信息管理与信息系统专业系列教材

概率论与应用统计

贾希辉　主编

科学出版社

信息管理与信息系统专业系列教材

概率论与应用统计

贾希辉 主编

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

本书共分 10 章，内容包括：随机事件与概率、随机变量及分布、随机变量的数字特征、随机向量及其分布、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等。

本书取材“少而精”，结构严谨，纲目清晰，突出基本概念，基本方法，重点在于应用。每章结合实际应用选择例题，章后附难易适中的习题，并在书后附有答案。

本书适合高等院校作为教材选用。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与应用统计/贾希辉主编．-北京：科学出版社，2001

（信息管理与信息系统专业系列教材）

ISBN 7-03-009632-0

Ⅰ．高… Ⅱ．贾… Ⅲ．数学-高等学校-教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 036889 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2001 年 8 月第一次印刷 印张：15 1/2

印数：1—4 000 字数：346 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

《信息管理与信息系统专业系列教材》

编 委 会 名 单

总　　序

中南财经大学是财政部直属的一所以经济学科、管理学科为主，兼有法学、文学、哲学、理学等6个一级学科的，具有50年历史的高等学校。中南财经大学经济信息管理系始建于1978年，1980年开始招收本科生，是继中国人民大学之后在全国高校第二个建立信息管理专业的系，并于1990年，经国务院学位委员会批准建立信息经济硕士点，是全国首批设立的该专业4个硕士点之一。

改革开放20年，正是信息管理与信息系统专业不断建设成长的20年。中南财经大学信息系经过不断的探索和建设，在教学研究、师资队伍建设、教材建设、实验室建设及教学管理等方面均打下了良好的基础。

在专业发展和教材建设中，我们遵循教育必须为社会主义建设服务和必须面向现代化、面向世界、面向未来的要求，20年来，无论是专业目录调整前的管理信息系统专业，还是专业目录调整后的信息管理与信息系统专业，我们都努力在专业建设的深度以及市场经济建设的应用力度上下功夫，力求学生所学的专业知识在实际工作中能派上用场，在教学体系建设及教材建设中力求体现本专业的特色。经过20年艰苦奋斗与教学科研实践，中南财经大学信息管理与信息系统专业已经建立起规模适当，多层次多形式的办学体系；初步形成多学科有机结合，互相渗透的专业特色；建立了结构合理的教师队伍；具备了比较完善的办学条件；取得了一批先进水平的科研成果，为国家培养了大批受社会欢迎的信息管理专门人才。

为了建设一套有信息管理与信息系统专业特色的教材，我们长期以来在加强基础、拓宽知识面、增强适应性、建立主动适应社会主义建设需要和适应现代科学技术、文化发展趋势的教学内容以及课程结构等方面搜集了大量的素材和案例，特别是在理论联系实际，面向经济建设主战场，强化学生的动手能力，结合最新的科技发展以及在教材中融进各位教师的研究成果上花了不少的精力。1998年我们按照教育部公布调整后的新专业目录，组织了两个小组到兄弟学校调查研究，进行了多次座谈和研讨，进一步明确了**信息管理与信息系统专业的性质是以系统的方法、现代信息处理技术来研究人类管理活动规律及其应用的学科**。它融合了管理学、经济学、计算机科学与技术等学科的知识，以系统观点为指导，运用定性与定量结合的方法及相关学科的研究手段，深入研究并有效地解决社会中各类信息管理问题。本专业的目标是：培养具备现代管理学理论基础、计算机科学技术知识及应用能力，掌握系统思想和信息系统分析与设计方法以及信息管理等方面的知识与能力，能在国家各级管理部门、工商企业、金融机构、科研单位等部门从事信息管理以及信息系统分析、设计、实施管理和评价等方面的高级专门人才。本专业的培养要求是：学生主要学习经济、管理、数量分析方法、信息资源管理、计算机及信息系统方面的基本理论和基本知识，接受系统和设计方法以及信息管理方法的基本训练，具备综合运用所学知识去分析和解决问题的基本能力。本专业的毕业生应

