解题与分析

国外高考数学试题

科学普及出版社

解 题 与 分 析

——国外高考数学试题

陈天然 郝 彭
李诵权 魏仲和 合编

科 学 普 及 出 版 社

内 容 提 要

本书根据我国中学数学教材内容，按七部分编排而成。该书精选国外近年来高考入学试题，对每道试题从分析入手，按照思维逻辑给出解题方法，在解题的关键性步骤上力求详尽，便于读者思考和效仿。此书对于巩固充实数学基本概念，培养技能和技巧方面都大有裨益。特别适用于准备报考理工科院校的中学生和自学者阅读，同时对广大教育工作者了解国外数学教学动态也不失为一本较好的参考书。

解 题 与 分 析

——国外高考数学试题

陈天然　郝　彭
李诵权　魏仲和　合编

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京印刷一厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32　印张：11　字数：250千字

1986年5月第1版　1986年5月第1次印刷

印数：0001—13,100　定价：1.85元

统一书号：13051·1462　本社书号：0806

目　　录

I　代数部分……………………………………………… 1

II　平面几何部分……………………………………………92

III　平面三角部分…………………………………………… 125

IV　立体几何部分…………………………………………… 155

V　平面解析几何部分……………………………………… 206

VI　一元微积分部分………………………………………… 223

VII　其它部分………………………………………………… 317

Ⅰ 代数部分

1．化简：$\left(\frac{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}-\sqrt{mn}\right)\left(\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right)^{-2}$

分析 利用$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$将

$\frac{(\sqrt{m})^3+(\sqrt{n})^3}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}-\sqrt{mn}$化为$(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$，

解 原式$=\left(\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(m-\sqrt{mn}+n)}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}-\sqrt{mn}\right)$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)^2$$

$$=(m-2\sqrt{mn}+n)\left(\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)^2=1.$$

2．已知：$x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$，$a>0$，$m>0$，$n>0$，

$m>n$，试计算：$\left[\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}$.

分析 先化简代数式，再根据已知，求出x^2及$x^2\pm a^2$，然后代入计算，较为简便。

解 原式$=\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}\right)^2=\frac{x^2-\sqrt{x^4-a^4}}{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}$

$$=\frac{1}{a^4}(x^2-\sqrt{x^4-a^4})^2.$$

由已知，有$x^2=a^2\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$，

则 $x^2+a^2=a^2\dfrac{(m+n)^2}{2mn}$，$x^2-a^2=a^2\dfrac{(m-n)^2}{2mn}$.

代入上式，得：$\dfrac{1}{a^4}\left[a^2\dfrac{m^2+n^2}{2mn}-a^2\dfrac{m^2-n^2}{2mn}\right]^2$

$$=\frac{1}{a^4}\left(\frac{a^2n^2}{mn}\right)^2=\frac{n^2}{m^2}.$$

3．试确定二次方程$x^2+px+q=0$的系数，使方程的根等于p和q。

分析 显然方程的根可用p、q表示出，根据已知条件可以列出两个方程，从而解出p、q之值.

此题属于根与系数的关系的问题，所以从根与系数的关系式来建立方程组，解出p、q较简便些.

解 由根与系数的关系得方程组：

$$\begin{cases}p\cdot q=q & (1)\\ p+q=-p & (2)\end{cases}$$

由(1)得$p=1$，或$q=0$. 分别代入(2)，

得 $q=-2$，或$p=0$。

所以 $\begin{cases}p=1\\ q=-2\end{cases}$ 或$\begin{cases}p=0,\\ q=0.\end{cases}$

4．当a为何值时，方程

$6x^2+6(a-1)x-5a+2a^2=0$的两个根立方之和为最大？

分析 此题可从方程中解出两个根x_1、x_2，然后计算出$x_1^3+x_2^3$，但利用根与系数的关系写出$x_1^3+x_2^3$较为简便，因为它是关于a的函数式，可用初等方法求它的最大值，即可解出a.

解 设方程的根为x_1，x_2。

由根与系数的关系得：

$$x_1+x_2=1-a,\ x_1x_2=\frac{1}{6}(2a^2-5a)$$

$$\therefore\qquad x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$=(1-a)^3-3\cdot\frac{1}{6}(2a^2-5a)(1-a)$$

经整理得：$x_1^3+x_2^3=-\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+1$

等式右端是关于a的二次函数.

