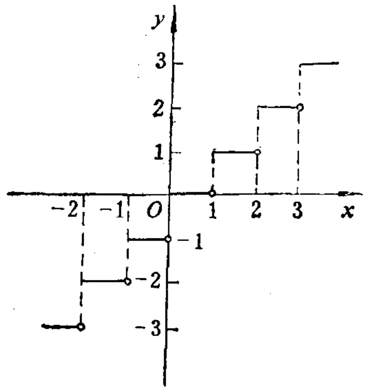


图 1-2

然而，对应规律f即使不能用公式表示出来，但它仍然是已知的、确定的，由它仍然可从变量x的值得出确定的y值（如上例）．当然，平常所遇见的函数大多可以用公式表示，也就是

对应规律可表为若干次初等运算的式子.这种情形，对应规律f好比是算法，可形象地“表为”一组运算的“框架”.例如函数$y=2x^2+3x+5$，其对应规律f:$2(\quad)^2+3(\quad)+5$.
又如函数

$$y=\frac{\sqrt{x+1}}{\sin(x^2+1)},$$

其对应规律

$$f:\ \frac{\sqrt{(\quad)+1}}{\sin[(\quad)^2+1]}.$$

将自变量x的值代入“框架”的格（ ）中，经过若干次数学运算就得出对应的y值.

值得指出的是，函数表达式只是表示对应规律的工具，同一个函数可以有多个不同的表达式，甚至可以用不同的“框架”表示同一个对应规律.例如，式子

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)^{❶} \text{ 与 } y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{当} x>0;\\ 0, & \text{当} x<0,\end{cases}$$

表示的是同一个函数；“框架”

$$\sqrt{[\sin(\quad)]^2} \quad \text{与} \sqrt{\frac{1-\cos2(\quad)}{2}}$$

表示同一个对应规律，因为将自变量的值分别代入这两个“框架”的格（ ）中，所得到的对应的因变量的值都是相等的.又如，函数$y=\sin^2x+\cos^2x$也可表为$y=1$.而$y=\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$则是

---

❶ 注意$|x|=\sqrt{x^2}$

表示函数

$$y=\begin{cases}0, & 当n是奇数;\\ 1, & 当n是偶数\end{cases}$$

的一个解析式。

（二）在对待单值函数和多值函数两个概念时，突出单值函数。有些高等数学教材所给出的函数定义是包括多值函数的，其意义是，对于变量x所取的每一个值，都有一个或多个确定的y值和它对应。如前所述，用映射概念来理解函数，指的是单值函数，即对于一个x的值要求有唯一的y值与之对应；但一个y值可以对应于多个x值。在近代数学中，说到“函数”都是指单值的。因此，为了使函数定义更接近于近代形式，可径直就单值函数给出定义。然后说明所谓多值函数是什么意思，指出它比较少见，并且对初等函数来说，一个多值函数总可以分成若干个单值函数。如$y=\pm\sqrt{x}$可看成是$y=\sqrt{x}$与$y=-\sqrt{x}$的组合，从而多值函数可归结为单值函数进行研究。事实上，在高等数学中只有很少几处（主要在“反函数”一节）涉及到多值函数。

（三）在函数举例时，突出分段函数和某些“怪”函数。学生在中学虽然也遇到过简单的分段函数，但为数极少，往往觉得函数总是可以用一个式子表示的。这种错觉妨碍了他们对函数概念的理解。其实，即使一个函数可用公式表示，也不见得就是一个式子。从实际问题得出的许多函数，常常要用多个不同的式子才能表示出来。这方面的例子很多，如运输上的运费函数，邮资函数，无线电技术中的各种脉冲函数，等等。

例1 某地出租汽车按下列标准收费（如图1-3，x表示里程，y表示钱数）：当$0<x\leqslant5$时，收费3元；当$5<x\leqslant10$时，每公里收费0.5元；当$x>10$时，每公里收费0.3元。据此可写出

函数

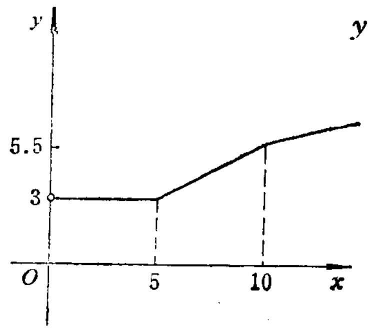


图 1-3

$$y=\begin{cases}3, & 0<x\leqslant 5;\\ 3+0.5(x-5), & 5<x\leqslant 10;\\ 5.5+0.3(x-10), & x>10.\end{cases}$$

其定义域为 $(0,A)$，A 是某个充分大的正数.这个收费函数是由定义域中不同子集上的不同式子给出的，这样的函数就叫做分段函数.

