

高等学校教材

电磁场与电磁波

理论基础

北方交通大学 陈乃云 魏东北 李一致 主编

中国铁道出版社

高等学校教材

电磁场与电磁波理论基础

北方交通大学 陈乃云 魏东北 李一玫 编
北方交通大学 吴重庆 审

中国铁道出版社

2001年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书对电磁场与电磁波的基本理论(包括狭义相对论)作了系统的介绍,推理严谨;特别针对学生感到疑难的问题作了详尽的讲解。书中反映了该领域的新进展,对电磁场基本方程的解法作了比较全面的介绍,并精心选编了一批习题,书末附有答案,便于所有具备高等数学基础的读者自学。取材跨度较大,以本科程度为主,并适用于函授生,部分内容适合研究生。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波理论基础/陈乃云等编. —北京:中国铁道出版社,2001.7
高等学校教材 ISBN 7-113-04204-X

I. 电… II. 陈… III. ①电磁场-高等学校-教材②电磁波-高等学校-教材 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039040 号

书 名:电磁场与电磁波理论基础

作 者:北方交通大学 陈乃云 魏东北 李一玫

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑:赵 静

特邀编辑:刘颖荪

封面设计:马 利

印 刷:中国铁道出版社印刷厂

开 本:787×1092 1/16 印张:23.25 字数:572 千

版 本:2001年8月第1版 2001年8月第1次印刷

印 数:1~3 000 册

书 号:ISBN 7-113-04204-X/TP·561

定 价:31.10 元

版权所有 盗印必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

前 言

本书是北方交通大学“十五”教材出版计划要出版的教材之一,也是教学改革的生产物。为了把国内外的技术和学术进展、精辟的见解和分析传播给学生,需要一本新的适用于电子、通信类专业的电磁理论基础课教材,以便使经典理论联系现代的实际。同时,我们也希望通过本书表达出我们在教学实践中所产生的新想法,在理论的探讨和本校重点研究的领域中所获得的新认识,并贯彻学校的教改精神。

本书的编写,一方面特别注重理论的严密和完整,另一方面也注重讲清概念的物理本质,联系工程实际;通过打好理论基础,增强学生的广泛适应性。编写的思路 and 所做的工作主要如下:

“场”的部分首先是加强了场论的阐述,使之更加严密、条理化(例如关于矢量场无旋或有势的充分必要条件等问题的讨论),特别是深入浅出、形象化地讲明了学生往往感到抽象的概念和定理的物理含义;注重基本概念,强调了矢量微分算子这一工具的使用,并在附录中对正文里未证明的矢量积分恒等式都作了证明。

静态场的讲法是以场论为纲从数学上概括物理的场,而电、磁场则作为场论的物理实例;同时在场论的亥姆霍兹定理一节便提出了麦克斯韦方程组,强调指出了电、磁场的不可分割,因而每种静态场又是统一的时变电磁场的特例,同时也把静态场同准静态场的模型作了比较。而为了便于学习,减少困难,仍然按静电场(第2章)、恒定电场(第3章)、恒定磁场(第4章)的顺序分别介绍,并把第3、4章与第2章对应地介绍;其中也包括了一些较深入的讨论,例如关于电(磁)多极矩,关于矢量位和标量位,恒定电场分布的确定,电荷弛豫,内自感,场的能量和力等,并收入了图解法等工程上实用的解法,这样来达到对“场”的部分既浓缩又提高的目的。

第5章边值问题中包括了很有工程用途的施瓦尔兹变换,并详细讲解和演示了格林函数法这一对求解非齐次偏微分方程和建立积分方程有广泛用途的解析方法。

第6章在总结静态场基本方程的基础上进而导出了时变场的基本方程——麦克斯韦方程组,并对其限定形式做了深入的阐述;在介绍时变场的同时也介绍了电磁波的一般概念;在分别介绍了场量的、动态位的波动方程之后,随即详细讨论了齐次、非齐次标量波动方程的基本解法。对于非齐次波动方程,除了用格林函数求解,还采用了求解时域非齐次波动方程的克希霍夫积分法的思路来求解时谐场。最后,简单介绍了在时域直接求解麦克斯韦方程组的时域有限差分法这一适合于处理各种复杂的时变场的数值方法,以便有进一步兴趣的读者对电磁场的基本方程和解法有一个较全面的了解,并为第7、8、9章的分析作好数学准备。

作为第6章介绍的齐次波动方程在一维(也包括三维)、直角坐标、无界空间条件下的解,第7章专门介绍了平面波。为了加强“波”的基本知识,提供了较充分的例题、习题,并对“群速”的概念作了新的阐述。

第8章则在各种波导的媒质和边界条件下,从第6章齐次波动方程的通解中进一步导出该种波导中的模式场。本章对波导装置的分类和介绍主要着眼于物理现象和数学解法上的不同,不侧重于具体的波导管设备,而是对光纤技术所带来的新知识和概念作了较详细的讨论,也介绍了一些其他的新进展。

