应用数学中的矩量法

Ю. В. 沃罗别夫著　郭大钧譯

人民教育出版社

应用数学中的矩量法

Ю. В. 沃罗别夫著
郭 大 鈞 譯

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立数理出版社（Государственное издательство физико-математической литературы）出版的沃罗别夫（Ю. В. Воробьев）所著《应用数学中的矩量法》（Метод моментов в прикладной математике）一书1958年版譯出。原书是《应用分析及計算数学丛书》（Библиотека прикладного анализа и вычислительной математики）之一，讲述应用矩量法来近似地求綫性算子的固有值以及解綫性方程的理論。这些理論通过許多具体的应用問題来說明。本书可供应用数学、物理学以及工程技术方面的科学工作者以及研究生参考，也可供相应专业的高年級学生参考。

应用数学中的矩量法

Ю. В. 沃罗别夫著

郭 大 鈞 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 13010·1146　开本 850×1168 1/32　印张 $5\frac{10}{16}$

字数 131,000　印数 0,001—7,300　定价（8）¥0.75

1964年11月第1版　1964年11月北京第1次印刷

序

許多力学、物理学以及工程技术上的問題都可归結成研究綫性方程——既有非齐次的(如在靜力学問題中),也有齐次的(如在振动問題中). 应用逐次近似法(叠代法)解这些方程的思想很早就已产生. 刘微尔[1]在研究綫性微分方程时就曾利用了叠代法. 諾依曼[1]在位势理論中应用了同样的方法.

用逐次近似法計算綫性方程的解会碰到一系列的困难. 首先, 近似过程可能不收斂于解. 这个情况大大地縮小了能利用此方法的問題之范圍. 其次, 即使近似过程确是收斂于解, 也时常出現这样的情况, 就是收斂得太慢, 以致于要实际算出解到令人滿意的精确度就必須作极大量的計算.

近似过程应用范圍的局限性以及其收斂的緩慢在某一时期消除了人們对于叠代法理論的兴趣. 只是在最近时期随着自动計算机的出現, 叠代法由于計算图式的簡单才被广泛地应用于实际計算中. 自然, 这就引起了人們对于叠代法理論的兴趣.

在这著作中, 我們仅从近年来发展起来的大量的各种叠代法中, 論述一类建立在变分原理基础上并和古典的切彼雪夫-馬尔可夫矩量問題有着密切联系的方法. 这些方法不論就它們的应用范圍的广度或就逐次近似收斂的速度而論都有突出的优点.

問題的一般提法以及泛函分析工具的使用, 使得我們能将所研究的这类方法全部归并为統一的矩量法.

为了減少閱讀本书的困难, 我們认为有必要在必需的地方以簡短而尽可能易懂的形式叙述希尔伯特空間綫性算子論的术語和基本結果. 但要更深入地了解本书的某些章节就必須熟习自共軛

算子的譜論以及无界算子論. 这些問題在 Л. А. 刘斯吉尔尼克与 В. И. 索波列夫所著《泛函数分析概要》以及 F. 黎斯与 B. 拉吉所著《泛函分析讲义》这两本书中都有精辟的論述. 我們将这两本书介紹給讀者.

本书的材料曾反复地与 Л. А. 刘斯吉尔尼克商討过, 他給了我許多宝貴的意見, 这些意見在我写书时都已采用, 在此我向他表示深深的感謝.

目　录

第一章　綫性有界算子的近似法

§1. 抽象希尔伯特空間

元素为 $x, y, z, \cdots$ 的集如果具有下列性质則称为一抽象希尔伯特空間 H:

1. H 是綫性空間，即是在 H 中定义有加法运算以及乘以实数或复数的乘法运算，并且此等运算遵守向量代数的通常規則．特别，H 中包含有元素 0，它等于 $0\cdot f$，这里 f 可为 H 中的任何元素．

2. 在空間 H 中借助于数量积的概念引入了度量．这就是說，任一对元素 x, y 都对应一个实数或复数 (x, y)，叫做它們的数量积，并且滿足下列条件：对于任何数 a，皆有