所以，当$a=-\dfrac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{1}{2}$时，$x_1^3+x_2^3$为最大.

5．当a取何实数时，方程

$$x^4+(1-2a)x^2+a^2-1=0$$

(1) 无实根； (2) 有一个实根；

(3) 有两个实根；(4) 有三个实根。

分析 题设方程是双二次方程，可化为二次方程来讨论。显然，当化出的二次方程的判别式小于零时，或化出的二次方程是两个负实根时，则原双二次方程无实根；如果化出的二次方程有一个正实根与一个根为零，则原方程有三个实根；另外遵循实系数方程的非实复数根必成对且互为共轭复数的事实，就不难计算和分析原方程有一个实根和有两个实根的情形.

解 令$x^2=y$，则原方程化为

$$y^2+(1-2a)y+a^2-1=0 \qquad (A)$$

(1) 当方程（A）无实根时，原方程也无实根，即

$$\Delta=(1-2a)^2-4(a^2-1)<0,$$

解之得 $a>\frac{5}{4}$.

又当方程(A)有两个负实根时，原方程也无实根，这时有

$$\begin{cases}\Delta=(1-2a)^2-4(a^2-1)\geqslant 0,\\ a^2-1>0,\\ 1-2a>0.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a\leqslant\frac{5}{4}\\ a<-1 \text{ 或 } a>1\\ a<\frac{1}{2}\end{cases}\qquad \text{即}\quad a<-1.$$

∴ 当 $a>\frac{5}{4}$或 $a<-1$ 时，原方程无实根.

(2) 根据实系数方程的非实复数根必成对出现这一事实知，若原方程有一个实根，且为二重实根，则方程(A)必有一个零根和一个负根，这时有

$$\begin{cases}a^2-1=0\\ 1-2a>0\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a=\pm 1\\ a<\frac{1}{2}\end{cases}\qquad \therefore\quad a=-1.$$

或者若原方程有一个实根且为四重实根，则方程(A)仅有零根，这时有

$$\begin{cases}a^2-1=0,\\1-2a=0.\end{cases}$$

显然方程组无解.

总之，当 $a=-1$ 时，原方程有一个实根，

(3) 当方程(A)有一个正根和一个负根时，原方程有两个实根，这时有

$$\begin{cases}\Delta=(1-2a)^2-4(a^2-1)>0,\\a^2-1<0.\end{cases}$$

解之得 $\begin{cases}a<\dfrac{5}{4},\\-1<a<1.\end{cases}$

$\therefore\quad -1<a<1.$

当方程(A)有正二重根时，原方程也有两个实根，这时有 $\Delta=(1-2a)^2-4(a^2-1)=0$.

解之得 $a=\dfrac{5}{4}$.

总之，当 $-1<a<1$ 或 $a=\dfrac{5}{4}$ 时，原方程有两个实根.

(4) 根据实系数方程的非实复数根必成对出现这一事实知，若原方程有三个实根，则其中有一根为二重根，此时方程(A)必有一零根和一个正根，即有

$$\begin{cases}a^2-1=0,\\1-2a<0.\end{cases}$$

解之得 $\begin{cases}a=\pm1,\\a>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore\quad a=1$

当 $a=1$ 时，原方程有三个实根.

6．解方程：$2x-\sqrt{x^3+2x^2-3x}=0$．

分析 对于含有一个根式的无理方程，一般地，可将根式与有理式分别置于方程两端，然后两端乘方，化为有理方程来解，但必须验根．或者首先确定未知数的定义域．

解 移项，两端平方得

$$4x^2=x^3+2x^2-3x,$$

分解为 $x(x^2-2x-3)=0$，

解之得 $x=0,\ -1,\ 3$．

经检验，$x=-1$ 为增根．

所以，原方程的解为 $x=0,\ 3$．

7．解方程：$\dfrac{3(x-2)+4\sqrt{2x^2-3x+1}}{2(x^2-1)}=1$．

分析 考察原方程可知 $x\neq\pm1$，此题可用变量替换的方法来解．因为在化去分母经整理后，方程所含有理式中的 x，x^2 项的系数与无理式中的 x，x^2 项系数相等（或成比例），可设 $\sqrt{2x^2-3x+1}=u$，则方程化为 $u^2-4u+3=0$，求出 u 再解 x．若直接用乘方将原方程化为有理方程，则会出现高于二次的方程．解起来较困难些．