第9章在第6章得到的非齐次波动方程的积分解式的基础上导出了滞后位和克希霍夫公式,就稳态简谐波的情形对天线辐射场作了清晰的讲解。

在国内外有关论述的基础上,第 10 章对狭义相对论作了深入浅出的介绍。

本书还对教学中遇到的一些问题给出了一种明确的看法或解释,例如亥姆霍兹定理所说的唯一性与静电场唯一性定理的关系,静电场的唯一性定理与时变场唯一性定理的比较;场论中的矢量恒等式对时变场的适用性;关于多导体系统的电容,静电比拟的条件等等,并对一些公式、定律和结论给出了自己的证明;分析和论述中专门针对了学习本课程时可能出现的疑问。

本书精心选择和自编了较充足的例、习题,对没有解答的题目都作了解答,且尽可能联系这些题目的物理、工程背景。

本书第 1、2、3、4、6、8 章、5.7 节等以及附录由陈乃云编写,第 5(5.1~5.6,5.8 节)7、10 章由魏东北编写,第 9 章由李一玫编写,全书由陈乃云统稿。

吴重庆教授对全书作了仔细的审阅和修改,还亲自写了 7.8 节“群速”以及限定形式的麦克斯韦方程组、“导行波”的前言、最低阶混合模式、关于波的极化等段落,并对旋度公式等作了新的证明。

最后,感谢北方交通大学谈振辉校长促成了本书的编写和出版,并对本书提出了明确的要求;感谢北方交通大学电子学院的有关领导以及支持和帮助过这项工作的各位老师。

受编者水平所限,不足之处必然存在,诚恳欢迎批评、指正。

编者

2001 年 2 月

目 录

第 1 章 矢量分析 场论初步	1
1.1 矢量场和标量场	1
1.2 正交曲线坐标系	2
一、圆柱坐标系	2
二、球坐标系	4
1.3 矢量场的通量和散度 散度定理	6
1.4 矢量场的环量和旋度 斯托克斯定理.....	11
1.5 标量场的梯度 标量位.....	19
1.6 亥姆霍兹定理 宏观电磁场的基本方程.....	23
习题 1	26
第 2 章 静电场	29
2.1 电场强度 库仑定律.....	29
2.2 静电场的基本方程.....	32
一、静电场的通量和散度 真空中的高斯定律.....	32
二、静电场的环量和旋度.....	33
2.3 电位.....	35
2.4 电偶极子.....	37
2.5 介质的极化 介质中的高斯定律 电位移.....	42
2.6 静电场的边界条件.....	47
2.7 泊松方程 拉普拉斯方程.....	50
一、一维场的解法.....	51
二、二维场的图解法.....	54
2.8 格林定理 唯一性定理.....	56
一、格林定理.....	56
二、唯一性定理 静电场边值问题的三种类型.....	57
2.9 多导体系统 部分电容.....	59
2.10 静电场能量 静电力	62
习题 2	67
第 3 章 恒定电场和恒定电流场	73
3.1 电流密度 传导电流.....	73
3.2 恒定电场的基本方程.....	76
一、电流的基本性质 全电流连续性方程.....	76
二、恒定电流的性质 恒定电场的基本方程.....	76
三、路径电源内部的环量.....	77
四、均匀导体.....	78
3.3 恒定电场的边界条件.....	79
3.4 恒定电流场与静电场的比拟.....	81

一、用静电场比拟恒定电流场	82
二、用模拟法求解静电场	83
习题 3	84
第 4 章 恒定磁场	86
4.1 磁感应强度 比奥-沙伐定律 磁力	86
一、电流产生磁场的规律——比奥-沙伐定律	86
二、电流在磁场中受力的规律——安培力定律	87
三、分布电流的磁场和受力	87
四、运动电荷的磁场和受力 洛仑兹力	88
4.2 恒定磁场的基本方程	91
一、磁场的通量和散度——磁通连续性原理	91
二、恒定磁场的环量和旋度——真空中的安培环路定律	92
4.3 矢量磁位	95
4.4 磁偶极子	100
4.5 介质的磁化 介质中的安培定律 磁场强度	103
4.6 恒定磁场的边界条件	107
4.7 标量磁位	108
4.8 电感	111
4.9 磁场能量 磁场力	115
* 4.10 空间的运动电荷与电磁场的相互作用	122
一、带电粒子在恒定磁场和静电场中的运动	122
二、空间电荷产生的电磁场	124
习题 4	125
第 5 章 边值问题	129
5.1 直角坐标系的分离变量法	129
5.2 圆柱坐标系的分离变量法	133
5.3 球坐标系的分离变量法	135
5.4 镜像法	141
一、平面镜像法	141
二、球面镜像法	144
三、圆柱面镜像法	147
5.5 复变函数法	152
一、复电位函数	152
二、用复位函数法求解二维场的计算过程	154
三、保角变换法	157
* 5.6 许瓦尔兹-克利斯托夫变换	163
* 5.7 格林函数法	166
一、 δ 函数的性质	166
二、点电荷的 δ 函数表示 格林函数	167
三、用格林函数法求解泊松方程	168

