光学测量

GUANGXUE CELIANG

王自强 包正康 编

浙江大学出版社

内容简介

本书介绍了光学零件和光学系统的各种测量原理方及测量方法，并扼要介绍了一些近代的先进测量技术。书中每章附有习题和参考文献，并在书末附有部分习题的答案。

本书可作为高校光学仪器专业，应用光学专业以及光电技术专业的教材，也可供从事有关光学工程研究的技术人员参考。

光 学 测 量

王自强、包正康 编

责任编辑 陈子饶

* * *

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* * *

开本：787×1092，1/16，印张：13.875 字数：330千字

1989年4月第一版 1989年4月第一次印刷

印数：1-3000

ISBN 7—308—00235—7

TP·018[塑] 定价：3.15元

前　言

“光学测量”是光学仪器专业的教材，它所涉及的内容是工程光学的一个重要分支。在光学仪器工业，以及有关的光学究研中处于显著的地位，它与物理光学、几何光学、精密机械、计算机技术等有密切的联系。我们在总结多年教学实践和科研的基础上，对我校83年编写的“光学测量”讲义进行了全面修改、删减、增补充实，编写了这本书稿承蒙梁铨廷副教授给予仔细审阅，在浙江大学出版社支持下出版了。本书可作光学仪器专业的教材，也可供有关人员作参考书

全书的内容包括测量误差和数据处理、光学测量中的对准与定焦技术、光学基本量的测量、光学系统特性参数测量、光学系统像差和波面的测量、表面粗糙度测量、以及光学系统成像质量的综合性检验。在编写中，内容安排上考虑了理论性和系统性，注意了光学测量原理方面的基本理论和解决实际问题的分析能力，并尽可能多地介绍一些近代的先进测量技术和方法，还在各章编入了适当的习题。因限于学时和篇幅，没有将“光学测量的基本部件及常用仪器”编入，建议将这部分内容改用实验室现场教学的方法解决。

限于作者水平，书中错误和缺点在所难免，欢迎读者批评指正。

作　者

1988.12

目 录

第一章　测量误差和数据处理

第一节　误差的分类和性质

以测量工具作为手段求出用标准计量单位表示的被测量数值，这一过程称为测量。

使被测量直接与标准量相比较叫做直接测量。被测量通过一定的函数关系与几个变量相联系，需分别对各变量进行直接测量，再把它们代入公式中进行计算求得被测量，这种测量叫做间接测量。

由于测量方法和测量仪器不可能绝对完善，测量条件的控制不可能绝对严格，以及测量者个人的生理器官的本能缺陷等，对被测量进行重复测量时，尽管采用了最精密的仪器，最可靠的方法，非常仔细的操作，然而所得到的测量结果还总会存在着一个微小的差异。既然量度结果间的差异是不可避免的，那末测量所得的值与被测量实际的真值之间的偏差也是不可避免的。换句话说，误差是不可避免的，任何测量中所得到的结果仅仅是一个近似值。

被测量的测量值与它的真值之间的差称为测量误差。设被测量的测量值为 x，其真值为x_0，则测量误差

$$\delta = x - x_0 \tag{1.1-1}$$

显然，测得的结果只有指明了误差的范围时才能认为是可靠的。测量的目的就是为了要获得合乎精度要求的可靠测量结果。为此，在进行某种测量时，首先需要分析误差产生的原因，从而尽可能地减少各种误差，甚至消除某些误差；其次要会处理对该被测量反复测得的一组数据，经分析得出这种测量方法应有的最可靠数值及其最小误差范围。

一、误差分类

测量误差按其产生原因可分为理论误差、仪器误差、操作误差及外界误差。

1.理论误差。它是测量本身没有理想化而产生的误差。例如，测量方法中采用了近似公式，数字显示中的量化误差等等。这些误差一般可以从理论上求得，在测量值中给予修正。

2.仪器误差。它是由于测量仪器或工具在设计制造上的不完善而产生的误差。例如，标准尺长度不准确，标尺的零点误差，零件的加工误差，偏心差等。

3.操作误差。这是由于测量中使用者技术水平不高和固有习贯、视觉的生理限制等而产生的误差。例如瞄准读数误差。

4.外界误差。测量时由于所处的外界条件时刻随着温度、湿度、气压、空气扰动及机械振动等自然条件的变化而变化，这都会给测量的结果带来误差。

如果按误差的性质来划分，则又可分为过失误差、系统误差和随机误差三大类。

1.过失误差（亦称粗差）。它是一种明显的与事实不符的误差。它主要是由于操作者

的粗枝大叶所造成的。例如量错、读错、写错等，或者是由于测量方法不正确，或仪器失调所致。此类错误无规则可循。就数值而言，一般远超过同一客观条件下的系统误差和随机误差。只要细心操作，多方注意，过失误差是可以避免的。