解 ∵ $x^2-1\neq0$

∴ $3x-6+4\sqrt{2x^2-3x+1}=2x^2-2$．

即 $2x^2-3x+4-4\sqrt{2x^2-3x+1}=0$．

令 $u=\sqrt{2x^2-3x+1}$，则方程化为

$u^2+3-4u=0$，

解之得 $u=1,\ 3$．

由 $\sqrt{2x^2-3x+1}=1$，两端平方

解之得 $x=0,\ \dfrac{3}{2}$；

由　$\sqrt{2x^2-3x+1}=3$，两端平方

得　$2x^2-3x-8=0$，

解之得　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{73}}{4}$.

经检验，$x=0$，3，$\dfrac{3\pm\sqrt{73}}{4}$都是原方程的根.

8．解方程：$\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.

分析　用变量替换的方法，令 $y=\sqrt{2-x}$ 解原方程比直接化去根式解原方程较为简便.

解　由原方程知 $2-x\geqslant 0$，且 $\sqrt{2-x}>0$，

令　$\sqrt{2-x}=y$，代入方程，得

$$y+\frac{4}{y+3}=2.$$

又∵　$y+3\neq 0$ 即 $\sqrt{2-x}+3\neq 0$，

∴　$y^2+y-2=0$.

解之得　$y=1$，$y=-2$.(舍去)

于是有　$\sqrt{2-x}=1$，解此方程得，$x=1$.

经检验，$x=1$ 为原方程的解.

9．解方程：

$$\sqrt{3y^2+6y+16}+\sqrt{y^2+2y}=2\sqrt{y^2+2y+4}$$

分析　方程中含有三个二次根式，可将其中一个较复杂的根式置于方程的一端，然后两端平方，再按只含有一个根式的方程来解.

此题也可设 $u=y^2+2y$，用换元法来解.

解　两端分别平方，得

$$3y^2+6y+16+y^2+2y+2\sqrt{3y^2+6y+16}\cdot\sqrt{y^2+2y}$$

$=4y^2+8y+16.$

经整理后得 $\sqrt{3y^2+6y+16}\cdot\sqrt{y^2+2y}=0.$

$\because$ $3y^2+6y+16=3(y+1)^2+13>0,$

$\therefore$ $y^2+2y=0$，解之得 $y=-2,\ 0.$

经检验，$y=-2,\ 0$ 是原方程的根.

10．解方程：

$$\sqrt{8x^3+4x^2+1}-\sqrt{8x^3-4x^2+1}=\sqrt{13x^3}-\sqrt{5x^3}$$

分析 由原方程可知 $x\geqslant0$，这是含有四个根式的方程，$\sqrt{13x^3}-\sqrt{5x^3}$ 的平方为一个有理式，左端平方后有一个无理式 $\sqrt{(8x^3+1)^2-(4x^2)^2}$，经整理再乘方才可化为有理方程. 根据因式分解或分离系数除法，有因式 x^3 及 $x-1$，由此，求出所有满足方程的 x 的值.

解 两端平方，得

$$16x^3+2-2\sqrt{(8x^3+1)^2-16x^4}=(18-2\sqrt{65})x^3,$$

合并整理后，得 $\sqrt{(8x^3+1)^2-16x^4}=(\sqrt{65}-1)x^3+1,$

两端平方，得 $64x^6+16x^3+1-16x^4$

$$=(66-2\sqrt{65})x^6+2(\sqrt{65}-1)x^3+1,$$

即有 $x^3[(\sqrt{65}-1)x^3-8x+(9-\sqrt{65})]=0.$

$\therefore$ $x=0$；

或 $(\sqrt{65}-1)x^3-8x+9-\sqrt{65}=0,$

即有

$$(x-1)[(\sqrt{65}-1)x^2+(\sqrt{65}-1)x+\sqrt{65}-9]=0,$$

$\therefore$ $x=1$；

或 $(\sqrt{65}-1)x^2+(\sqrt{65}-1)x+\sqrt{65}-9=0,$

解得

$$x=\frac{1-\sqrt{65}\pm\sqrt{(\sqrt{65}-1)^2-4(\sqrt{65}-1)(\sqrt{65}-9)}}{2(\sqrt{65}-1)}$$

$$=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{35-3\sqrt{65}}{\sqrt{65}-1}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{65}-5}{2}}.$$

∵ 当 $x\geqslant 0$ 时，原方程才有意义，

∴ $x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{65}-5}{2}}<0$ 不适合原方程；

故 $x=0$，1，$-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{65}-5}{2}}$ 为原方程的根.