分段函数是一个完整的函数，不是一段一个函数，它的图形可能不是连续的曲线。

例2 将温度为 -10℃的0.001kg冰加热，温度逐渐上升到0℃，化成水，再上升到10℃.考虑在温度上升过程中从外部吸收的热量Q（冰的比热容为2090J/(kg·K)).如图1-4所示，从-10℃上升到0℃的过程中，因温度每增加1℃吸收热量2.09J，所以，当温度升到t℃即增加$t-(-10)=t+10$℃时，吸收热量为$(t+10)\times 2.09=20.9+2.09t$ J.

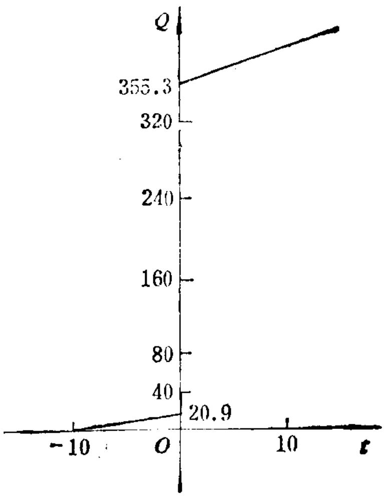


图 1-4

从0℃继续上升到10℃的过程中，因0.001千克冰全部化成

水需吸收热量334.4J（由实验测定的融化热），加上刚上升到0℃时吸收的热量20.9J，共吸收热量355.3J.又水的比热容为4180J/(kg·K)，所以当温度上升到t℃时，总共吸收热量$355.3+4.18t$J.于是吸收的热量Q与温度t之间的函数关系为

$$Q=\begin{cases}20.9+2.09t, & -10\leqslant t<0;\\ 355.3+4.18t, & 0<t\leqslant 10.\end{cases}$$

例3 函数

$$y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ (x-2)^2, & 1<x<3;\\ \ln(x-2), & x\geqslant 3,\end{cases}$$

是分段函数，其定义域为$[0,+\infty)$，分为三段（见图1-5），每段上的表达式各不相同，但不能认为是三个函数.

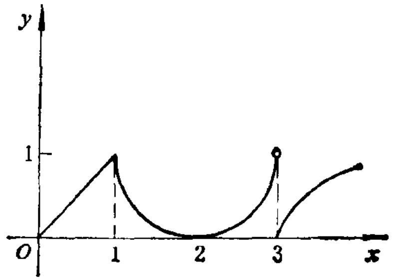


图 1-5

前面曾提到的函数$y=[x]$，也是分段函数

$$y=\begin{cases}\cdots & \cdots\\ -2, & -2\leqslant x<-1;\\ -1, & -1\leqslant x<0;\\ 0, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & 1\leqslant x<2;\\ 2, & 2\leqslant x<3;\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$

与它有关的一个函数$y=x-[x]$，可写作

$$y=\begin{cases}\cdots & \cdots\\ x+2, & -2\leqslant x<-1;\\ x+1, & -1\leqslant x<0;\\ x, & 0\leqslant x<1;\\ x-1, & 1\leqslant x<2;\\ x-2, & 2\leqslant x<3;\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$

$y=x-[x]$还记作$y=(x)$，其意义是“y是x的正小数部分”，见图1-6。

例4 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & 当x为有理数;\\ 0, & 当x为无理数。\end{cases}$$