2.系统误差。所谓系统误差，系指误差数值是固定的，或者是按一定规律变化的。引起系统误差的原因是：(1)仪器的设计和工艺不合理，或仪器在使用前没有很好校正所致；(2)外界条件变化，如空气的温度和湿度变化。

系统误差可分为定值和变值两种。而变值误差又可分为累积误差、周期误差及按复杂规律变化的误差。

所谓定值误差就是在测量过程中误差的大小符号保持不变。这类误差包括仪器误差和视觉误差。与此相反，累积误差在测量过程中是随测量次数的增加而递增或递减。

周期误差的数值或符号是按周期变化的。例如测角仪的度盘偏心差是按正弦曲线周期变化的误差。

按复杂规律变化的误差，如度盘分划刻度误差，这种误差若用图形来表示是一条形状复杂而又有规律的折线。

系统误差的存在对多次测量结果的影响特别大，因此在测量中必须设法防止及消除。系统误差就个体而言，一般均具有规律，所以可以用实验的方法消除，也可以用引入修正值的方法消除或减小。例如用相对180°的两面读数再取平均值的方法来消除测角仪的度盘偏心差；当已知刻度尺或度盘的格值误差时，可在测量结果中加入修正值予以修正和消除等。

系统误差表示测量结果偏离被测量真实值的程度，因此系统误差的大小决定了测量的正确度。

3.随机误差。在相同的条件下对某量进行反复测量，所得的误差在大小和符号上初看起来是杂乱无章分布的，但稍加分析，其实它们是符合统计规律的，这种误差称之谓随机误差，或称偶然误差。例如测量时的瞄准误差、估读误差等便是随机误差。

这种误差的产生是由于仪器的精度、工作人员感觉器官的生理变化，外界条件的影响等原因，总是不可避免的。仪器愈精密、测量人员的经验愈丰富，外界条件的影响估计得愈正确，则在测量中随机误差就愈小。

通过多次实验证明，在同样的测量条件下，重复多次的直接测量中，大量的随机误差呈现出一定的规律性。最为常见的规律是概率论中的正态分布曲线，如图1.1-1所示。图中的纵座标y表示概率密度，横座标δ表示随机误差。

二、随机误差的性质

从图1.1-1可以看出随机误差有以下四个性质：

1.在一定的测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定的限值；

2.绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的机会多；

3.绝对值相等的正误差与负误差出现的机会相等；

4.在相同条件下，对某一量测量所得的随机误差之和总是一个有限的微小量，当测量次数无限增加时其和趋近于零。

设随机误差介于 δ 与 $\delta+d\delta$ 之间的概率为 dp，则

$$dp = Yd\delta \tag{1.1-2}$$

因此，随机误差在区间 $[a, b]$ 的概率为

$$P = \int_a^b Yd\delta \qquad (.11\text{-}3)$$

上式所表示的概率积分可以在一般数学手册中查到具体数值。图1.1-1 中 对几个特殊的区间给出了概率 P 的数值。例如任一观察值的误差介于 $\pm m$ 之间的概率为68%。介 于 $\pm\varphi$ 之间的概率为58%，m 是均方差，φ 是算术平均误差，其计算公式见表1.4。

图1.1-1中还有 $-p$ 与 $+p$ 两个点，p 叫做或然 误 差，任一误差介于 $\pm p$ 之间的概率为50%。换句话说，在100次测量中，有50次测量误差比 p 小，其余50次的误差比 p 大。