具备以下的知识和能力：(1) 掌握信息管理和信息系统的基本理论、基本知识；(2) 掌握管理信息系统的分析方法、设计方法和实现技术；(3) 具有信息组织、分析研究、传播与开发利用的基本能力；(4) 具有综合运用所学知识分析和解决问题的基本能力；(5) 了解本专业相关领域的发展动态；(6) 掌握文献检索、资料查询、收集的基本方法，具有一定的科研和实际工作能力。

基于上述思想，我们修订了信息管理与信息系统专业教学计划，相应地修订了相关课程的教学大纲，组织人员编写出有信息管理与信息系统专业特色的教材，供教学之需。经反复讨论，确定出版以下图书作为信息管理与信息系统专业系列教材：

《计算机实用技术基础》

《离散数学》

《数据结构》

《数据库原理与设计》

《计算机操作系统》

《计算机组成原理》

《管理决策分析》

《概率论与应用统计》

《运筹学（一）》

《高等数学》

《C语言程序设计》

本套教材得以顺利出版，得到了科学出版社的大力支持，我代表本套教材的各位编写人员向科学出版社表示由衷的感谢！

由于水平所限，在陆续出版的系列教材中错误难免。望读者不吝赐教，以资改进，在此一并致谢！

邱家武

1999年元旦于中南财经大学

前　言

概率论与应用统计是从数量侧面研究随机现象规律的数学学科，是应用数学的重要组成部分。它的理论与方法不仅广泛应用于现代数学、工程技术和其它自然科学，在经济学、管理学、信息科学中同样占有重要地位。概率论与应用统计已成为高等院校学生不可或缺的基础课程。

随着知识经济时代的来临，新知识、新技术日新月异，迅猛发展，高等教育面临前所未有的挑战。为了使学生在有限的教学时间内获得最实用的知识，编写适应新世纪人才培养的教材是我们责无旁贷的工作。

本书是在我们长期教学实践的基础上，借鉴了大量国内外同类教材的基础上编写而成的。内容取材上力求“少而精”，编写方法上力求结构严谨，纲目清晰，突出基本概念，基本方法，重点在于应用，不纠缠较深刻的数学理论推导。每章节注意概念间的联系并选择典型实用的例题、习题，难易适中，旨在帮助读者加深理解概率与统计的理论、方法和应用。

全书共分10章。第一章至第五章介绍随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、随机向量及其分布、大数定律及中心极限定理等概率论的基本理论；第六章至第十章介绍样本及其分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等数理统计的基本概念及方法。书后附有各章的习题答案，附录提供了数值分布表。

参加本书编写的有汪家义（第一、二章），陈幸龄（第三、四、五章），贾希辉（第六、七、八章），吴唯实（第九、十章），全书由贾希辉修改定稿。

编写本书我们虽然尽了最大努力，由于编者水平所限，错谬之处在所难免，恳请同行专家和广大读者批评指正。

编者

2000年秋于武昌

目　　录

第一章　随机事件与概率

在我们观察自然界和人类社会发生的一些现象时，会发现有两类不同性质的现象。一类现象是确定性现象，例如：

① 在标准大气压下，水加热到 100 ℃ 必然沸腾。

② 同性电荷互相排斥，异性电荷相互吸引。

③ 质量为 m 的物体受到外力 f 的作用必然产生加速度 a。

这类在一定的条件下必然发生的现象称为确定性现象。

还有一类现象是偶然现象，例如：

① 往桌上投一枚硬币，可能正面朝上，也可能反面朝上，而且在投掷之前不能预先断言哪一面朝上。

② 从一个装有一个红球和一个黑球的袋子中摸出一个球，摸到的球可能是红球，也可能是黑球。

③ 新生的婴儿可能是男孩，也可能是女孩。

所有这类在一定的条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且不能预先断言出现哪种结果的现象称为随机现象。

那么，这些随机现象是不是杂乱无章，从而导致我们无法对它们进行研究呢？事实上并非如此。进一步地观察分析，我们会发现，虽然个别随机现象没有规律，但大量性质相同的随机现象却有某种规律性，因而也是可以预言的，这种规律称为随机现象的统计规律性。例如，我们掷一枚均匀的硬币，当掷一次时，我们不能预言是否出现正面，但是重复掷多次时，将会发现出现正面的次数与所掷总次数的比值接近 1/2。