这是一个“怪”函数，具有不少“怪”性质，在理论上颇有价值，其图形只能象征性地画出，如图1-7所示。

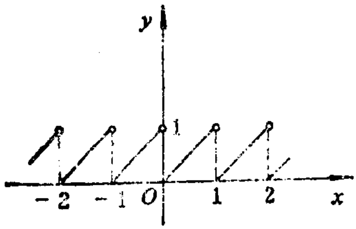


图 1-6

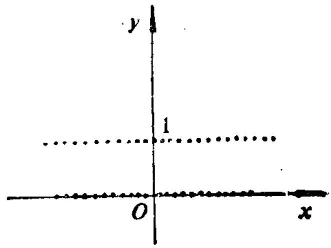


图 1-7

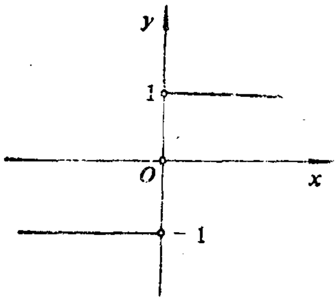
例5 符号函数（克罗内克函数）

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

这个函数在理论上和实际上都有很大意义.

通过上述例子，可以大大丰富学生对函数的感性认识，加深对函数概念的理解.

（四）在函数表示的认识上、要突出发展的观点.传统教材一直把公式法、列表法（表格法）和图象法并称为函数的三种表示法.公式法如前所说，就是用一个或多个数学式子把因变量与自变量之间的对应规律表示出来.在高等数学中，如果所说的数学式子不限于初等运算，那么，用公式法表示函数常常称为函数的解析表示.当学生只学了初等运算时，就只能通过初等运算来表示函数，如$y=ax^2+bx+c$，$y=\sin x$，$y=\log_a x$，$y=5e^{3x}$等等解析式表示的函数.当学了极限、微分和积分运算、无穷级数等知识以后，又可以通过这些新的工具来表示函数.例如



$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{表示} e^x;$$

$$\left.\frac{d(\cos tx)}{dt}\right|_{t=1} \text{表示} x\sin x;$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \text{表示} \operatorname{arc\,tg} x;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \text{表示} \ln(1+x) \qquad (-1<x\leqslant 1);$$

此外，如

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

等等也表示以x为自变量的函数（非初等函数）.对于狄利克雷函数$D(x)$，利用二次极限也得到了解析表达式

$$D(x) = \lim_{n\to\infty} [\lim_{m\to\infty} \cos^n(\pi m!x)].$$

这个结论可证明如下：如果x为有理数，可设 $x=\frac{q}{p}(p>0)$，那么当m充分大时，必有 $\pi m!x = m!\frac{q}{p}x = 2k\pi$ （k为某个整数）.因此

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m!x) = \lim_{n\to\infty} \cos^n(2k\pi) = 1,$$

从而$D(x)=1$.

如果x为无理数，那么不管m是什么值，$\pi m!x$都不可能是π的整数倍.因此

$$|\cos(\pi m!x)| < 1, \text{从而} \lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m!x) = 0.$$

所以$D(x)=0$.

图象法是通过自变量x与因变量y的一组对应值(x,y)，在坐标平面上描出相应的点所结成的轨迹来表示函数.它所表达的对应规律f一般以曲线的形态出现，一目了然，非常直观.随着绘图方法和技术的改进，特别是电子计算机技术的进步，图象法的优点将得到更好的发挥，以满足各门科学技术对于函数的直观显示的要求.当然，图象法表示函数是近似的.

列表法是将自变量的某些值和对应的因变量的值列成表格。这种方法能否表示函数？函数是因变量和自变量之间的对

应规律；说某种方法（或工具）能够表示函数，就是说必须能够表示这种对应规律．列表法给出的是变量x和y的一些对应值，或称“变值对应表”，它与对应规律不是一样东西。前者是“原料与成品的对应表”，后者是“加工的机器”．“变值对应表”相当于一堆实验数据，要从中得出规律性的东西来，还要费不少工夫进行分析．比如气象台测得了一段时期的气温记录，这些资料可以说就是自变量（时间）和因变量（温度）之间的变值对应表，凭此尚无法做出天气预报，还必须对资料进行分析，找出其中的对应规律．有人认为三角函数表、对数表就表示了三角函数和对数函数，这实在是人云亦云的误解，何况这些函数表所包含的自变量和因变量的对应值根本不可能是详尽无遗的呢！