理论上讲，正态分布曲线可以延伸到无限远处。但 从实用观 点看，图1.1-1中 $-M$ 与 $+M$ 两点就是曲线的截止点，这是由于在 1000 次测量中，误差介于 $\pm M$ 之 间的就有 997 次。因此，把 M 叫做极限误差，按照正态分布规律，M 刚好是均方差 m 的三倍，即

$$M = 3m \tag{1.1-1}$$

随机误差的大小可以说明测量所得的数值重复性如何。由随机误差所引起的测量值偏离真值的程度称为精确度。

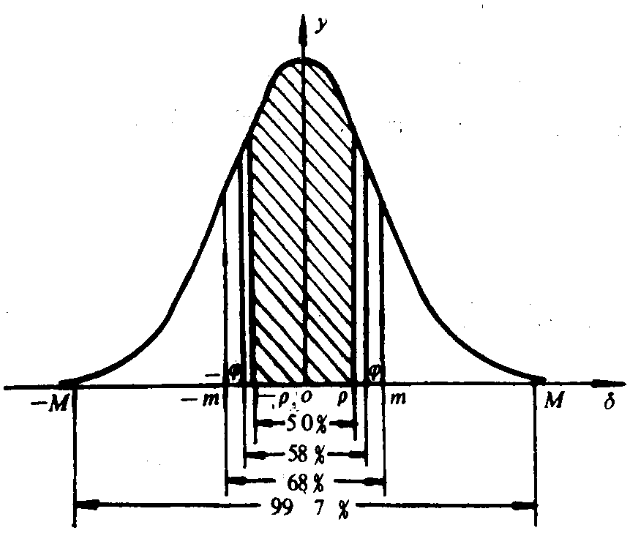

图1.1-1

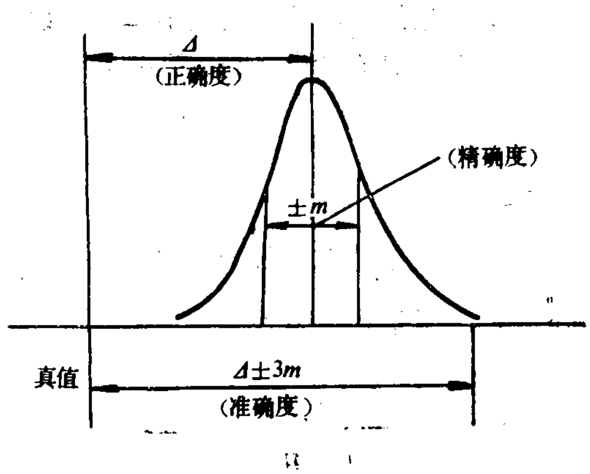

图1.1-2

在日常测量工作中，所指的精度高低一般是指系统误差和随机误差共同引起的测量值与真值的偏离程度，称为准确度。

准确度由正确度与精确度所组成。图1.1-2 便是精度的模式图。图中所示的正确度 表示测量结果的系统误差大小程度，即仪器示值离真值 X_0 的程度。图 中 所示的精确度表示了测量结果中随机误差大小的程度，即指各次测量中仪器示值变动的程度。图中所示的准确度是测量结果中系统误差与随机误差的综合。表示了测量结果与真值的一致程度。

从上述可知，精确度好则正确度不一定好，正确度好则精确度也不一定好，但准确度好，则需要精确度与正确度都好。

在光学测量中还经常要碰到等概率分布的随机误差。如图1.1-3所示，随机误差在$-a$到$+a$区间内任一点出现的概率都是相同的，而在这个区间外的概率为零。例如用显微镜或望远镜对物体进行调焦时，调焦误差在物体景深范围内出现的概率各处相同。由于调焦不会超出景深范围，因此在景深范围以外的概率为零。这样，$\pm a$便是极限误差，它与均方差m之间有：

$$m=\frac{a}{\sqrt{3}} \tag{1.1-5}$$

的关系。

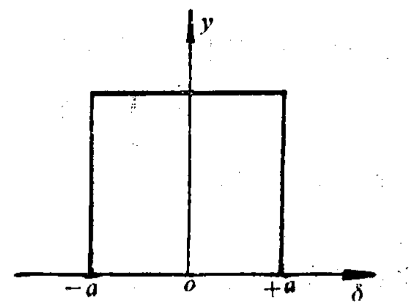

图1.1-3

第二节　测量精度的标准

对某一量作多次重复的测量，由于每次测量不可避免地都要产生误差，尽管测量是在相同条件（即等精度）下进行，但是所得各误差仍都是不一致的。这样，就不能把一次测量误差值的大小直接作为测量精度的标准。为此，应从全面研究整个误差列出发来评定该列测量的精度。

