啊 哈！灵 机 一 动

〔美〕马丁·迦德纳著

白英彩 崔良沂译

上海科学技术文献出版社

目　　录

第一章　组　　合

组合分析，或称组合数学，是一门研究如何安排事物的学科。用稍专门化的术语来说，组合分析就是研究按各种特定规则一些元素可能组成的集合的方式和那些组合的特性。

举例来说，本章的第一个问题就是关于不同颜色的泡泡糖可能具有的组合方式。这个问题要求读者求出符合某种性质的有色泡泡糖的最小集合。第二个问题是关于一张淘汰赛表上球员的分组比赛方式，与计算机数据分类颇为相似。

组合分析往往是求某些事物按某些规则不同的组合方式总共有多少。本节提出了所谓“枚举问题”，求苏珊去学校共有几种走法。在这个例子中，组合的元素是沿着矩阵边的路线中的若干线段。此已涉及到几何图形，所以我们进入了“组合几何”的领域。

数学的每一分支都有其组合的方面。在本书各章中你都能看到组合问题，有组合算术、组合拓扑学、组合逻辑和组合集合论，甚至还有组合语言学，见文字游戏一章。组合数学在概率论中特别重要。在概率论中，必须列出所有可能的元素组合才能得出一个概率公式。有一本著名的概率问题集:《选择和机会》。书名中“选择”一词系指该书的组合方面。

我们的第一个问题即与概率有关，它是寻求关于有色泡泡糖的某种安排，要求确保(即其概率为1)达到某种特定要求。文中指出，从求元素不同组合的数目这样简单的问题出发，可以提出无穷无尽的概率问题。在“苏珊去学校的路线”问题上，可以看出帕斯卡三角形与解初等概率问题有着非常密切的关系。

显然，对于一个给定的组合问题，其符合题意的各种组合的数目可以是0、1、任何一个有限数或一个无穷数。在两个奇整数的组合中，没有一个组合其元素之和也是奇数。在两个质数的组合中，只有一个组合其元素之积等于21。但在两个正整数的组合中，有三个组合其元素之和等于7(即一颗骰子相反两面上的一对数字)。而由两个偶数组成的组合中，其元素之和也是偶数的组合则有无限多个。

在组合理论中，要作出关于不存在符合题意的组合的“不可能性”证明，往往是极其困难的。例如，直到最近才证明了对于每张地图来说，没有一个平面区域的组合需要涂上五种颜色*。这曾是组合拓扑学上著名的悬而未决的问题。这个不可能性证明要用到一个十分复杂的计算机程序。

另一方面，也有许多组合问题，其不可能性初看上去很难证明，但有时灵机一动，一下子就证出来了。在本章“难铺的瓷砖”问题中，通过简单的“奇偶校验”立即可以证明组合的不可能性，而用任何别的方法则难以成功。

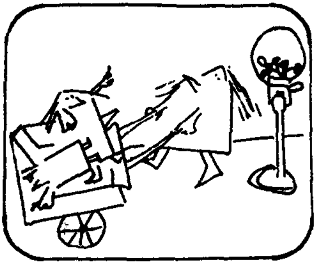
问题之二为“药品错混”，把组合的思想运用于不同基数的运算系统。我们看到，数字本身及其在位置记数法中用数码来表示的方式都依组合规则而定。事实上，一切演绎推理，无论属于数学还是纯粹逻辑，都是根据某个系统的规则处理“一串”符号的组合(该系统确定这个串是否为一个有效的断定)。这就是为何十七世纪的组合数学之父戈特弗里德·莱布尼茨**称推理技巧为组合技巧的缘由。

---

* 四色问题，即每一幅地图都可以只用四种颜色来着色，使具有公共边界的国家涂有不同的颜色。1976年美国伊利诺斯大学数学教授肯尼思·阿佩尔和沃尔夫冈·哈肯利用计算机证明了这一猜想——译注