四、构造格林函数的方法	169
5.8 有限差分法	173
习题 5	175
第 6 章 时变电磁场 电磁波	179
6.1 电磁感应 涡旋电场	179
6.2 位移电流 安培定律的推广	184
6.3 麦克斯韦方程组	186
一、非限定形式的麦克斯韦方程组	186
二、限定形式的麦克斯韦方程组	187
三、无源区的麦克斯韦方程组	188
6.4 时变电磁场的边界条件	189
一、不同介质分界面上的边界条件	189
二、完纯导体表面的边界条件	190
* 三、时变电磁场的唯一性定理	191
6.5 时谐场的复数表示法	192
一、正弦场量的复数表示	192
二、复数形式的麦克斯韦方程组	193
三、复电容率 复磁导率	194
6.6 玻印廷定理	196
一、时域的玻印廷定理	196
二、频域的玻印廷定理	197
6.7 场量的波动方程 电磁波	202
一、场量的波动方程	202
二、电磁波的一般概念	203
三、电磁场的实在性	206
6.8 动态位 动态位的波动方程	207
* 6.9 齐次标量波动方程的基本解法	209
一、直角坐标系中齐次标量波动方程的分离变量法	210
二、圆柱坐标系中齐次标量波动方程的分离变量法	212
* 6.10 非齐次标量波动方程的积分解法	214
一、时谐场达朗贝尔方程的积分解法	214
二、时谐场中的格林函数法	218
* 6.11 直接求解麦克斯韦方程组的数值方法——时域有限差分法	220
习题 6	222
第 7 章 平面波	226
7.1 均匀平面波	226
一、均匀平面波的方程和解式	226
二、描述均匀平面波的参数	227
7.2 均匀平面波的一般表达式	229
7.3 电磁波的极化	232

一、直线极化	232
二、圆极化	232
三、椭圆极化	233
7.4 损耗媒质中的均匀平面波	234
一、有耗媒质中的波动方程及其解式	234
二、高损耗媒质或良导体中的均匀平面波	235
三、低损耗媒质或非完纯介质中的均匀平面波	237
7.5 各向异性媒质中的平面波	238
一、等离子体中的电磁波	239
二、铁氧体中的电磁波	243
7.6 均匀平面波的垂直入射	246
7.7 均匀平面波的斜入射	250
一、平行极化波的斜入射	251
二、垂直极化波的斜入射	254
三、波的全反射	255
四、波的全折射	256
五、向理想导体平面的斜入射	257
7.8 群速	258
习题 7	260
第 8 章 导行波	262
8.1 可传送 TEM 模的导波装置	262
8.2 管状金属波导	266
一、矩形波导中的 TM 模(横磁波、E 波)	267
二、矩形波导中的 TE 模(横电波、H 波)	268
三、矩形波导的截止频率和传输特性	271
四、关于 TE_{10} 模	275
五、非矩形波导	275
8.3 谐振腔	276
8.4 介质波导	279
8.5 光导纤维	282
一、光导纤维中场的求解 特征方程	282
二、截止频率、模式场和相移常数	283
三、光纤的色散	285
习题 8	287
第 9 章 稳态简谐波的天线辐射场	288
9.1 滞后位 克希霍夫公式	288
9.2 偶极子天线	290
9.3 电与磁的对偶性	297
9.4 磁偶极子与缝隙天线	299
9.5 天线阵	303

9.6	几何光学法	306
9.7	口径天线	307
	一、平面口径的绕射	308
	二、矩形口径面的绕射	309
9.8	互易定理	311
	一、互易定理	311
	二、互易定理的应用	312
	习题 9	315
第 10 章	狭义相对论	317
10.1	狭义相对论的历史起源	317
10.2	狭义相对论的数学描述	320
10.3	洛仑兹变换的四维形式	324
10.4	复四维时空的运算	326
10.5	麦克斯韦方程在四维时空中的形式	328
	一、四维电流密度矢量 电荷守恒方程	328
	二、达朗贝尔方程 四维势矢量	328
	三、电磁场的变换	329
10.6	电磁波的狭义相对论效应	333
	习题 10	334
附 录	336
A1	矢量运算	336
A2	重要的矢量恒等式及其证明	338
A3	亥姆霍兹定理及其证明	340
A4	贝赛尔函数	341
A5	基本常数、量的符号和单位	345
	习题答案	347
	参考文献	357

第 1 章 矢量分析 场论初步

场论是把各种物理的场在数学上抽象成矢量场和标量场来研究,它不仅可以使我们对电场、磁场的认识升华一步,也是进入连续媒质力学(流体、固体力学)、量子力学、热传导、质量传递等领域的数学基础。而矢量运算,特别是矢量微分算子的运用,是分析场的不可缺少的、有力的数学工具。