常用的等精度测量列的精度标准有：均方差m、平均误差δ和或然误差P。

1.均方差m

从概率论知道，某一误差出现的次数与误差值δ的大小有关，即某一随机误差可能出现的次数Y（概率密度）与该误差值δ成函数关系，该关系通常以高斯方程来表示，即

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}m}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2m^2}\right) \tag{1.2-1}$$

式中　δ是测量值对真值的偏差；m表示一系列测量的均方差，即$m^2=(\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2)/n=\sum_{i=1}^{n}\delta_n^2/n$，于是有

$$m=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_n^2}{n}} \tag{1.2-2}$$

式中n为测量次数。

从式(1.2-1)可知，随机误差的分布情况与m有关。m值不同时，曲线的顶点位置和收敛程度都不一样。见图1.2-1所示，m值小的曲线其顶点位置较高，收敛得较快，也就是说，大误差出现的概率较m值大的要小得多。所以m可以作为精度标准。

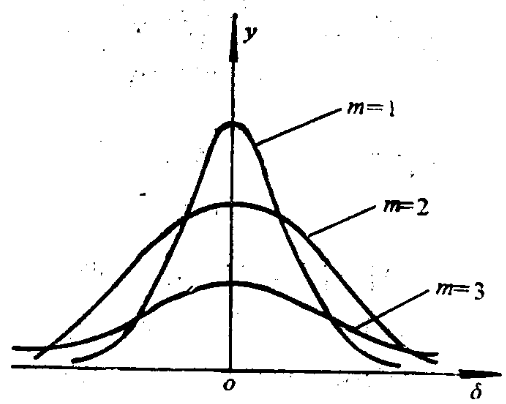

图1.2-1

对于某一测量种类和量度方法，经精密的测量和计算得其均方差后，即可以把该均方差作为该类和该方法测量精度的标准。以后在该类测量和该种测量方法下进行任何一次测量时，其精度均以这个均方差来评定。例如在某测角仪上用自准直法多次测量棱镜某一角度

后算得其均方差为±5秒，则可规定今后用这仪器和自准直法一次测量任何一角度时，其精度都应以均方差±5秒来评定。因此，均方差又称为单次测量均方差。

2. 平均误差 φ

一列等精度测量的真误差，其绝对值的算术平均值称为平均误差，即

$$\varphi = \pm \frac{|\delta_1| + |\delta_2| + \cdots\cdots |\delta_n|}{n}$$

$$= \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} |\delta_n|}{n} \tag{1.2-3}$$

式中 n 为测量次数；δ 为真误差。

从概率论知道，平均误差和均方差之间有如下关系：

$$\varphi = 0.7979\, m \approx \frac{4}{5} m \tag{1.2-4}$$

3. 或然误差 ρ

在一列等精度测量中，某一随机误差具有这样的数值，比它大的和比它小的误差出现的机率同样多，则该误差值称为或然误差。或然误差与均方差有如下转换关系：

$$\rho = 0.6745m \approx \frac{2}{3} m \tag{1.2-5}$$

概率论证明，当上述三种标准测量次数无限增加时，都能同样精确地反映出测量的精度，而且三者之间的转换关系愈加重合。然而实践中测量次数总是有限的，因此通常以单次测量均方差 m 作为衡量精度的基本标准。因为它在有限次测量中更能真实地反映出该列测量中误差的存在，而大误差对测量结果的可靠程度显然是有害的。均方差所以能反映出大误差存在的原因是因为它与真误差成平方关系[见式(1.2-2)]。

例：对同一量进行两次等精度测量得到两列等精度误差列：

第一列：+2，-3，+2，-4，-1，+1，+2，-3，-2，+1；

第二列：+1，+7，-2，+1，-3，+1，0，-5，-1，0。

根据三种测量精度的标准，对第一列有：

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_n^2}{n}} = \pm 2.3$$

$$\varphi_1 = \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} |\delta_n|}{n} = \pm 2.1$$

$$\rho_1 = \pm 1$$

对第二列有：

$$m_2 = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_n^2}{n}} = \pm 3.0$$

$$\varphi_2 = \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} |\delta_n|}{n} = \pm 2.1$$

$$\rho_2 = 0$$

由上述数据可见，用或然误差来评定上述两列测量时，第二列比第一列具有较高的精度；用平均误差来评定两列测量时，具有相同的精度。然而实际情况是第二列较第一列含有较大的误差(+7， -5)，通过均方差就可以作出较准确的判断，表明第一列比第二列有较高的精度。