** 莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646～1716)，德国自然科学家、数学家——译注

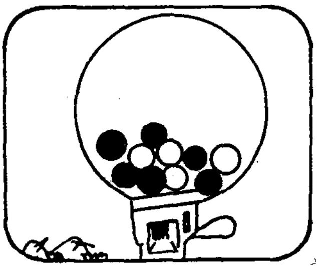
泡泡糖问题



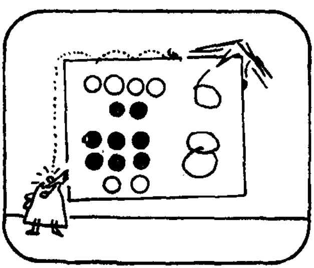
可怜的琼斯夫人路过泡泡糖出售机时，尽量不使她的双生子有所察觉。

第一个双生子：妈，我要泡泡糖。

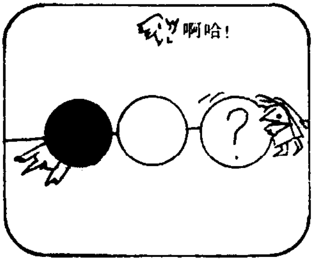
第二个双生子：妈，我也要。我要和比利拿一样颜色的糖。



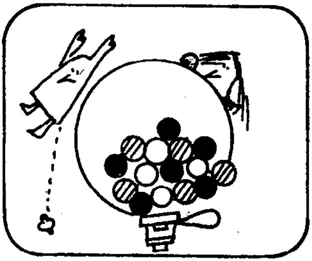
分币泡泡糖出售机几乎已空了。说不准下一粒是什么颜色。琼斯夫人如要得到两粒同色的泡泡糖，需要准备花多少钱？



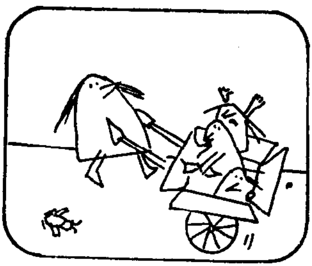
琼斯夫人若花6分钱，准可得到2粒红色的糖——就算所有白色的糖花去4分，尚剩2分可用来取得2粒红色的糖。或者她花8分准可得到2粒白色的糖。所以她得准备花8分钱，对吗？



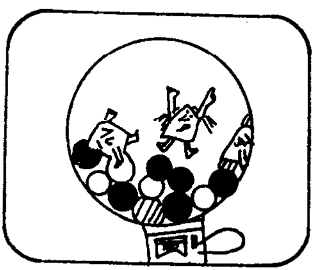
不对。即使先取到的两粒糖颜色不同，第三粒必定与前两粒中的一粒同色。所以她最多只需准备花3分钱。



现在假设出售机内的糖有6粒是红的，4粒是白的，5粒是蓝的。琼斯夫人手头需要有多少钱才能确保拿到两粒同色的泡泡糖，你算得出吗？



你算出是4分，对吗？如是这样的话，那么请你考虑一下，如史密斯夫人带着三生子经过泡泡糖出售机，将会遇到什么情况。



这一次，出售机内的糖有6粒是红的，4粒是白的，而仅有1粒是蓝的。史密斯夫人如要拿到3粒同色的泡泡糖需准备花多少钱？

花 多 少 钱?

第二个泡泡糖问题只是把第一个问题稍加改变而已，亦可以依同样的思路来解答。这时，第一次拿到的3粒糖有可能颜色不同——红、白、蓝。这是“最坏”的情况，因为抽取结果不能如愿的次数最多。第四粒必定是这三种颜色中的一种。若要得到两粒同色的糖，就需要买4粒糖，所以琼斯夫人须准备花4分钱。

显然，这还可推广至n组糖(每组糖的颜色不同)的情况。如果有n组糖，只需准备买$n+1$粒糖即可。

第三个问题更难一点，即史密斯夫人带的是三生子而非双生子，泡泡糖出售机内的糖有6粒红的，4粒白和1粒蓝的，她要得到3粒同色的糖需花多少钱?