概率论与数理统计的任务就是揭示随机现象内部存在的统计规律性。由于随机现象广泛地存在于自然界和人类社会中，并且随着生产的发展和科学研究的深入，许多部门不断提出了研究随机现象的课题，使得概率论与数理统计已成为有广泛应用的、有深刻理论基础的、蓬勃发展的一门数学学科。

本章介绍概率论中最基本的一些概念，如样本空间、随机事件及概率等。还介绍概率的性质及其一些基本的计算方法，它是学习后续章节的基础。

第一节　随 机 事 件

一、随机试验和样本空间

为了研究随机现象内部存在的规律性，必须对随机现象进行观察或实验。今后我们把对随机现象所进行的观察或实验统称为试验。由于概率论研究的对象是随机现象，因此，要求所做的试验应有如下特点：

① 试验可以在相同的条件下重复进行。

② 每次试验中可以出现不同的结果,而究竟出现哪一个结果,试验前不能预先断言。

③ 试验中的一切结果是事先已知的,并且在一次试验中有且仅有其中一个结果出现。

我们把具有以上特点的试验称为随机试验。简称为试验,记为 E。

随机试验 E 中每一个可能的结果称为一个基本事件(或样本点),其特点是每次试验必出现一个而且只能出现一个基本事件,任何两个基本事件都不能同时出现。样本点用 ω 表示。一切基本事件组成的集合(即全体样本点组成的集合)称为基本事件空间(或样本空间),用 Ω 表示。

概率论中讨论一个随机试验时,首先要明确它的样本空间。对于一个具体的随机试验来说,样本空间可以根据试验的内容(即试验条件实现一次的含义和观察的目的)来决定。

【例 1.1】 试验 E:掷一枚骰子,观察出现的点数。试验的所有可能结果有六种:1 点,2 点,……,6 点。若记 $\omega_i = i$ 点,$i=1,2,\cdots,6$,则样本空间可记为

$$\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$$

【例 1.2】 试验 E:把一枚硬币连抛两次,观察正反面出现的情况。试验的所有可能结果有四种:{正,正},{正,反},{反,正},{反,反}。若记 $\omega_1=$ {正,正},$\omega_2=$ {正,反},$\omega_3=$ {反,正},$\omega_4=$ {反,反},则样本空间可记为

$$\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$$

若做试验 E:把一枚硬币连掷两次,观察出现正面的次数。试验的所有可能结果有三种:0 次,1 次,2 次。则样本空间为

$$\Omega = \{0,1,2\}$$

【例 1.3】 试验 E:一射手进行射击,直到击中目标为止,观察射击的次数。若用 ω_i 表示"第一次击中目标所需要的射击次数为 i 次"这一结果,则样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$$

若简记 ω_i 为 i,则

$$\Omega = \{1,2,\cdots\}$$

【例 1.4】 试验 E:抽取一个灯泡,测试其寿命。用 x 表示"灯泡的寿命为 x 小时"这一结果,则样本空间可记为

$$\Omega = \{x:0 \leqslant x < +\infty\}$$

通过上面的例子我们可以看到,随机试验的样本空间可能有有限个样本点,可能有可列无穷多个样本点,也可能有不可列无穷多个样本点。

二、随机事件

在一个随机实验中,可能发生也可能不发生的结果称为随机事件,简称为事件。用大写字母 A,B,C 等表示。例如在例 1.1 中

$A=$ {出现 6 点}

$B=$ {出现偶数点}

$C=$ {出现的点数大于 2}

等都是随机事件。由一个样本点构成的事件即为基本事件,如 $A=\{\omega_6\}$。由若干个可能

的结果(样本点)所构成的事件称为复合事件,如上述事件 $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$,$C=\{\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$。这样,任何一个随机事件,包括基本事件和复合事件都可以理解成样本点的某一个集合,即样本空间 Ω 的某个子集。并且称事件 A 发生当且仅当 A 所包含的某一个样本点出现。