第三节 相对误差

为了对测量精度进行评价，有时用均方差还不够完善。因为它不能体现出测量误差与被测值大小有关的情况。例如用尺子测量100米的准确距离，得值101米，则误差为 1 米；又用钢尺测量准确距离为1000米的长度，得值1001米，则误差亦为1米，从误差的绝对值来说，它们都一样。这样，能不能说两者的测量精度相等呢？显然不能。这时就需要用相对误差来作为精度标准。相对误差的定义如下：

$$\text{相对误差} = \frac{\text{误差}}{\text{真值}} \tag{1.3-1}$$

当误差较小时

$$\text{相对误差} \approx \frac{\text{误差}}{\text{测量值}} \tag{1.3-2}$$

现在仍以上例来说明，根据相对误差定义，前者的相对误差为1%，而后者的相对误差为0.1%，显然后者的精度要比前者高10倍。

与相对误差同时存在的均方差、极限误差、真误差、平均误差等均称为绝对误差。

必须指出，在角度测量中，误差与角度值的大小无关。因此，角度的测量误差以绝对误差表示，而在长度测量中以相对误差来表示。如光学测量中的焦距测量和球面曲率半径测量等通常是以相对误差表示。

第四节 间接测量误差的传递

在光学测量中，许多光学量都是通过间接测量的方法来获得。所谓间接测量就是说某一未知量系并不是直接测得的，而是通过一定的函数关系将未知量与直接可测量的变量联系起来，当这些变量测定以后，利用给定的公式计算出未知量。很显然，在这种间接测量中，每一个直接测量结果的误差都将影响到最终的结果。为了评定函数值的精度，必须寻找直接测量均方差与函数均方差的关系。

设函数 $V = V(x, y)$，而直接被测量为x和y。如果所测得量的真误差为Δx和Δy，由于Δx、Δy与x、y相比很小，所以相应的V值的真误差ΔV可近似地取泰勒级数的一次幂项确定，即

$$V+\Delta V=V(x,y)+\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y$$

$$\therefore\quad \Delta V=\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y \tag{1.4-1}$$

当以均方差m_x、m_y来表示x、y的误差时，相应于V的均方差m_v根据均方差的定义将有：

$$m_V^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta V_i)^2}{n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial V_i}{\partial y_i}\Delta y_i\right)^2}{n}$$

设在测量精度范围内，偏微分值是一个常数，则有

$$m_V^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n}+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2}{n}$$

$$+2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i\cdot\Delta y_i)}{n}$$

当n很大时，可以认为Δx和Δy的正负值出现的概率相同，则$\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i\cdot\Delta y_i)=0$。因此

$$m_V^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n}+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2}{n}$$

$$=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 m_y^2$$

或

$$m_V=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 m_y^2} \tag{1.4-2}$$

推而广之，当V是x_1，x_2，……x_n个独立的直接测得量的函数$V=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n)$时，$V$的中误差为：

$$m_V=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2+\cdots\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2} \tag{1.4-3}$$

上式称为误差传播定律，意即函数的均方差的平方等于该函数对于每一个自变数的偏导数的平方与相应该自变数的均方差的平方乘积之总和。

在应用上式时必须注意，只有在函数均方差的计算精度范围内，可以把各微分项认为是常数时才正确。

例：利用公式$\Gamma=f'_{物}/f'_{目}$来测量望远镜的放大率，已知望远镜焦距$f'_{物}=108\text{mm}$，目镜焦距$f'_{目}=8\text{mm}$，而物镜焦距测量均方差$m_{f'物}=\pm 2\text{mm}$，目镜焦距均方差$m_{f'目}=$

± 0.05mm，试求具有± 0.01精度的放大率均方差m_Γ

解：$m_\Gamma = \pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial \Gamma}{\partial f'_{物}} m_{f'_{物}}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Gamma}{\partial f'_{目}} m_{f'_{目}}\right)^2}$

