求逆矩阵

崔玉亭
李淑霞　主编

青岛海洋大学出版社

广义逆矩阵

崔玉亭
李淑霞 编著

青岛海洋大学出版社
1990年

内容简介

广义逆矩阵是五十年代初兴起的线性代数的一个新分支。因其表达形式简明灵巧而被广泛用于许多学科。本书全面系统地介绍了广义逆矩阵的种类、结构、性质、计算及在统计学中的应用。还特别介绍了Bottt-Duffin逆、Drazin逆、Hilbert空间线性算子广义逆、分块阵广义逆、谱广义逆等特殊类型广义逆。本书取材新颖，叙述简明易懂并附有大量应用例题，可作为应用数学，计算数学、统计等专业的大学生、研究生及数学教师使用的教材或参考书。本书也是广大科技工作者学习，应用广义逆的基本读物。

广义逆矩阵

崔玉亭 李淑霞 编著

*

青岛海洋大学出版社出版

（青岛市鱼山路5号）

新华书店发行

泰安师专印刷厂印刷

*

1990年4月第1版　1990年4月第1次印刷

2开（850×1168毫米）9.75印张240千字

印数1—3000

ISBN 7-81026-021-9/O·3

定价：2.50元

前　言

1978年底张尧庭教授应邀来山东海洋学院应用数学系讲授多元统计分析。讲课中曾使用了广义逆矩阵为工具，使统计结果与公式更加统一和简单。他的讲演引起了很多教师的兴趣，后来我们组织了广义逆矩阵讨论班，作者承担了讲授工作，在此基础上写成了讲义《广义逆矩阵》，并以此为教材给应用数学系四年级学生开设了选修课。这门选修课曾引起不少学生的兴趣，有的学生选择广义逆矩阵中的题目做毕业论文，得到了一些有意义的结果。教学实践证明广义逆矩阵不仅是多元统计、计量经济等很多学科中的有用工具，而且扩展和深化了学生的线性代数知识。对提高学生掌握、运用矩阵工具分析和解决问题的能力，起了促进作用。本书就是在此讲义的基础上修改而成的。

本书介绍了广义逆矩阵的基本理论及其在统计中的简单应用。其主要内容包括引言和前九章。其中，前七章介绍有限矩阵的广义逆，仅在第九章介绍希尔伯特空间算子广义逆。第七章和第八章第四节涉及到广义逆矩阵的数值计算方法。第十章介绍广义逆矩阵在统计中的应用。书中还包含了不同难度的150个练习题。本书适合于用作大学生或研究生的教材或教学参考书，读者只需具备线性代数的基本知识。

由于作者水平有限，书中难免存在缺点和错误，敬请有关专家和读者指正。

编 著 者

一九九〇年三月

目　　录

引　论

§1　非奇异矩阵的逆矩阵

大家知道，每一个非奇异矩阵都有逆矩阵，用A^{-1}表示，即

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I \qquad (1)$$

其中I为单位阵。逆矩阵有以下简单性质：

$$(A^{-1})^{-1}=A,$$
$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T,$$
$$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*,$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}。$$

其中A^T和A^*分别表示A的转置和共轭。若A为方阵，λ为实数和复数，$\mathbf{x}$为非零向量，且满足　$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$，则称$\lambda$为$A$的特征值，$\mathbf{x}$为$A$的对应于$\lambda$的特征向量。$A^{-1}$的另一个性质是，它的特征值是$A$的特征值的倒数。

§2　矩阵的广义逆

如上节所述，只有方阵而且是非奇异阵才具有逆矩阵。换句话说，行（或列）是线性无关的方阵才有逆矩阵。近几十年来，在应用数学的许多领域中，需要对奇异阵甚至长方阵定义一种类似于非奇异阵逆矩阵的那种矩阵，并称其为广义逆矩阵，且要求具有以下性质：

i)对于比非奇异阵更广泛的一类矩阵来说，这种广义逆矩阵是存在的；

ii)具有通常逆矩阵的性质；

iii)当A为非奇异阵时，这种广义逆就是普通的逆矩阵A^{-1}。

有的作者把A的广义逆定义为满足

$$AZA=A \tag{2}$$

的任意一个矩阵Z。

显然当A是一个非奇异阵时，分别用A^{-1}左、右乘(2)的两边，得

$$Z=A^{-1}。$$

§3 线性方程组的可解性

用矩阵表示线性方程组的解是大家熟悉的。记

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}, \tag{3}$$

其中$\mathbf{b}$是已知向量，$\mathbf{x}$是未知向量。如果矩阵A是非奇异阵，则(3)有唯一解

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}。$$

在一般情况下，当A为奇异阵或长方阵时，(3)式可能无解，也可能有无穷多解。

存在一个向量$\mathbf{x}$满足(3)式，这相当于向量$\mathbf{b}$是矩阵A的列向量的线性组合，如果A是一个$m\times n$的长方阵($m<n$)，且A的秩小于m，这可能不成立。如果成立，设有一个向量$\mathbf{h}$，满足$\mathbf{b}=A\mathbf{h}$。若Z是满足(2)的一个矩阵，我们取$\mathbf{x}=Z\mathbf{b}$，