$$(ax, y)=a(x, y);\quad (x+y, z)=(x, z)+(y, z);$$

$$(x, y)=\overline{(y, x)};$$

$$\text{当 } x\neq 0 \text{ 时} (x, x)>0, \text{当 } x=0 \text{ 时} (x, x)=0.$$

元素 x 的范数 $\|x\|$ 由等式

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}$$

定义，而 x 与 y 間的距离命为 $\|x-y\|$．除零元素以外，任何元素的范数都是正的．

如果 $(x, y)=0$，則也有 $(y, x)=0$，此时元素 x 与 y 叫做是直交的 $(x\perp y)$．

通常的三維向量空間可作为希尔伯特空間的例子，其中的元素是由在某坐标系中的三个分量决定的向量．分别具有分量 x_1, x_2, x_3 与 y_1, y_2, y_3 的两个向量 x 与 y 的加法以及与数的乘法按向量代数的規則定义．即是：如果

$$z=ax+by,$$

則

$$z_1=ax_1+by_1,\quad z_2=ax_2+by_2,\quad z_3=ax_3+by_3.$$

数量积等于諸对应分量乘积之和，

$$(x, y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3;$$

而范数等于向量的长，

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

零元素是各分量皆为零的向量.

这个空間自然地可推广到 n 維(复)向量空間 H_n，其中的元素是由(复)数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所决定的向量 x，諸 x_i 叫做向量 x 的分量. 加法运算以及与数的乘法运算按通常的方式定义: 如果 $z=ax+by$，則 $z_i=ax_i+by_i(i=1, 2, \cdots, n)$.

数量积定义为下面的和数:

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i;$$

而范数按等式

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

定义. 零元素是分量全为零的向量.

应当指出，有时在定义数量积的时候引进了权乘数，并令

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i\bar{y}_i,\qquad \|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}\rho_i|x_i|^2,$$

$$\rho_i>0.$$

除有限維的向量空間以外，我們考察无穷維的向量空間 l_2，其元素是滿足条件 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty$ 的无穷复数列 $x_1, x_2, \cdots$. 諸数

$x_1, x_2, \cdots$可視为无穷維向量 x 在某坐标系中的分量. 元素的加法、数与元素的乘法以及数量积的定义皆与有限維空間的情形相同, 并且如果 x 与 y 皆属于 l_2, 亦即如果級数 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2$ 皆收斂, 則級数

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i$$

恒收斂. 范数也按类似的方式定义:

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2}.$$

空間 L_2 可作为函数希尔伯特空間的例子, 其元素是給定在某閉区間$[a, b]$上的函数(一般来説是复值的)$x(t)$, 并且是平方可积的, 即

$$\int_a^b|x(t)|^2dt<+\infty.$$

一般来說, 可积性(可和性)应当了解为勒貝格意义下的, 但在应用上我們通常遇到的总是普通黎曼积分的情形.

L_2 中的加法以及与数的乘法按照函数相加以及函数与数相乘的通常規則来定义. 数量积与范数由下列公式定义:

$$(x, y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \qquad \|x\|=\sqrt{\int_a^b|x(t)|^2dt}.$$

現在我們回到抽象希尔伯特空間的情形, 并推导数量积以及范数的一些性质.

令 x 与 y 表 H 中任意二元素. 对于任何实数 λ, 我們有

$$0\leqslant\|x+\lambda(x, y)y\|^2=(x+\lambda(x, y)y, x+\lambda(x, y)y)=$$
$$=(x, x)+(x, \lambda(x, y)y)+(\lambda(x, y)y, x)+\lambda^2((x, y)y, (x, y)y).$$

由数量积的定义推出:

$$(x, \lambda(x, y)y) = \lambda\overline{(x, y)}(x, y) = \lambda|(x, y)|^2,$$

$$(\lambda(x, y)y, x) = \lambda(x, y)\overline{(x, y)} = \lambda|(x, y)|^2,$$

$$((x, y)y, (x, y)y) = (x, y)\overline{(x, y)}(y, y) = |(x, y)|^2\cdot\|y\|^2,$$

这里我們利用了 λ 是实数 $(\lambda=\bar{\lambda})$. 現在容易看出, λ 的二次多項式

$$\|x\|^2+2\lambda|(x, y)|^2+\lambda^2|(x, y)|^2\cdot\|y\|^2=\|x+\lambda(x, y)y\|^2$$

是非負的,从而它不能有相异的实根,因此它的判别式应当小于或等于零:

$$|(x, y)|^4-\|x\|^2\cdot\|y\|^2\cdot|(x, y)|^2\leqslant 0.$$

由此可知(在$(x, y)=0$ 的情况亦然),

$$|(x, y)|^2\leqslant\|x\|^2\cdot\|y\|^2$$

或

$$|(x, y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|. \tag{1}$$

这个不等式叫做布涅科夫斯基-席瓦尔兹不等式.