1.1 矢量场和标量场

场,顾名思义,要占据一个空间。如果在我们讨论的空间中的每一点都对应着某个物理量(叫作场量)的一个确定的值,就说在这个空间里确定了该物理量的一个场。

若场量为标量,该场为标量场。温度场 $T(x, y, z)$ 、密度场 $\rho(x, y, z)$ 、位(势)场 $u(x, y, z)$ 等等,都是标量场的例子。

若场量为矢量,该场为矢量场。速度场 $\mathbf{v}(x, y, z)$ 和力场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ (如引力场 \mathbf{G} , 电场强度 \mathbf{E} , 磁场强度 \mathbf{H} 等等)都是矢量场。

若场量仅仅是空间或点的函数,而与时间无关,则称为静态场或恒定场;

若场量不仅是点的函数,还是时间 t 的函数,则称为动态场或时变场。

从数学的角度来说,场就是一个三(四)元函数,不过这三元特指的是点的空间坐标(第四元特指时间)。可以说,场就是代表场中每一点的某种物理性质的场量的无穷集合。并且,除开有限个点、线和面外,场量是处处连续、可微的。

一个矢量可以分解为沿着坐标轴的三个分量,例如在直角坐标系中:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = a_x F_x(x, y, z) + a_y F_y(x, y, z) + a_z F_z(x, y, z)$$

所以,一个矢量场对应着三个标量场。同一个空间,可以认为是矢量场 \mathbf{F} ,也可以认为是标量场 F_x, F_y 或 F_z ,看我们感兴趣的是哪个量。注意,分量 F_x 表示它是 x 方向的分量,但并不一定是 x 的一元函数,而仍然是一个三元函数 $F_x(x, y, z)$,因为每个分量的大小一般是随空间点而变的。

本书中矢量均用黑体字表示,例如场量 $\mathbf{A} = a_A A$,其中 a_A 表示矢量 \mathbf{A} 方向上的单位矢量, A 表示 \mathbf{A} 的模。

矢量场在空间的走向和分布可以用矢线(也叫力线或流线)来描述,矢线上每一点处的切线应当恰是该点处场量的方向,如图 1-1(a)所示。

由于三(二)维空间只能画出二(一)元函数的图像,所以作为三元函数的场量的大小只能用间接的办法表示。对于矢量场, \mathbf{A} 的大小用矢线的疏密来间接表示(这一点将在 1.3 和 2.7 节详述);对于标量场 $u(x, y, z)$ 的值,是用等值面来间接表示。等值面就是函数值 $u(x, y, z)$ 相等的点所构成的曲面,如图 1-1(b)所示。等值面画在二维平面上就是等值线。例如我们在地图册上常见到的等温线、等压线、等高线[图 1-1(c)],等等。

需要指出,场论所涉及的是场作为空间的、而不是时间的函数的性质(在无须考虑相对论

的时—空关系的通常场合,可认为这两方面互不影响),场量在空间的分布、变化规律与场源的关系,场量对空间坐标的微分(各种体积导数)、积分及其有关的矢量恒等式、积分定理;但这些矢量恒等式、积分定理对于时变场的每一瞬间也是成立的。

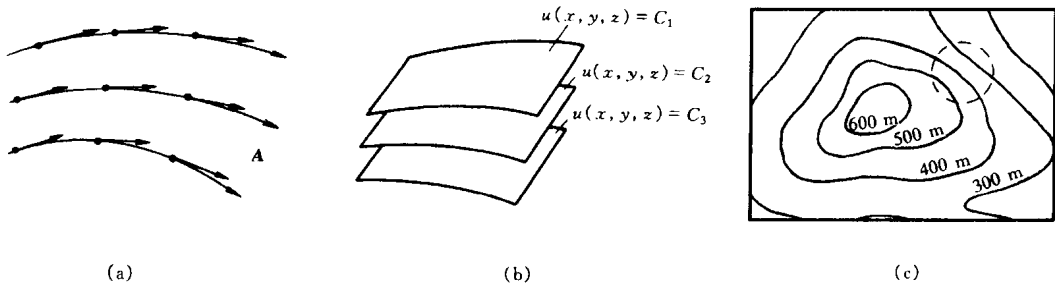


图 1-1 矢量场与标量场
(a)矢量场的矢线;(b)标量场的等值面;(c)等高线。

1.2 正交曲线坐标系

场是空间中的点的函数,因而我们首先要描述三维空间中点的位置。下面介绍几种常用的空间坐标系。正如两条(族)正交曲线可以定位平面上的(任)一点,三张(族)正交曲面则可定位空间中的(任)一点。

由于三张正交曲面必定交出三条正交曲线,如同直角坐标系的三条轴那样,故而统称正交曲线坐标系,如图 1-2 所示。目前实际应用中有直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系、椭圆柱坐标系、抛物柱坐标系、抛物面坐标系、旋转抛物面坐标系、长旋转椭球坐标系、扁旋转椭球坐标系、圆锥坐标系、椭球坐标系、双球坐标系、环坐标系等 13 种正交曲线坐标系。其中前三种是最简单的特例,也是本书中用到的三种坐标系。由于直角坐标系是大家最为熟悉的,下面仅介绍其余的两种坐标系。