每次试验中一定出现的事件称为必然事件,用 Ω 表示。每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件,用 $\varnothing$ 表示。必然事件和不可能事件本质上不是随机事件。为了今后研究问题的方便,我们把必然事件和不可能事件作为随机事件的两个极端情形统一处理。

三、事件的关系及其运算

对于一个随机试验来讲,有很多随机事件,有的随机事件可能很复杂,为了从较简单事件的出现规律中寻求复杂事件出现的规律性,我们需要研究同一试验的各种事件之间的关系和运算。由于事件实际上是样本空间中的某一个子集,因此,事件之间的关系和运算同集合论中集合之间的关系和运算是一致的。对应着集合的关系和运算,我们定义事件的关系和运算如下:

(1)事件的包含

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,即属于 A 的每个样本点也都属于 B,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B。记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$,显然对任何事件 A,有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega$$

(2)事件的相等

如果事件 A 包含事件 B,事件 B 也包含事件 A,则称事件 A 与事件 B 相等。即事件 A 与事件 B 的样本点完全相同。记作 $A=B$。

(3)事件的和(并)

"两个事件 A,B 中至少有一个出现"也是一个事件,称为事件 A 与 B 的和(并)。它是由属于 A 或 B 的所有样本点构成的集合。记作 $A+B$ 或 $A\cup B$。

(4)事件的积(交)

"两个事件 A 与 B 同时出现"是一个事件,称为事件 A 与 B 的积(交)。它是由既属于 A 又属于 B 的所有公共样本点构成的集合。记作 AB 或 $A\cap B$。

(5)事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"是一个事件,称为事件 A 与 B 的差。它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合。记作 $A-B$。

(6)互不相容事件

如果事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,称事件 A 与 B 互不相容(或称 A 与 B 互斥)。互不相容事件 A 与 B 没有公共样本点。显然基本事件间是互不相容的。

(7)对立事件

"事件 A 不发生"是一个事件,称为 A 的对立事件(或 A 的逆事件)。它是由样本空间中所有不属于 A 的样本点组成的集合。记作 $\bar{A}$。由于 A 也是 $\bar{A}$ 的对立事件,因此,称 A 与 $\bar{A}$ 互为对立事件。由定义知,两个对立事件一定是互不相容事件;反之,两个互不相容事件却不一定是对立事件。显然有

$$A\bar{A}=\varnothing,\quad A+\bar{A}=\Omega,\quad \bar{A}=\Omega-A,\quad \bar{\bar{A}}=A$$

(8)完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容的事件，并且 $\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组。类似地，称可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 构成一个完备事件组，如果对任意的 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots)$ 有 $A_iA_j=\varnothing$，并且 $\sum_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$。显然所有的基本事件构成了一个完备的事件组。