已知狄利克雷函数可解析地表示为

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\cos^n(\pi m!\,x)\right].$$

假如仿照三角函数表或对数表的样子也造出一张“狄利克雷函数表”

x	…	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	$2-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}+1$	…
$D(x)$	…	1	0	1	1	0	1	0	…

并说这张表“表示”了狄利克雷函数，岂不令人摇头咋舌！当然，三角函数表、对数表等还是有用的，但仅仅是为了查找数值的方便，不是为了表示三角函数或对数函数才造就它们．许多书在讲列表法时指出了这种方法的两条缺点：一是表格中列出来的函数值个数有限，如用到表中未列的函数值时不方便；二是不容易从表格中察觉函数的变化情况．其实，这两条

缺点正是列表法一般不能表示函数的原因❶.

基于上述认识，教学时宜删去列表法不讲；其他两种函数表示法可溶合在函数定义或分段函数举例等内容中，似无必要单独叙述.关于函数定义与函数解析表示的历史沿革情况，在适当时候酌情插入一、二也是有益的.

〔历史资料〕

1.“函数”一词最早为莱布尼兹所创，他在1673年的一篇手稿里使用了这个词，表示曲线的切线和法线的长度随曲线上点的改变而变化的关系.在他之前，牛顿从1665年开始一直用“流量”表示变量间的关系。

牛顿（I. Newton，1642—1727），英国著名数学家和物理学家.青年时入剑桥大学，随数学物理教授巴罗（I. Barrow，1630—1677）学习.巴罗的“微分三角形”的深刻思想给牛顿很大影响.1665年，建立了万有引力定律，同时发明微积分（这一年的5月20日他的手稿中有了“流数术”的记载）.《自然哲学之数学原理》（1687）一书是牛顿一生科学工作的总结，集大成的名著.

莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646—1716），德国著名哲学家、数学家，与牛顿同为微积分的创立者.莱布尼兹是一位多才多艺的科学家和社会活动家，他一生涉及哲学、历史、语言、数学、物理、地质、化学、生物、神学、法律等广阔领域并作出重要贡献.在数学方面，除微积分外，他还是数理逻辑的先驱者，发明了手工操作的计算器.据说他从中国古代的八卦图受到启发才发明了二进制.

---

❶ 当函数定义域为有限点集时，全部列出自变量与因变量的对应值，认为对应规律已通过“变值对应表”表示出来还是可以的。

2. 约翰·伯努利（J. Bernoulli, 1667—1748）是瑞士十七、十八世纪伯努利数学大家族中最著名的成员之一. 他于1718年首次给出了函数的"运算定义"（撇开了几何意义）. 后来，欧拉在《无穷小分析引论》一书中把他的老师的定义写得更精确："一个变量的函数是一个解析表达式，它是由这个变量和一些常量用任何方式结合而成的". 这就是函数的欧拉定义. 直到十九世纪以前，数学家们都把函数仅仅理解为解析式.

欧拉（L. Euler, 1707—1783），原籍瑞士，在俄国生活和工作了大半生，是世界历史上最伟大的数学家之一. 欧拉的工作几乎遍及数学的各个领域以及天文、物理、力学、光学、统计及财政学等学科.《无穷小分析引论》（1748）是世界上第一本完整系统的分析学著作. 在这本书中他首次使用了函数符号$f(x)$. 欧拉著作极为丰富. 瑞士科学院于1909年开始出版他的全集，五十年间总共出版了47卷，仍在继续中. 欧拉28岁时一目失明，59岁时另一只眼也失明了，他的大部分工作是在眼睛不好甚至完全失明后完成的.

3. 1837年德国数学家狄利克雷（P. G. L. Dirichlet, 1805—1859）给出了函数的"对应关系"定义："如果对于给定区间上的每一个x的值，有唯一的一个y的值和它对应，则称y是x的函数". 这个定义在分析史上起了重要作用，至今许多教科书所采用的函数定义仍属于此. 在更早一些时候（1829年）他给出了现今所谓的狄利克雷函数$D(x)$. 这个"怪"函数的最初形式是

$$D(x)=\begin{cases} c, & \text{当}x\text{为有理数;} \\ d, & \text{当}x\text{为无理数.} \end{cases}$$

4. 克罗内克（L. Kronecker, 1823—1891）是德国数学家，对于代数学、分析学、拓扑学等数学分支多所贡献. 他极