而 $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial f'_{物}} = \dfrac{1}{f'_{目}}$，$\dfrac{\partial \Gamma}{\partial f'_{目}} = -\dfrac{f'_{物}}{f'^2_{目}}$

所以 $m_\Gamma = \pm \dfrac{1}{f'^2_{目}}\sqrt{f'^2_{目}\ m^2_{f'_{物}} + f'^2_{物}\ m^2_{f'_{目}}}$

将数值代入得

$$m_\Gamma = \pm\frac{1}{64}\sqrt{256+98} = \pm 0.294$$

要使达到指定的精度，必须计算到三位有效数字，但偏导数$\partial\Gamma/\partial f'_{目}$在规定的均方差范围内变化时仅保持2位有效数字不变，即当$f'_{目} = 8+0.05$时，$\partial\Gamma/\partial f'_{目} = 3.1$；$f'_{目} = 8-0.05$时，$\partial\Gamma/\partial f'_{目} = 3.13$，因此所指定的精度不可能达到，而只能得：$m_\Gamma = \pm 0.29$

第五节 最小二乘法

最小二乘法是分析一组测量数据时常用的方法。“二乘”就是平方的意思，因此最小二乘法的含意简单说来就是使偏差的平方和达到极小值。

举一个简单例子来说明。设测量某一工件的长度得到一系列测量值x_1、$x_2\cdots\cdots x_n$。选择一个与各测量值最接近的数值$\bar{x}$，则各测量值对于$\bar{x}$的偏差为$x_1-\bar{x}$，$x_2-\bar{x}$，$\cdots\cdots x_n-\bar{x}$。则偏差的平方和用下式表示：

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (1.5\text{-}1)$$

选择不同的$\bar{x}$值，就会得到不同的S值，用最小二乘法总可以找到一个$\bar{x}$值使S值达到极小值。在数学上找极小值的办法是：令$(dS/d\bar{x}) = 0$，并有$d^2S/d\bar{x}^2 > 0$成立，即

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}} = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

或改写成： $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$，

故 $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1.5\text{-}2)$$

上式$\bar{x}$是一系列测量值的算术平均值。又

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{x}^2} = 2n > 0$$

因此用 $\bar{x}$ 代入式(1.5-1)可得极小值。由此可见，用算术平均值作为测量结果是符合最小二乘法原则的。

在测量工作中经常得到一组测量值x_1，x_2，……x_n，与另一组测量值y_1，y_2，……y_n一一对应。如果以x为横座标，y为纵座标，就可以画出许多点子（参看图1.5-1）。现在要画出一条直线，使之尽量靠近这些点，最简单的办法是用眼估计，画出一条自己认为最合适的直线，而不同的观察者就会画出不同的直线。要得到统一而较合理的结果还是应用最小二乘法的原理，其方法如下：假设所求直线的方程

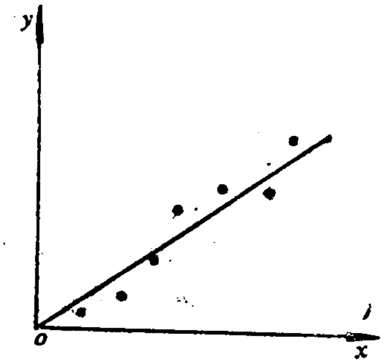

图1.5-1

$$y = ax + b \tag{1.5-3}$$

由于(x_1, y_1)、(x_2, y_2)……各点一般说并不在这一直线上，故$y_1 = ax_1 + b$、$y_2 = ax_2 + b$等的式子是不成立的，必须增加一个误差项δ，即写成下列误差方程式

$$\begin{cases} y_1 - ax_1 - b = \delta_1 \\ y^2 - ax_2 - b = \delta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n - ax_n - b = \delta_n \end{cases} \tag{1.5-4}$$

式中的a、b、δ_1、δ_2、……δ_n是末知数，但是当a和b的数值一旦确定后，代入误差方程式(1.5-4)便可得到δ_1、δ_2……δ_n的数值。

令各误差项的平方和为S，即

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots\cdots\delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

根据最小二乘法的原则，使S达到极小的条件是S对a和b的偏导数等于零，即：

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0$$

这两个式子可以改写成

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + nb = \sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases} \tag{1.5-5}$$