事件的关系和运算常用图形来直观示意，如图 1-1 所示。

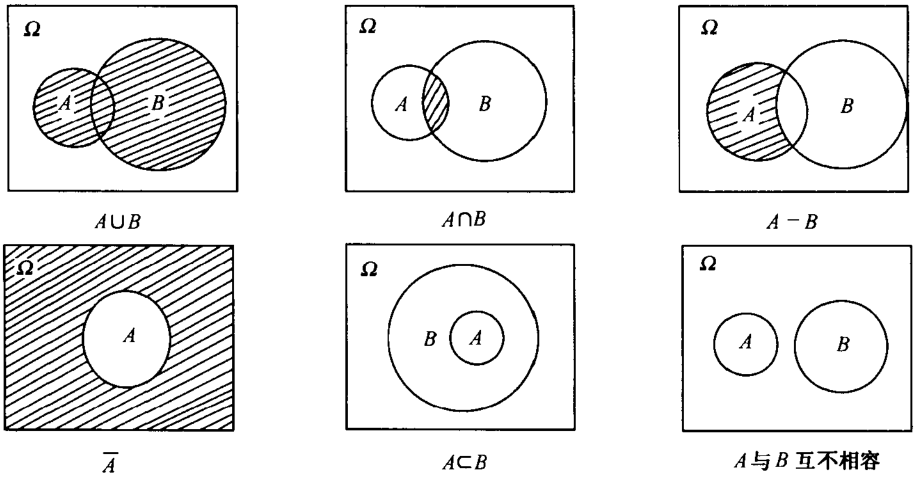

图 1-1

由于事件的关系与运算和集合的关系与运算完全一致，我们把它们的术语对照列表，如表 1-1 所示。

表 1-1

符　号	集　合　论	概　率　论
Ω	空间(全集)	样本空间；必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
ω	元素	样本点(基本事件)
A	子集 A	事件 A
$A\subset B$	A 是 B 的子集	事件 A 发生必有事件 B 发生
$A=B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A\cup B$	集合 A 与 B 的并集	事件 A 与 B 中至少有一个发生
$A\cap B$	集合 A 与 B 的交集	事件 A 与 B 同时发生
$A-B$	集合 A 与 B 的差集	事件 A 发生而 B 不发生
$\bar{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的对立事件
$AB=\varnothing$	集合 A 与 B 互不相交	事件 A 与 B 互不相容

四、事件运算的简单性质

可以验证,一般事件的运算满足如下的运算规律,利用这些规律可以帮助我们化简一些复杂的事件。

(1)交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$$

(2)结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A(BC) = (AB)C$$

(3)分配律

$$A(B \cup C) = AB \cup AC, \quad A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$$

(4)幂等律

$$A \cup A = A, \quad AA = A$$

(5)差化积

$$A - B = A\overline{B}$$

(6)吸收律

若 $A \subset B$,则有

$$A \cup B = B, \quad AB = A$$

(8)对偶律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

【例 1.5】 掷一枚骰子,用 A_i 表示事件"出现 i 点",$i=1,2,\cdots,6$,B 表示事件"出现偶数点",C 表示事件"点数不小于 2",则

$$B = A_2 + A_4 + A_6$$

$$C = A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = \overline{A}_1$$

且 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 构成一个完备事件组。

【例 1.6】 设某人向靶子射击三次,用 A_i 表示事件"第 i 次射击击中靶子",$i=1,2,3$。

(1)用语言描述下列各事件:

$$\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3, \overline{A_1 + A_2}, A_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2A_3$$

(2)用 A_1,A_2,A_3,通过运算关系表示出下列事件:"三次射击中恰好有一次击中靶子","三次射击中第一次不中而后两次至少有一次击中","三次射击中至少有两次击中靶子"。

解 (1)$\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$ 表示三次射击中至少有一次没有击中靶子;$\overline{A_1+A_2}$表示前两次没有击中靶子;$A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3$ 表示恰好连续两次击中靶子。

(2)"三次射击中恰好有一次击中靶子"可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;"三次射击中第一次不中而后两次至少有一次击中"可表示为 $\overline{A}_1(A_2+A_3)$;"三次射击中至少有两次击中靶子"可表示为 $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3$。

第二节 事件的概率

一、频率

在研究随机现象发生的规律性时,仅仅知道随机试验中可能出现哪些事件是不够的,还必须对随机事件发生的可能性的大小进行量的描述。怎样研究事件发生的可能性的大小呢?我们知道随机事件在一次试验中是否发生是不确定的。但在大量重复试验中,它的发生却具有统计规律性,所以应从大量试验出发来研究它。为此,先介绍频率的概念。

定义 1.1 设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次,则称比值 m/n 为随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率,记为 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$。

人们经过长期的实践发现,虽然随机事件在一次试验中可能发生,也可能不发生,带有不确定性,但当重复试验次数 n 充分大时,随机事件 A 发生的频率却总在一确定的数值附近摆动,有稳定于某一确定值的趋势。

历史上进行过投硬币的试验,用来观察"正面向上"这一事件发生的规律,见表 1-2。

表 1-2

试 验 者	投掷次数 n	正面向上次数 m	正面出现频率 f_n
德·摩尔根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维 尼	30000	14994	0.4998