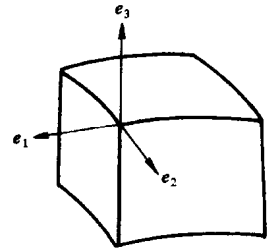


图 1-2 正交曲线坐标系

一、圆柱坐标系

圆柱坐标系如图 1-3 所示,由我们熟悉的平面极坐标(ρ, φ)在平面的垂直方向增加一个自由度 z 而构成:

- $\rho \in [0, +\infty)$ 表示点到 z 轴的垂直距离;
- $\varphi \in [0, 2\pi]$ 表示任一子午面(以 z 轴为边界的半平面)与正 x 轴所在的子午面的夹角,与 z 轴正向成右手螺旋关系[见图 A1-3(b)]时为正角;

$z \in (-\infty, +\infty)$ 同直角坐标。

ρ 的等值面如同“圆筒壁”, φ 的等值面为子午面, z 的等值面为 xy 面的平行平面。这三张面交出的三条“轴”上的单位矢量为 a_ρ 、 a_φ 、 a_z 。显然,除了 a_z 、 a_ρ 和 a_φ 的方向都是随点而变

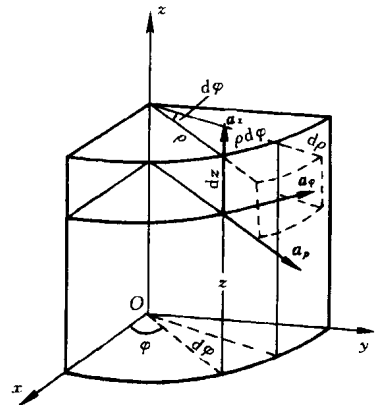


图 1-3 圆柱坐标系

的,因而形成“活动三角架”。这三条“轴”的正方向之间应构成右旋系统,也称右旋关系(即右手螺旋关系):

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\varphi$$

且在同一点处的 \mathbf{a}_ρ 、 \mathbf{a}_φ 、 \mathbf{a}_z 构成正交矢量组:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z &= 1 \\ \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho &= 0 \end{aligned}$$

一般,每一种正交曲线坐标系的坐标轴 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 的正向之间都应构成右旋系统(见图 1-2):

$$\mathbf{a}_{e_1} \times \mathbf{a}_{e_2} = \mathbf{a}_{e_3}, \quad \mathbf{a}_{e_2} \times \mathbf{a}_{e_3} = \mathbf{a}_{e_1}, \quad \mathbf{a}_{e_3} \times \mathbf{a}_{e_1} = \mathbf{a}_{e_2}$$

例如,在直角坐标系中, x, y, z 轴的正向之间应构成右旋系统:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$$

圆柱坐标与直角坐标间的换算关系为

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= \rho \sin \varphi & \tan \varphi &= y/x \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

单位矢量间的换算、即方向的换算关系为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_\rho &= \mathbf{a}_x \cos \varphi + \mathbf{a}_y \sin \varphi \\ \mathbf{a}_\varphi &= -\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_\rho \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi \\ \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_\rho \sin \varphi + \mathbf{a}_\varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

这些换算式不难通过解代数方程组或几何作图得到。

从(1.2.2)式也可看出, \mathbf{a}_ρ 、 \mathbf{a}_φ 虽然模恒为 1, 是定模矢量, 但都不是常矢量(因为它们的方向随 φ 变化), 而是 φ 的函数, 从而可以对 φ 求导而得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_\rho}{\partial \varphi} &= -\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi = \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\mathbf{a}_x \cos \varphi - \mathbf{a}_y \sin \varphi = -\mathbf{a}_\rho \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

任一点 (ρ, φ, z) 处的场矢量 $\mathbf{A}(\rho, \varphi, z)$ 可以分解到该点处的三条圆柱坐标“轴”上去:

$$\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \mathbf{a}_\rho A_\rho(\rho, \varphi, z) + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi(\rho, \varphi, z) + \mathbf{a}_z A_z(\rho, \varphi, z)$$

也可以分解到非圆柱坐标轴上去。描述场量的坐标系和描述点的位置的坐标系不一定要相同, 如习题 1.9。还需要指出, 在非直角坐标系中, 由于空间不同点处坐标“轴”的方向不同(直线坐标轴除外), 故而场矢量之间相加、相乘有时需要先转换到直角坐标系去。

场的许多公式、定理是与坐标系无关的, 因而常常需要把空间点表示成与坐标系无关的形式, 这就是点的位置矢量 \mathbf{r} 。它定义为从原点指向某点的矢量, 其模等于该点到坐标原点的距离。显然, 空间点的集合是与 \mathbf{r} 的集合一一对应的, 于是点的函数一场量就可表示为 \mathbf{r} 的函数: $\mathbf{A}(\mathbf{r}), u(\mathbf{r}) \dots$ 。在需要的时候再将其展开为具体坐标系下的形式。显然, 在直角坐标下 $\mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z$, 在圆柱坐标下 $\mathbf{r} = \mathbf{a}_\rho \rho + \mathbf{a}_z z$ 。可见, 除了在直角坐标下, 位置矢量 \mathbf{r} 的表达式中并不直接反映出某点的所有位置坐标, 例如 \mathbf{r} 的 φ 坐标隐含在 \mathbf{a}_ρ 的方向中。