称为法方程，由法方程式可求出a和b，代入(1.5-3)便得所求真值的方程式。

例：在光学车间用小样板检验大零件的方法如下所述。被测零件为一块 ϕ240mm的平晶，样板为ϕ80mm的平晶，在用五块平行性偏差已知的平晶分五段进行测量。测量时，同时放置编号为1、3、5的三块平晶，如图1.5-2中实线圆所示。读取光圈数后取下三块平晶，再放上编号为2、4的两块平晶，如图中的虚线圆所示。每个小平晶所测得的光圈数列于表1.1中。

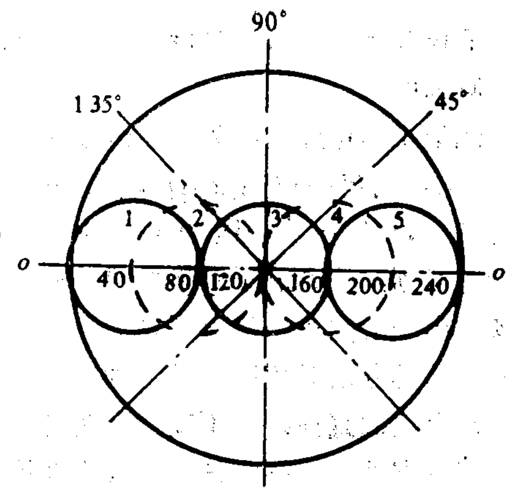

图1.5-2

表 1.1

平晶编号	1	3	5	2	4
测得光圈数	−0.05	−0.10	+0.15	−0.20	+0.10
平晶本身误差	+0.05	−0.05	+0.05	−0.10	0
扣除后的结果	−0.10	−0.05	+0.10	−0.10	+0.10
以微米计	−0.03	−0.015	+0.03	−0.03	+0.03

根据表中数据可以用作图方法求出被测平晶在 OO 方向(图1.5-2)上的面形误差。具体方法是：在直角座标的横座标方向先画一直线AC，使其长与小平晶直径ϕ80mm相对应。由表1.1中查知，与1号小平晶相对应的这一段表面，在中间凹下去0.03um，因此我们在AC的垂直平分线上按一定比例向下取0.03μm的长度，由此得到B点(见图1.5-3)。对应于2号小平晶，由表查知，也是低光圈，所以按同样比例，由C点向上取0.03μm的长度，得A'点，连接BA'并延长，使其与横座标上120mm处的垂直线相交，得D点。对应于3号小平晶，由表查知，也是低光圈，则仍可按比例由D点向上取0.015μm长度，得B'点，连接

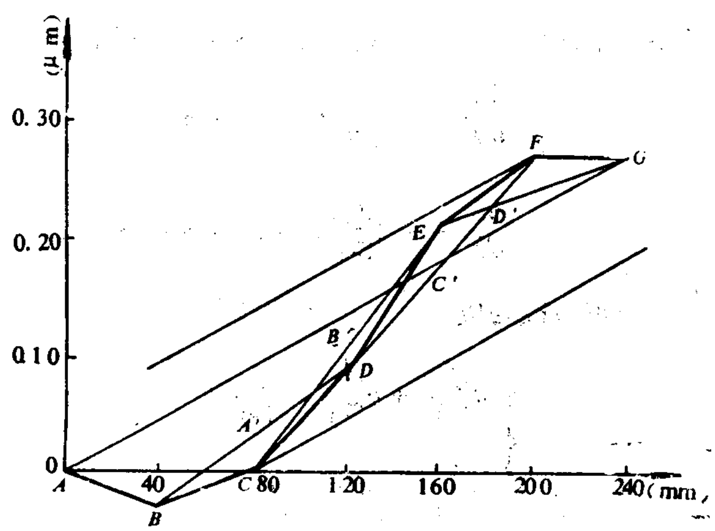

图1.5-3

CB'并延长与横连标上160mm处垂直线相交得E点。对应4号小平晶是高光圈，则由E点按比例向下取0.03μm长，得C'点。连接DC'并延长与横座标上200mm处垂直线相交得F点。按类似方法可得G点。这样就可得到一条折线$ABCDEFG$，这便是被测平晶的面形。连接始末二点，得AG直线。在C和F点作AG的平行线，这两条平行线间距离为面形误差。我们知道这两条平行线夹住折线的方向不同，其所得的面形误差值就不一样。因此，用上述方法求得的面形误差不一定是最合理的。最佳的办法是用最小二乘法来求得。