从表 1-2 可以看出,随着试验次数 n 的增大,正面出现的频率 f_n 越来越靠近一确定的常数 1/2。这个确定的常数称为相应事件发生的概率。

二、概率的统计定义

定义 1.2 在相同的条件下,重复进行 n 次试验,事件 A 发生的频率稳定地在某一确定常数 P 附近摆动。且一般说来,n 越大,摆动的幅度越小,则称常数 P 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$。

概率的大小反映了事件发生的可能性的大小。一个事件发生的频率是随着试验的次数 n 不同而不同,但一个事件发生的概率是与试验的次数无关的,它完全由事件本身决定,是先于试验而客观存在的。

概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的,并不能用这个定义来计算事件 A 发生的概率 $P(A)$。但依据概率的统计定义,当试验次数 n 充分大时,可以取频率作为概率的近似值。

由频率的定义,不难证明频率具有下述性质:

(1)非负性:即对任何事件 A,$f_n(A)\geqslant 0$;

(2)规范性:即若 Ω 是必然事件,则 $f_n(\Omega)=1$;

(3)有限可加性:即若事件 A,B 互不相容,则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$。

三、概率的定义及性质

由概率的统计定义知,事件发生的频率在一定程度上能反映事件出现的概率。受频率的上述三个基本性质的启发,下面给出事件概率的定义。

定义 1.3　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间,A 是试验 E 的任一事件,$P(A)$是 A 的实函数,且满足

(1)非负性

$$P(A)\geqslant 0 \tag{1.1}$$

(2)规范性

$$P(\Omega)=1 \tag{1.2}$$

(3)可列可加性

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.3}$$

则称 $P(A)$为事件 A 发生的概率。

由概率的上述定义可得到概率的下列性质。

性质 1　不可能事件$\varnothing$的概率为 0,即

$$P(\varnothing)=0 \tag{1.4}$$

证　因为 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$

由概率的可列可加性知:

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

因此　$P(\varnothing)=0$。

性质 2　概率具有有限可加性,即若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.5}$$

证　因为$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cdots$

由概率的可列可加性及性质 1 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质 3　对任一事件 A 有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1.6}$$

证　由于 $A\cup\overline{A}=\Omega$,　$A\overline{A}=\varnothing$,所以

$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$,从而

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 4　设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.7}$$

$$P(A)\leqslant P(B) \tag{1.8}$$

证 因 $A\subset B$,所以 $B=A\cup(B-A)$且 $A(B-A)=\varnothing$。

由性质 2,有

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

移项即得结论。

又因 $P(B-A)\geqslant 0$, 所以 $P(B)\geqslant P(A)$。

性质 5 对任意事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.9}$$

证 因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,且 $A(B-AB)=\varnothing$,故有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$。又 $AB\subset B$,由性质 4 有 $P(B-AB)=P(B)-P(AB)$,所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

式(1.9)称为概率的广义加法公式,此公式可推广到任意有限个事件的情形。即对任意 n 个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&\quad+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned} \tag{1.10}$$

特别地,对三个事件 A,B,C 有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.11}$$

【例 1.7】 设 A 发生的概率为p,B 发生的概率为q,A 与B 至少有一个发生的概率为r。求 A 发生但B 不发生的概率以及A 与B 都不发生的概率。

解 依题意有 $P(A)=p,P(B)=q,P(A\cup B)=r$。

事件“A 发生但B 不发生”的概率为

$$\begin{aligned}P(A-B)&=P(A\overline{B})=P(\overline{B}-\overline{B}\,\overline{A})=P(\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B})\\&=P(\overline{B})-(1-P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}}))\\&=1-P(B)-(1-P(A\cup B))\\&=1-q-(1-r)=r-q\end{aligned}$$

事件“A 与B 都不发生”的概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})=1-P(A\cup B)=1-r$$

【例 1.8】 已知 A_1 和 A_2 同时发生则 A 发生,证明 $P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$。

证 依题意有 $A_1A_2\subset A$,故 $P(A_1A_2)\leqslant P(A)$。

又 $$P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=P(A_1\cup A_2)\leqslant 1,$$

所以

$$P(A_1A_2)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1,$$

从而

$$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$$

【例 1.9】 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0\quad P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$,求 A,B,C 至少有一个发生的概率。