11．解方程：$2^{2x-3}=4^{x^2-3x-1}$.

分析 化为同底的幂，

解 $2^{2x-3}=2^{2x^2-6x-2}$，

则有 $2x-3=2x^2-6x-2$，

整理得 $2x^2-8x+1=0$.

∴ $x=\frac{4\pm\sqrt{14}}{2}$ 为原方程的根.

12．解方程：$(2.5)^x-2(0.4)^{x+1}+1.6=0$

分析 从指数函数的两项着手，将原方程化为关于$\left(\frac{5}{2}\right)^x$ $\left(\text{或以}\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)$的二次方程来解.

解 $$\left(\frac{5}{2}\right)^x-2\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}+1.6=0,$$

即 $$\left(\frac{5}{2}\right)^x-\frac{4}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^x+\frac{8}{5}=0.$$

∵ $\left(\frac{5}{2}\right)^x\neq 0$，两端乘以$\left(\frac{5}{2}\right)^x$，得

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}+\frac{8}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^x-\frac{4}{5}=0,\text{即 }5\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}+8\left(\frac{5}{2}\right)^x-4=0,$$

分解为 $$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x+2\right]\left[5\left(\frac{5}{2}\right)^x-2\right]=0.$$

$\because\quad \left(\frac{5}{2}\right)^x+2\neq 0,\ \therefore\quad 5\left(\frac{5}{2}\right)^x-2=0,$

解之得 $x=-1$，且 $x=-1$ 为原方程的根.

13．解方程：$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$

分析 若将原方程两端除以 36^x，则此题化为 $\left(\frac{9}{4}\right)^x$（或 $\left(\frac{4}{9}\right)^x$）的二次方程。也可将原方程中 16^x，36^x 与 81^x 分别化为幂的乘方 $(2^{2x})^2$，$2^{2x}\cdot 3^{2x}$ 与 $(3^{2x})^2$，得出一个关于 2^{2x} 与 3^{2x} 的二元二次方程，然后经因式分解，即可解出 x.

解 $\because\quad 36^x\neq 0$，两端除以 36^x.

得 $$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x-5=0.$$

又$\because$ $$\left(\frac{4}{9}\right)^x\neq 0,\text{两端除以}\left(\frac{4}{9}\right)^x,$$

得 $$3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\left(\frac{4}{9}\right)^x+2=0,$$

分解为 $$\left[\left(\frac{4}{9}\right)^x-1\right]\left[3\left(\frac{4}{9}\right)^x-2\right]=0.$$

由 $\left(\frac{4}{9}\right)^x-1=0$ 解得 $x=0$，

由 $3\left(\frac{4}{9}\right)^x-2=0$ 解得 $x=\frac{1}{2}$.

$\therefore\quad x=0$，$x=\frac{1}{2}$ 为原方程的根.

14．解方程：$\log_3(5-x)+2\log_3\sqrt{3-x}=1$

分析 由原方程可知 $x<3$，利用对数的性质和定义，将

原方程化为有理方程来解.

解 根据对数性质 $c\log_a b=\log_a b^c$,

及 $$\log_a u+\log_a v=\log_a(uv),$$

得 $$\log_3(5-x)+\log_3(3-x)=1,$$

即 $$\log_3[(5-x)(3-x)]=1.$$

根据对数定义及 $1=\log_3 3$,

可得 $(5-x)(3-x)=3$, 即 $x^2-8x+12=0$,

解之得 $x=6$, $x=2$, 由于 $6>3$, $\therefore$ $x=6$ 为原方程的增根,而 $x=2$ 为原方程的根.

15. 解下列方程.