在通常的三維向量空間中,向量的范数等于其长,而两向量的数量积等于此两向量之长以及此两向量間夹角之余弦的乘积, 从而布涅科夫斯基-席瓦尔兹不等式表示角的余弦之絕对值不超过 1 这一基本事实.

現在考察和 $x+y$ 的范数之平方:

$$\|x+y\|^2=(x+y, x+y)=\|x\|^2+\|y\|^2+(x, y)+(y, x).$$

注意到 $|(x, y)+(y, x)|\leqslant 2|(x, y)|$, 根据不等式(1)可以写成

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|,$$

或

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|. \tag{2}$$

这个不等式叫做三角形不等式, 在通常的向量空間中它表示三角形一边之长不超过另二边之长的和这一事实.

应用不等式(2)于和 $x-y=(x-z)+(z-y)$, 我們得公式

$$\|x-y\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|. \tag{3}$$

綫性相关的概念在往后的理論中起着最重要的作用. 希尔伯特空間中的元素 $z_1, z_2, \cdots, z_n$叫做**綫性相关**的, 如果可以找到不全为零的常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得等式

$$a_1z_1+a_2z_2+\cdots+a_nz_n=0$$

成立.

上述的元素叫做**綫性无关**的, 如果上面的等式只有当

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

时才成立.

为要希尔伯特空間中的元素 $z_1, z_2, \cdots, z_n$是綫性无关的, 必需且只需它們的格萊姆行列式

$$\begin{vmatrix} (z_1, z_1), (z_1, z_2), \cdots, (z_1, z_n) \\ (z_2, z_1), (z_2, z_2), \cdots, (z_2, z_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (z_n, z_1), (z_n, z_2), \cdots, (z_n, z_n) \end{vmatrix}$$

异于零. 可以证明, 格萊姆行列式只可能取非負实值.

我們引入极限概念. 設在希尔伯特空間H中給定了元素列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 我們說, 此序列(强)收斂于或趋近于 x, 如果 x 屬于H且

$$\|x_n-x\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{4}$$

元素 x 叫做序列$\{x_n\}$的极限. 我們将用寻常的記号

$$x_n\Longrightarrow x \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}x_n=x$$

記之.

我們現在举例来說明此定义.

a) 在向量空間中, 收斂性 $x_n\Longrightarrow x$ 表示

$$\sum_{k=1}^{N}(x_{n,k}-x_k)^2\to 0,\ n\to\infty,$$

其中 $x_{n,k}$ 是向量 x_n 的分量，N 是向量空間的維数．由此推出在寻常意义下的 $x_{n,k}\to x_k$.

б）在函数空間 L_2 中，收斂性 $x_n\Longrightarrow x$ 表示

$$\int_a^b[x_n(t)-x(t)]^2dt\to 0,\ n\to\infty.$$

这种收斂叫做平均收斂．应当指出，甚至当 $x(t)$ 以及 $x_n(t)$ 都連續时，从平均收斂性也絕不能推出函数的普通收斂性．

如果 $x_n\Longrightarrow x$ 且 $y_n\Longrightarrow y$，則 $(x_n, y_n)\to(x, y)$．事实上，容易驗证

$$(x_n, y_n)-(x, y)=(x_n-x, y_n-y)+(x, y_n-y)+(x_n-x, y).$$

由此根据布涅科夫斯基-席瓦尔茲不等式，

$$|(x_n, y_n)-(x, y)|\leqslant$$
$$\leqslant\|x_n-x\|\cdot\|y_n-y\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\|+\|y\|\cdot\|x_n-x\|\to 0,$$

这就证明了我們的断言．

如果 x_n 收斂于 x，則对于任何 y，(x_n, y) 皆收斂于 (x, y)，并且 $\|x_n\|$ 收斂于 $\|x\|$.