此外, 线元矢量或点在空间的位移矢量 $d\mathbf{l}$ 也可用位置矢量 \mathbf{r} 的微分, 即 \mathbf{r} 的微增量 $d\mathbf{r}$ 来表示, 见图 1-4。由上所述, 圆柱坐标系中 \mathbf{r} 是 ρ, z 和 φ 的三元函数, 因为 \mathbf{a}_ρ 是 φ 的函数。利用复合函数微分法及(1.2.3)式求 \mathbf{r} 的全微分, 可得

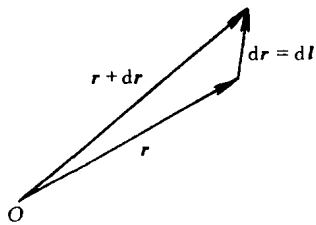


图 1-4 位移矢量或线元矢量

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= d(\mathbf{a}_\rho \rho + \mathbf{a}_z z) \\
&= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz \\
&= \mathbf{a}_\rho d\rho + \frac{d\mathbf{a}_\rho}{d\varphi} \rho d\varphi + \mathbf{a}_z dz \\
&= \mathbf{a}_\rho d\rho + \mathbf{a}_\varphi \rho d\varphi + \mathbf{a}_z dz = d\mathbf{l}
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

上式表明,一个空间的线元矢量 $d\mathbf{l}$ 在圆柱坐标系的三条“轴”上的投影(分量)分别是 $d\rho$, $\rho d\varphi$, dz , 它们是每一维上的长度元。有了这些“边长”,再计算三个圆柱坐标面上的面积元和圆柱坐标系中的体积元就很方便了。分别与 \mathbf{a}_ρ , \mathbf{a}_φ , \mathbf{a}_z 垂直的三个面元为

$$dS_\rho = \rho d\varphi dz \quad dS_\varphi = d\rho dz \quad dS_z = \rho d\rho d\varphi \tag{1.2.5}$$

体积元为

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$$

在非直角坐标系中,每个坐标的微分并不都是线度(长度),每一维上的长度元与坐标的微分之比称为度量系数,它也就是坐标的微分(如 $d\varphi$)换算成长度元($\rho d\varphi$)时应乘的系数(ρ)。由(1.2.4)式,圆柱坐标系的度量系数应为

$$h_1 = \frac{d\rho}{d\rho} = 1 \quad h_2 = \frac{\rho d\varphi}{d\varphi} = \rho \quad h_3 = \frac{dz}{dz} = 1 \tag{1.2.6}$$

各种不同坐标系是与其度量系数为特征的,并可以由三个度量系数来完整地描述。只要将 h_1, h_2, h_3 具体化为各种特殊形式,就可引出各种特殊的正交曲线坐标系,有

$$\begin{aligned}
d\mathbf{l} &= \mathbf{a}_{e_1} h_1 de_1 + \mathbf{a}_{e_2} h_2 de_2 + \mathbf{a}_{e_3} h_3 de_3 \\
dS_{e_1} &= h_2 h_3 de_2 de_3 \\
dS_{e_2} &= h_3 h_1 de_3 de_1 \\
dS_{e_3} &= h_1 h_2 de_1 de_2 \\
d\tau &= h_1 h_2 h_3 de_1 de_2 de_3
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

当场量的大小只与场点到 z 轴的垂直距离有关,即场的分布呈圆柱面对称时,如果采用圆柱坐标来表示场量,就只需 ρ 一个坐标,这显然比在直角坐标下处理多元变量要简便。

二、球坐标系

球坐标的构成为:

$r \in [0, +\infty)$ 表示点到球心的距离;

$\theta \in [0, \pi]$ 是任一射线与 z 轴(极轴)正方向的夹角,起“纬度”的作用;

$\varphi \in [0, 2\pi]$ 同圆柱坐标,起“经度”的作用。

r 的等值面为同心球面, θ 的等值面是以极轴为轴线的圆锥面, φ 的等值面为子午面。这三张正交曲面交出的三条轴的正方向之间应构成右旋系统:

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi, \quad \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta$$

作为正交矢量组,在同一点处有:

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_\varphi = 1$$

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_r = 0$$

如图 1-5 所示,球坐标与直角坐标之间的换算式为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi & \tan \theta &= \sqrt{x^2 + y^2} / z \\ z &= r \cos \theta & \tan \varphi &= y/x \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

单位矢量之间的换算关系为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_r &= \mathbf{a}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_z \cos \theta \\ \mathbf{a}_\theta &= \mathbf{a}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{a}_z \sin \theta \\ \mathbf{a}_\varphi &= -\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi \\ \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_r \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_\varphi \cos \varphi \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_r \cos \theta - \mathbf{a}_\theta \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.2.10)$$