用最小二乘法找参考平面的方法如下：设$y_R=ax+b$代表参考平面在oo方向上的一个直线方程，各被检段或点所得的量y_i对y_R的偏差量$\Delta y=y_i-y_R$，即

$$\Delta y=y_i-ax_i-b \tag{1.5-6}$$

令上述的平方和对a、b的偏导数等于零，求得其法方程[见方程组(1.5-5)]。方程中的x_i和y_i就是图1.5-3中的A、B、C、D、E、F、G各点的座标值，其值列于表1.2中。根据表中的数值和法方程(1.5-5)，就可解得系数$a=0.00145$和$b=-0.0583$。然后将系数a和b的数值代入式(1.5-6)，得到表1.3中的数值。表中的y_i-y_R是被检平晶对于参考平面的偏差，亦即平面性偏差，其最大正值为0.058um，最大负值为-0.058μm，两者绝对值之和约为0.12μm。

表 1.2

x_i (mm)	0	40	80	120	160	200	240
y_i (μm)	0	−0.03	0	0.09	0.21	0.27	0.27

表 1.3

x_i (mm)	0	40	80	120	160	200	240
y_i (μm)	−0.058	0	0.058	0.116	0.174	0.232	0.290
y_i-y_R (μm)	0.058	−0.03	−0.058	−0.026	0.036	0.038	−0.02

第六节　等精度测量的结果处理

对某一量进行多次重复测量，其目的在于获得该量的最可靠值和最可靠值的精度。

一、等精度测量的最佳值及其精度

从一系列测量中求出与真值最接近的值，该值称为最佳值。

从最小二乘法原理已经知道，等精度测量中，算术平均值最接近于真值，也就是说，算术平均值是最佳值。最佳值的精度分析如下。

已知算术平均值：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots x_n)$$

由于各测量值是彼此不相关的独立事件，因此可按间接测量的误差传递公式求算术平均值的均方差：

$$m_{\bar{x}}=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{n}m_{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{n}m_{x_2}\right)^2+\cdots\left(\frac{1}{n}m_{x_n}\right)^2}$$

式中x_1、x_2、……x_n是等精度测量值，它们的均方差均相等，即$m_{x1}=m_{x2}=\cdots=m_{xn}$，

且
$$m=m_{x_i}=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_n^2}{n}}$$

于是
$$m_{\bar{x}}=\frac{m}{\sqrt{n}} \tag{1.6-1}$$

上式表明算术平均值的均方差$m_{\bar{x}}$与观测次数有关，并比单次测量均方差m小$\sqrt{n}$倍。

二、有限次测量均方差的实际计算公式

在定义均方差的时候，δ_1、δ_2……δ_n是各测量值与真值之差。而测量次数不能无限多，且真值又是不知道的，故δ和m仍无法计算。为此，实际计算中用算术平均值代替真值。

设v表示各测量值与算术平均值之差，即$v_i=x_i-\bar{x}$，又以φ表示算术平均值与真值之差，即$\varphi=\bar{x}-x_0$。因$\delta_i=x_i-x_0$，所以$\delta=v_i+\varphi$。当i为$1-n$时，则n个式子平方后相加得：

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}v_i^2+n\varphi^2+2\varphi\sum_{i=1}^{n}v_i$$

根据算术平均值的性质，有$\sum_{i=1}^{n}v_i=0$，再近似地以$m_{\bar{x}}$代替φ，于是

$$m^2\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i^2+m_{\bar{x}}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i^2+\frac{1}{n}m^2$$

将上式变为等式，并用符号m_s代替m，得

$$m_s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i^2+\frac{m_s^2}{n}$$

故
$$m_s=\pm\sqrt{\frac{v_1^2+v_2^2+\cdots v_n^2}{n-1}} \tag{1.6-2}$$

上式表示均方差m用一系列测量值求出的m_s来估计，故称m_s是m的最佳估计量。

现将算术平均值、单次测量值的误差及测量结果的计算公式列于表1.4中，以供参考。