回到一般的收斂概念．

設在希尔伯特空間 H 中給定了收斂于元素 x 的序列 $\{x_n\}$．根据定义，$\|x_n-x\|\to 0$．利用三角形不等式(3)，得

$$\|x_m-x_n\|=\|(x_m-x)-(x_n-x)\|\leqslant\|x_m-x\|+\|x_n-x\|.$$

当 n 与 m 无限增大时右端趋于零，于是

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\|x_n-x_m\|=0. \tag{5}$$

因此，如果 $x_n\Longrightarrow x$，則必須滿足等式(5)．逆命題一般不成立．即是当条件(5)滿足时，可能出現序列 $\{x_n\}$ 的极限不屬于所考慮的希

尔伯特空間这种情况.

希尔伯特空間H叫做完备的,如果它的任何滿足条件(5)的元素列在H中皆具有极限的話.

添加一些新元素后可使不完备的希尔伯特空間变成完备的,这类似于引入无理数后就将有理数集补足成整个数直綫.

設序列$\{x_n\}$滿足条件(5),但在H中无极限. 这时我們认定序列$\{x_n\}$以某新元素x作为极限,此新元素叫做此序列的**极限元素**. 在此如果极限元素x与y是分别由序列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$决定的,则当

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$$

时,我們約定$x=y$.

极限元素的数量积由公式

$$(x, y)=\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$$

定义,于是

$$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

上面二式右端的极限之存在性是容易证明的.

将全部极限元素归并入H就使H变成了完备的空間. 这种手續叫做**完备化**.

以上所引入的有限維向量空間H_n、无穷維向量空間l_2以及函数空間L_2都是完备的希尔伯特空間.

以后凡是讲到希尔伯特空間,我們都假定它是完备的.

現在我們引入一些概念,这些概念是和研究H中元素的集有联系的. 元素集L叫做**綫性流型**,如果它滿足下面的条件:若元素$x_1, x_2, \cdots, x_m$屬于L,则其任何綫性組合$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m$皆屬于$L$. 如果除此以外,$L$中任何收斂元素列的极限元素皆屬于$L$,亦即$L$包含它的全部极限元素,则这样的綫性流型叫做**子空間**.

在有限維空間 H_n 中任何綫性流型都是閉的，从而都是子空間．在通常的实三維向量空間中子空間的例子是：全空間，通过坐标原点的平面以及通过坐标原点的直綫．

如果 x_1 是 H 中的任何元素，則一切形如 ax_1 的元素（其中 a 是任意的复数）所組成的集是一个子空間．如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是任何 n 个綫性无关的元素（n 是有限数），則一切形如 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的元素（其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是任意的复数）所組成的集也是一个子空間．所有这些子空間的例子全是有限維的．子空間也可能是无穷維的．子空間可以視为独立的希尔伯特空間．

現在我們证明一个定理，它对于后面的全部討論具有基本的意义．

定理 I. **如果 L 是子空間，則 H 中的任何元素 x 皆可一意地表示成**

$$x=y+z \tag{6}$$

的形式，其中 y 屬于 $L(y\in L)$ 而 z 与子空間 L 的全部元素都直交 $(z\perp L)$.

如果 $x\in L$，則所述的表达式显然成立．設 x 不屬于 L．令 d 表示一切正数 $\|x-y\|^2$（这里 y 取遍整个子空間 L）所組成的集的下确界．L 中存在这样的元素列 $\{y_n\}$，滿足

$$\|x-y_n\|^2=(x-y_n, x-y_n)=d_n\to d.$$

設 u 是 L 中的任何元素，于是元素 $y_n+\varepsilon u$ 也屬于 L，因此，注意到 d 是下确界，我們有 $(x-y_n-\varepsilon u, x-y_n-\varepsilon u)\geqslant d$．将此数量积展开，我們得不等式