球坐标系中的单位矢量也都不是常矢量,其方向是随点而变的,是 θ 和 φ 的函数。我们对(1.2.9)式求导,得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{a}_\theta & \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} &= \mathbf{a}_\varphi \sin \theta \\ \frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{a}_r & \frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \varphi} &= \mathbf{a}_\varphi \cos \theta \\ \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \theta} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\mathbf{a}_r \sin \theta - \mathbf{a}_\theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.2.11)$$

任一点 (r, θ, φ) 处的场矢量 $\mathbf{A}(r, \theta, \varphi)$ 可分解到该点处的三条球坐标“轴”上去:

$$\mathbf{A}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{a}_r A_r(r, \theta, \varphi) + \mathbf{a}_\theta A_\theta(r, \theta, \varphi) + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi(r, \theta, \varphi) \quad (1.2.12)$$

位置矢量在球坐标下具有最简的形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_r r$$

由于 $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r(\theta, \varphi)$,故 \mathbf{r} 实为 r, θ, φ 的三元函数。其全微分为

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\varphi r \sin \theta d\varphi \\ &= d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

可见球坐标中每一维的长度元(空间线元 $d\mathbf{l}$ 在三个轴上的投影)分别为 $dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi$ 。度量系数为

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta \quad (1.2.14)$$

在球坐标的三个坐标面即 r, θ, φ 的等值面上的面元(它们分别垂直于 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$)分别为

$$\left. \begin{aligned} dS_r &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ dS_\theta &= r \sin \theta d\varphi dr \\ dS_\varphi &= r d\theta dr \end{aligned} \right\} \quad (1.2.15)$$

体积元为

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

如果场的分布呈球面对称,即场量大小只与场点到球心的距离有关时,采用球坐标将使得场量

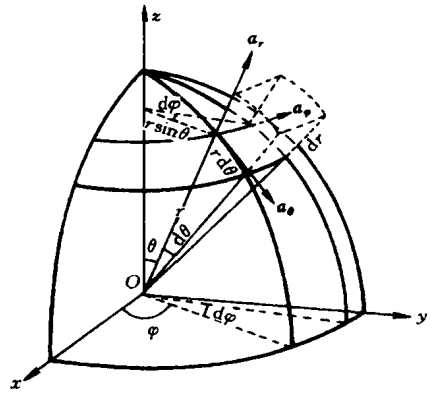


图 1-5 球坐标系

的表示只需用 r 一元坐标。

1.3 矢量场的通量和散度 散度定理

1. 矢量场的通量

描述矢量场的性质的一个重要的量是矢量的通量(flux)。一个最熟悉的例子就是水流过其截面上任一块面积的流量,它就是水的流速场 \mathbf{v} (m/s)穿过曲面 S (m^2)的通量(m^3/s)。这个通量的大小显然是同 S 的法线 \mathbf{n} 相对于 \mathbf{v} 的倾角 θ 有关的(图 1-6)。面元的法线指垂直于该面元的一单位长的矢量。

为了严格地定义矢量的通量,我们作如下一系列的定义:

(1)面元矢量 $d\mathbf{S}$ 指大小为面元面积 dS ,方向为面元法线 \mathbf{n} 的矢量。

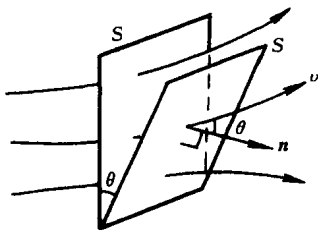
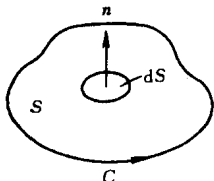
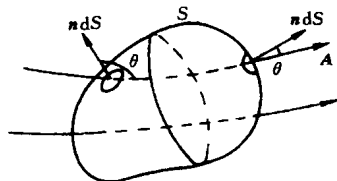


图 1-6 流速场 \mathbf{v} 穿过曲面 S 的通量



(a)



(b)

图 1-7 面元法线 \mathbf{n}

(a)开表面的面元法线;

(b)闭合面的外法线,穿过闭合面的通量。

对于开表面,规定 \mathbf{n} 的正方向与面元边界线 C 的绕向成右旋关系[图 1-7(a)]。

对于闭合面,规定 \mathbf{n} 的正方向指向闭合面外[图 1-7(b)]。

作为一个矢量, $d\mathbf{S}$ 同样可分解为所采用的坐标系下的三个分量,它们恰是 $d\mathbf{S}$ 在三个坐标平面上的投影(图 1-8)。以直角坐标系为例,根据 \mathbf{n} 与 x, y, z 轴正向夹角或钝角, dS_x, dS_y, dS_z 或正或负。这是因为 $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$,故

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \mathbf{n}dS = \{dS\cos \alpha, dS\cos \beta, dS\cos \gamma\} \\ &= \{dS_x, dS_y, dS_z\} \end{aligned}$$