(a) $$\log_6\sqrt{x-2}+\frac{1}{2}\log_6(x-11)=1,$$

(b) $$-\frac{1}{3}\lg 0.001+\lg\sqrt[3]{271+3^{\sqrt{2x}}}=2.$$

分析 目的是要化去对数,可按对数的定义和性质来变形,为了识别增根,可预先确定出 x 的定义域.

解(a) 由原方程可知 $x>11$,

根据对数的性质,将方程化为

$$\log_6\sqrt{(x-2)(x-11)}=1,$$

得 $\sqrt{(x-2)(x-11)}=6$, 即$(x-2)(x-11)=36$。

经整理得 $x^2-13x-14=0$.

解之得 $x=-1$, $x=14$. 由于$-1<11$ $\therefore$ $x=-1$ 为原方程的增根,而 $x=14$ 为原方程的根.

(b) 由方程可知 $x>0$,

将原方程化为 $\lg\left(\frac{1}{10^3}\right)^{-\frac{1}{3}}+\lg\sqrt[3]{271+3^{\sqrt{2x}}}=2$,

移项合并得 $$\lg\sqrt[3]{271+3^{\sqrt{2x}}}=1,$$

则有 $$\sqrt[3]{271+3^{\sqrt{2x}}}=10,$$
两端三次方，得 $271+3^{\sqrt{2x}}=1000$。

∴ $$3^{\sqrt{2x}}=729=3^6.$$

由 $\sqrt{2x}=6$，解之得 $x=18$ 为原方程的根.

16. 解下列方程：

(a) $$\log_{\frac{1}{3}}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right]=\log_{\frac{1}{3}}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x-4\right];$$

(b) $$\lg(6\cdot5^x+25\cdot20^x)=x+\lg 25;$$

分析 根据对数的定义和性质将方程两端都化为同底的对数，比较两个对数，由它们相等得出一个指数方程. 如(a)，(b)由指数方程可化为关于 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的二次方程，如(c)由指数方程可化为关于 3^{x-1} 的二次方程.

解(a) 比较两端同底的对数，由它们相等可得
$$2\left(\frac{1}{2}\right)^x-1=\left(\frac{1}{4}\right)^x-4.$$
按幂的乘方，有 $$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-2\left(\frac{1}{2}\right)^x-3=0,$$
分解为 $$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-3\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x+1\right]=0.$$
∵ $$\left(\frac{1}{2}\right)^x+1\neq0.$$
∴ $$\left(\frac{1}{2}\right)^x-3=0.$$
即 $$x=\log_{\frac{1}{2}}3=-\log_2 3 \text{ 为原方程的解.}$$

解(b) ∵ $$x+\lg 25=\lg(25\cdot10^x),$$
∴ $$6\cdot5^x+25\cdot20^x=25\cdot10^x.$$
两端同除以 20^x，得

$$6\left(\frac{1}{4}\right)^x+25=25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

即 $$6\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-25\left(\frac{1}{2}\right)^x+25=0.$$

分解为 $$\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^x-5\right]\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^x-5\right]=0.$$

由 $2\left(\frac{1}{2}\right)^x-5=0$ 得，$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{5}{2}$，

解之得 $x=\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{2}=\log_2\frac{2}{5}$ 为原方程的根；

由 $3\left(\frac{1}{2}\right)^x-5=0$ 得 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{5}{3}$，

解之得 $x=\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{3}=\log_2\frac{3}{5}$ 为原方程的根.

17. **求满足下列方程的非负值 x：**

$$\log_6 2(1+2^{-x})-\frac{x}{1-\log_{\frac{1}{2}}3}=\log_6 a.$$

分析 当两端为同底的对数时，可化去对数，为此，先要用对数换底公式统一底数，经变形得出一个二次方程，根据题意的要求，从此二次方程中即可求出 x，但由于方程中含有文字 a，故 x 是以 a 表示的，因此，不可忽视对 a 的取值范围的确定.

解 由原方程可知文字 $a>0$.
由对数换底公式，有

$$\frac{\log_2 2(1+2^{-x})}{\log_2 6}-\frac{x}{1-\dfrac{\log_2 3}{\log_2\frac{1}{2}}}=\frac{\log_2 a}{\log_2 6},$$

两端同乘以 $\log_2 6$，得