$$(u,u)\varepsilon^2-\varepsilon[(x-y_n,u)+(u,x-y_n)]+(d_n-d)\geqslant 0.$$

因为 $(u,x-y_n)=\overline{(x-y_n,u)}$，于是

$$(u,u)\varepsilon^2-2\,\mathrm{Re}(x-y_n,u)\varepsilon+(d_n-d)\geqslant 0.$$

左端的三項式对于任何实数 ε 都是非負的，故有

$$|\mathrm{Re}(x-y_n, u)| \leqslant \sqrt{d_n-d}\cdot\|u\|.$$

这个不等式可以加强. 令 φ 表复数$(u,\ x-y_n)$的輻角, 即是$(u, x-y_n)=|(u, x-y_n)|e^{i\varphi}$. 在不等式中用元素 $ue^{-i\varphi}$(它也屬于 L)代替元素 u, 并注意到$\|ue^{-i\varphi}\|=\|u\|$, 我們得

$$(ue^{-i\varphi}, x-y_n)=e^{-i\varphi}(u, x-y_n)=|(u, x-y_n)|,$$

由此

$$|(u, x-y_n)| \leqslant \sqrt{d_n-d}\cdot\|u\|. \tag{7}$$

提醒一下, 在此不等式中 x 是 H 中給定的元素, y_n是 L 中滿足条件$\|x-y_n\|^2\to d$ 的元素列而 u 是 L 中任意的元素.

現在我們估計数量积$(u,\ y_n-y_m)$的模. 将差 y_n-y_m 表示为 $y_n-y_m=(y_n-x)+(x-y_m)$并利用不等式(7), 得

$$|(u, y_n-y_m)| \leqslant |(u, x-y_n)|+|(u, x-y_m)| \leqslant$$
$$\leqslant(\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d})\cdot\|u\|.$$

在此不等式中让 $u=y_n-y_m$ 并两端約去因子 $\|y_n-y_m\|$, 則得不等式

$$\|y_n-y_m\| \leqslant \sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d}.$$

当 n 与m无限增大时, 此不等式右端趋于零, 因此, 根据子空間 L 的完备性, 元素列 y_n在 L 中具有极限: $y_n\Longrightarrow y,\ y\in L.$

在不等式(7)中令 $n\to\infty$ 取极限, 我們得

$$(z, u)=0, \quad z=x-y,$$

其中 u 是 L 中的任何元素.

剩下还要证明所得表达式的一意性. 假設有两个表达式

$$x=y+z=y_1+z_1,$$

其中 y 与 y_1 屬于 L, 而 z 与 z_1 垂直于 L 的一切元素. 于是, 用 $y-y_1$ 与 $z-z_1$ 去和等式 $y-y_1=z_1-z$ 的两端作数量积, 則得 $\|y-y_1\|=0$ 与$\|z-z_1\|=0$. 定理证完.

公式 (6) 中屬于 L 的元素 y 叫做**元素 x 在子空間 L 上的**

投影.

§2. 綫性有界算子

所謂H中的算子，是指任何一个确定的規律，按照它H中的任何元素x都对应H中一确定的元素y. 記为

$$y = Ax.$$

变空間H的元素x为同一空間的元素Ax的算子A叫做綫性有界的，如果它是:

1) 可加的: $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$;

2) 齐性的: $A(ax)=aAx$;

3) 有界的: 存在常数$M>0$，使得

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\|.$$

此种M的最小者叫做算子A的**范数**，并記为$\|A\|$.

任何綫性有界算子在这样的意义下是連續的: 如果空間H中的元素列x_n收斂于元素x，則元素列Ax_n收斂于Ax; 事实上,

$$\|Ax-Ax_n\| = \|A(x-x_n)\| \leqslant \|A\|\,\|x-x_n\| \to 0.$$

关于綫性有界算子的加法与乘法自然地按下述方法定义:

$$(aA)x = aAx,\ (A+B)x = Ax+Bx,\ (AB)x = A(Bx).$$

容易看出，此时

$$\|aA\| = |a|\cdot\|A\|,\quad \|A+B\| \leqslant \|A\|+\|B\|,$$

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|,$$

特別，算子的乘冪$A^2=AA$, $A^3=AA^2=A^2A$, …滿足不等式

$$\|A^2\| \leqslant \|A\|^2, \cdots, \|A^n\| \leqslant \|A\|^n, \cdots$$

現在我們举几个綫性有界算子的例.

在n維向量空間H_n中，綫性算子是由某矩陣决定的綫性变换

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$