则有 $$A\mathbf{x}=AZ\mathbf{b}=AZA\mathbf{h}=A\mathbf{h}=\mathbf{b},$$

即 $\mathbf{x}$满足(3)。

一般情形，(3)可能有很多解。如果Z是满足(2)的任意一个矩阵，则$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有解的充分必要条件是 $AZ\mathbf{b}=\mathbf{b}$，而且一般解为

$$\mathbf{x}=Z\mathbf{b}+(I-ZA)\mathbf{y} \tag{4}$$

其中$\mathbf{y}$是任意一个向量。

以后我们会看到，对每一个矩阵A都存在一个或多个满足(2)的矩阵Z。

习 题

1．若A是非奇异阵，λ为其特征值，$\mathbf{x}$为与λ相对应的特征向量。证明λ^{-1}是A^{-1}的特征值，对应的特征向量仍为$\mathbf{x}$。

2．对任意方阵A，定义A的广义逆矩阵为满足

$$A^{k+1}Z=A^k$$

的矩阵Z，其中k为某个正整数。证明当A为非奇异阵时，$Z=A^{-1}$。

3．若Z满足$AZA=A$，证明$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有解的充分必要条件为$AZ\mathbf{b}=\mathbf{b}$。

4．证明(4)是$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的一般解。

5．如果A是一个$m\times n$的零矩阵，问满足$AZA=A$的矩阵族是什么？

6．设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，其元素除$a_{kl}=1$外，其余元素全为零。问满足(2)的矩阵族Z是什么？

7．设A为已知矩阵，对所有的向量$\mathbf{b}$，$\mathbf{x}=Z\mathbf{b}$都是$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的解，证明Z满足$AZA=A$。

§4 广义逆的相异性

由上节习题3、4和7，读者会发现，对一个已知矩阵A，用以分析线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的解的广义逆Z的独特特征是满足方程$AZA=A$，而对于其它的目的，可能会出现别的关系式起着重要的作用。因此，如果我们涉及到最小二乘的性质，显然(2)是不够的，必须进一步提供别的关系。这就产生了对广义逆矩阵族更多的限制。如果我们对谱性质有兴趣（与特征值和特征向量有关），则仅限于方阵，因为只有方阵才有特征值和特征向量。我们将会看到，(2)的作用仅限于某些矩阵族。对一般情形必须提供别的关系式。

因此，对非奇异矩阵来说，不论什么研究目的，逆矩阵的定义是唯一的，而对广义逆矩阵来说，对不同的目的有不同的定义。

本书主要是提出和描述几种有用的和有趣的广义逆，并讨论它们的性质。主要内容限于讨论有限矩阵的广义逆。仅在第八章集中介绍在无限维空间上的推广以及微分和积分算子。关于一般环和半群的广义逆，本书不准备讨论，有兴趣的读者可以参考Drazin的文章（见参考文献）。

关于广义逆的文献相当广泛，不可能在这样一本教材中都涉及到。特别是，广义逆在统计中的应用书中只是简单介绍，读者可参考Rao、Mitra和Albert的书。

§5 广义逆矩阵的发展史

广义逆矩阵的概念似乎是1903年在Fredholm的文章中提到文中给出了关于积分算子的一个特殊的广义逆（他称其为“Pseudoinverse”）。Hurwize 在1912年的文章中描述了“Pseudoinverse”族的特征，他利用Fredholm算子的零空间的有限维性给出一个简单的代数结构(参看第八章)。关于微分算子的广义逆早已包含在1904年Hilbert关于一般格林函数的文章中，后来又有很多学者，如Myller(1906)、Westfall(1909)、Bounitzky(1909)、Elliott(1928) 和Reid(1931) 等都进行过研究。关于这方面的历史发展可参考Reid的文章。

因此，微分和积分算子广义逆先于矩阵广义逆。E、H、Moore首先指出矩阵广义逆的存在，并且对每一个有限矩阵（方阵或者长方阵）定义唯一的逆（他称其为“General reciprocal”）。尽管他在这一领域中公开发表的第一篇论文是在1920年美国数学会会议上宣布的一个论文摘要，然而有人（Lanczos）发现这方面最早的资料是Moore在1906年写的，详细内容在1935年 Moore