(2)场量 \mathbf{A} 穿过面元 $d\mathbf{S}$ 的通量为

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A \cos \theta dS$$

(3)场量 \mathbf{A} 穿过开曲面 S 的通量为

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S A \cos \theta dS = \int_{S_x} A_x dS_x + \int_{S_y} A_y dS_y + \int_{S_z} A_z dS_z \\ &= \int_{S_\rho} A_\rho dS_\rho + \int_{S_\varphi} A_\varphi dS_\varphi + \int_{S_z} A_z dS_z \\ &= \int_{S_r} A_r dS_r + \int_{S_\theta} A_\theta dS_\theta + \int_{S_\varphi} A_\varphi dS_\varphi \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

(4)场量 \mathbf{A} 穿过闭合面 S 的通量为

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S A \cos \theta dS \quad (1.3.2)$$

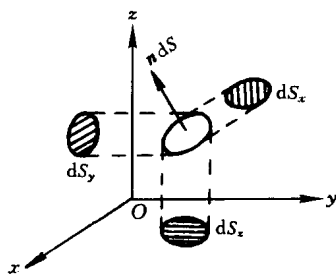


图 1-8 直角坐标系中面元矢量 $d\mathbf{S}$ 的三个分量

一般来说,在每种坐标系下, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 都对应着三个沿坐标面的积分(第二型曲面积分),

如(1.3.1)式所示。

(1.3.2)式表示 \mathbf{A} 穿出包面 S 的净通量。给面元设置法线如同给空间曲面规定了“正反面”,意味着矢量由反面流向正面的通量为正,反之为负。(而对面积的曲面积分—第一型曲面积分则没有正反面之分。)由于闭合面 S 法线正向朝外, S 的外(内)侧面就是“正面”(“反面”),流出(入)包面的通量就应为正(负),这是因为矢线流出(入)时 θ 必为锐(钝)角,见图 1-7(b)。以液体流速场为例,(1.3.2)式为正时,表明流出多于流入,净流量为正,因而包面 S 内必有“喷泉”(正的源)。反之,(1.3.2)式为负,表明闭合面内必有“漏口”(负的源也称“汇”)。如果(1.3.2)式为零,则表明 S 内无源。这种源也被称为散度源或通量源。

矢量场中规定矢线的画法是每根代表一单位的通量,因而穿过某曲面 S 的矢线越多表示通量越大。因此,若包面内有“喷泉”,则从包面内会增发出矢线;若有“漏口”,则会有矢线终止在包面内;若包面内无源,有矢线穿过时,其根数不变。

另外,由上面的定义 2,若某点处 \mathbf{A} 越大,穿过 dS 的通量就越大,于是同样的面积 dS 上穿过的矢线根数就越多。故而矢线的上述规定画法使得矢线的密集程度与场 \mathbf{A} 的强度或大小(A)成正比。

例 1.1 有一个与场点到原点的距离成正比的辐射状矢量场 $k\mathbf{r}$ (k 为常数),计算它穿过一个以原点为球心,半径为 a 的上半球面与 $z=0$ 的平面构成的闭合面 S 的通量。

解 由于“底面” $z=0$ 上的外法线 $\mathbf{n} = -\mathbf{a}_z$,故“底面”上处处有 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -kra_r \cdot \mathbf{a}_z dS = 0$,因而只须计算半球面 S_r 上的通量。因为球面是 $k\mathbf{r}$ 的等值面 ka , $k\mathbf{r}$ 的方向又处处垂直于球面元而与球面元的法线 \mathbf{n} 同方向,故有

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_r} k\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = ka \int_{S_r} dS = ka2\pi a^2 = 2\pi ka^3$$

这说明球面内必有源。

例 1.2 已知矢量场 $\mathbf{A} = a_\rho(e^{-\alpha\rho}/\rho) + \mathbf{a}_z \cos \pi z$, a 为常数。有一个以 z 轴为轴线、半径为 2 的单位长度的圆柱面与 $z=0$ 、 $z=1$ 的平面构成的闭合面 S ,求 \mathbf{A} 穿过 S 的通量。

解 根据(1.2.5)式,柱面元为 $dS_\rho = \rho d\varphi dz$,故穿过圆柱侧面 S_ρ 的通量为

$$\int_{S_\rho} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_\rho} A_\rho dS_\rho = \int_{S_\rho} \frac{e^{-\alpha\rho}}{\rho} \rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{-2\alpha} dz = 2\pi e^{-2\alpha}$$

穿过上底面 $z=1$ 的通量为

$$\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dS = \int_{S_1} \cos \pi dS = - \int_{S_1} dS = -\pi \times 2^2 = -4\pi$$

穿过下底面 $z=0$ 的通量为

$$\int_{S_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_0} A_z \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z) dS = - \int_{S_0} \cos 0 dS = - \int_{S_0} dS = -4\pi$$

故

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_\rho} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi(e^{-2\alpha} - 4)$$

2. 矢量场的散度

通量是宏观概念、积分量,不能描述闭合面包围的体积内每一点的性质,不能确定源在 S