去世以后才公开发表的。在Moore 公开发表的第一篇文章以后的三十年中间没有引起足够的重视。直到五十年代对广义逆的研究兴趣方才复兴、研究集中地围绕着某些广义逆的最小二乘性质这个问题。Moore的文章中未叙述到)。1951年Bjerhammar重新论证了广义逆的一些性质，他重新发现了Moore 的广义逆并且指出一般广义逆与线性方程组的解之间的关系。1955年Penrose改进并且推广了Bjerhammar的关于线性方程组的结果，还证明了，对于一个给定的矩阵A，Moore的逆矩阵是满足下列四个条件：

$$1)AZA=A,$$

$$2)ZAZ=Z,$$

$$3)(AZ)^*=AZ,$$

$$4)(ZA)^*=ZA,$$

的唯一的矩阵Z。这一结果非常重要并富有成果，以致这个唯一的广义逆被通称为Moore-Penrose逆(一般简称为广义逆)。

自1955年一来，已先后发表了几百篇关于广义逆的很多方面及其应用的论文。鉴于文献所涉及的范围非常广阔，我们不准备去追踪历史的发展一一列出，只在文献目录中列出与本教材有关的参考文献。

第一章　广义逆的存在和构造

§1　Penrose方程

1955年Penrose证明了：每一个实元素（复元素）的有限阵（方的或长方的）都存在唯一的一个矩阵X，满足下列四个方程：

$$AXA=A\ \cdots\cdots(1)$$

$$XAX=X\cdots\cdots(2)$$

$$(AX)^*=AX\cdots\cdots(3)$$

$$(XA)^*=XA\cdots\cdots(4)$$（*表示转置共轭）

由于这种广义逆先前由Moore研究过，所以称为Moore-Penrose逆，记作A^+。

在本书中，我们将研究满足这四个方程中的某几个方程的广义逆。为此，给出一些记号：

$C^{m\times n}(R^{m\times n})$表示复（实）元素的$m\times n$阶阵的全体；

$C_r^{m\times n}(R_r^{m\times n})$表示秩为$r$的复（实）元素的$m\times n$阶阵的全体。

对于任意$A\in C^{m\times n}$，令$A\{i,j,\cdots,l\}$表示$C^{m\times n}$中一组阵，其中(i)，(j)，$\cdots$，(l)为满足(1)—(4)中的方程，一个阵$X\in\{i,j,\cdots,l\}$称为A的一个$\{i,j,\cdots,l\}$号逆，且记作$A^{(i,j,\cdots,l)}$。以后我们将扩大这四个方程到包括更多个方程，仍采用这种记号。

下面证明A^+的唯一性，A^+的存在性在§6中证明。

设X，$Y\in A\{1,2,3,4\}$，则

$$\begin{aligned}X&=XAX=X(AX)^*=XX^*A^*=XX^*A^*Y^*A^*\\&=X(AX)^*(AY)^*=XAXAY=XAY=(XA)^*YAY\\&=(XA)^*(YA)^*Y=A^*X^*A^*Y^*Y=A^*Y^*Y\\&=(YA)^*Y=YAY=Y。\end{aligned}$$

所以$X=Y$，故任意阵$A\in C^{m\times n}$有唯一的一个A^{+}。

特别当A为非奇异阵时，容易证明A^{-1}满足Penrose方程，由于A^{+}的唯一性，所以非奇异阵A的$A^{+}=A^{-1}$。

习 题 一

1．举一明显例子说明$A\{2,3,4\}$非空。

§2 {1}—逆的存在和构造

设$A\in C_r^{m\times n}$，若A的前r行中每一行至少有一个非零元素，其余各行只含零元素。又A的第$j_1,j_2,\cdots,j_r$列分别为单位阵I_m的前r列，其中$j_1,j_2,\cdots,j_r$为1，2，…，n中一组数，称矩阵A为Hermite标准形。

通过列的置换可以将Hermite标准型化为：

$$R=\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

而这种列的置换可以通过右乘以一系列的$n\times n$阶初等阵$P(i,j)$来实现，即

$$R=AP(1,j_1)P(2,j_2)\cdots P(r,j_r),$$

其中

$$P(i,j)=\begin{array}{l}\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ \\ \\ (j\text{行})。 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

令

$$P(1,j_1)P(2,j_2)\cdots P(r,j_r)=P,$$

则
$$R=AP，P\text{为一置换阵}。$$

若P的第t列记为P_t，I_n的第k列记为l_k。当$P_t=l_k$时，则

$$t=j_k,\quad (k=1,2,\cdots,r),$$

P的其余的$n-r$个列P_t皆为某个次序排列的单位向量，其中

$$t=j_k,\quad (k=r+1,\cdots,n。)$$

特别若$A\in C_r^{m\times n}$且$r=m$，则R中没有下面两个子阵，即

$$R=(I_r,\ K)。$$

若$A\in C_r^{m\times n}$且$r=n$，则R中没有右边的两个子阵，即

$$R=\begin{bmatrix}I_n\\0\end{bmatrix}。$$

根据Hermite标准型的结构容易构造出它的{1}—逆。

若$R\in C_r^{m\times n}$且

$$R=\begin{bmatrix}I_r, & K\\0, & 0\end{bmatrix}$$

则对任意一个$L\in C^{(n-r)\times(m-r)}$，$n\times m$阶阵

$$S=\begin{bmatrix}I_r, & 0\\0, & L\end{bmatrix}$$

就是R的一个{1}—逆。直接验证

$$RSR=\begin{bmatrix}I_r, & K\\0, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_r, & 0\\0, & L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_r, & K\\0, & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_r, & K\\0, & 0\end{bmatrix}=R.$$

特别当R为行满秩阵时，即

$$R=(I_r, K)。$$

则

$$S=\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix}.$$

由S的结构可见，R的秩越小，$R\{1\}$中的成员越多。特别当$r=0$时，即R为0阵时，S为任意$n\times m$阵，即任意$n\times m$阵皆为$m\times n$零阵的{1}—逆。

由Hermite标准形的{1}—逆可构造出任意阵$A\in C^{m\times n}$的{1}—逆。

定理 1 设$A\in C_r^{m\times n}$且令 $E\in C_m^{m\times m}$，$P\in C_n^{n\times n}$使

$$EAP=\begin{bmatrix} I_r, K \\ 0, 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

则对任意$L\in C^{(n-r)\times(m-r)}$，$n\times m$阶阵

$$X=P\begin{bmatrix} I_r, 0 \\ 0, L \end{bmatrix}E \tag{2}$$

就是A的一个{1}—逆。

证明 将(1)式改写成

$$A=E^{-1}\begin{bmatrix} I_r, 0 \\ 0, L \end{bmatrix}P^{-1},$$

直接验证可知

$$AXA=E^{-1}\begin{bmatrix} I_r, K \\ 0, 0 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r, 0 \\ 0, L \end{bmatrix}EE^{-1}\begin{bmatrix} I_r, K \\ 0, 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=E^{-1}\begin{bmatrix} I_r, K \\ 0, 0 \end{bmatrix}P^{-1}=A。$$ （证完）

由于P、E皆为非奇异阵，所以秩$(X)=r+$秩(L)，其中秩$(L)\geqslant 0$。由于L是任意的，所以A的{1}—逆具有包含在从r到$\min\{m,n\}$中间的任意指定的秩。

推论 1 每一个方阵都有一个非奇异的{1}—逆。

证明 设A是秩为r的$n\times n$阶方阵，又存在非奇异阵E，P使

$$EAP=\begin{bmatrix} I_r, K \\ 0, 0 \end{bmatrix}。$$

由定理 1，

$$X=P\begin{bmatrix} I_r, 0 \\ 0, I_{n-r} \end{bmatrix}E$$

就是A的{1}一逆，取$L=I_{n-r}$。由定理1，则

$$X=P\begin{bmatrix} I_r, 0 \\ 0, I_{n-r} \end{bmatrix}E=PI_nE=PE。$$

因为P、E皆为非奇异阵，所以PE也为非奇异阵。(证完)

例 1

$$\text{令}E_{ij}=\begin{array}{c} \begin{array}{c}(j\text{列})\end{array} \\ \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \\ 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0 \\ & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}_{m\times n} \end{array}(i\text{行})\text{，求}E_{ij}\text{的}\{1\}\text{一逆。}$$

$$\text{设}X=\begin{pmatrix} x_{11},\cdots,x_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n1},\cdots,x_{nm} \end{pmatrix}\text{，则}$$

$$E_{ij}X=\begin{pmatrix} 0 \\ x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jm} \\ 0 \end{pmatrix}(i\text{行})$$

$$E_{ij}XE_{ij}=\begin{array}{c} (j\text{列}) \\ \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \\ 0\cdots0 & x_{ji} & 0\cdots0 \\ & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} \end{array}(i\text{行})=E_{ij}。$$

故$x_{ji}=1$。所以除第j行第i列的元素为1，其余元素任意的$n\times m$阶阵皆为E_{ij}的{1}一逆。

另外，如果考虑E_{ij}的Hermite标准形

$$EE_{ij}P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$