如前一样，我们首先考虑最坏的情况。史密斯夫人有可能得到2粒红的，2粒白的以及那一粒蓝的，总共是5粒糖。第6粒不是红的就是白的，因此可以保证得到3粒同色的糖，所以答案是6分钱。如假定蓝色的糖不止一粒，她可能每种颜色的糖都抽到一对，这时就需要有第7粒糖以配成3粒同色的糖。

啊哈！关键在于“看到”“最坏”情况的长度。若使用死办法，把11粒糖各标以一个字母，然后考虑所有可能的抽取顺序，看哪一个顺序在3粒同色糖出现之前的初链最长，那么这种解法需要列出$11!=39,916,800$种序列！即使考虑问题时不区分同色的糖，仍然需要列出2,310种序列。

如何将其推广至k粒同色的糖，请看如下所述。若有n组糖(每组糖各有一种颜色，且至少有k粒)，为了得到k粒同色的糖，就需抽取$n(k-1)+1$粒糖。如果一组或几组同色的糖少于k粒，情况又会怎样?请你不妨一试，也许你会感兴趣。

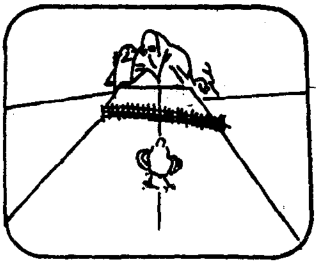
还可用许多其它的方式作出这种问题的模型。例如，若要

从一副 52 张的纸牌中抽到譬如说 7 张同花的牌，那么需要抽取多少张牌？这里，$n=4$，$k=7$。根据公式，答案是

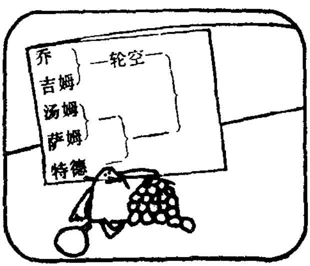
$$4(7-1)+1=25。$$

虽然这些只是简单的组合问题，但却可以从中引伸出一些有趣而困难的概率问题。举例来说，若你抽取 n 张牌（n 的范围是 7 至 24），且每张牌取出后不再放回，问抽到 7 张同花的概率是多少？（显然，如果你抽取的牌少于 7 张，则概率为 0；如果你抽取 25 张或更多的牌，则概率为 1。）若你每次把牌抽出后再放回去且把牌重新洗过，那么其概率有何变化？还有一个更加困难的问题：设把牌抽出后重新放回或不再放回，若要拿到 k 张同花牌，问抽取牌次数的期望值（即从整体来看的平均数）是多少？

乒乓赛难题

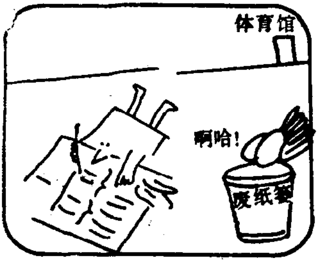


米勒德·菲尔莫尔初级中学乒乓俱乐部的五个成员决定举行一次淘汰赛。

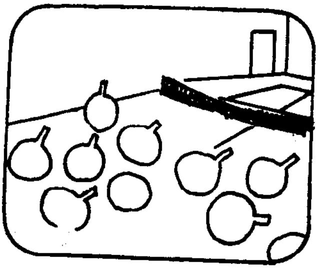


教练员这样说明他的比赛表。

教练员：由于 5 是奇数，因此在第一轮中有一个球员“轮空”。第二轮中还得出现一次“轮空”。一共要进行四场比赛。



第二年乒乓球盛行，俱乐部拥有三十七名成员。教练员又在筹划一次“轮空”尽可能最少的比赛。你能算出有多少场比赛吗？



你还没有算出？你还在画表吗？你没有悟到，啊哈！每场比赛淘汰一名球员，一共要淘汰三十六名球员，所以不多不少需进行三十六场比赛，不是吗？

多少次轮空？

为了解这个问题，可画一张 37 名球员实际比赛表。你如果采取这种死板方法，可能会发现：这张表无论如何画，不多不少总是有四次轮空。所需轮空的次数，是球员人数 n 的一个函数。如何才能算出轮空的次数呢？

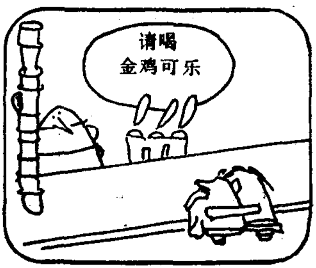
给定 n，轮空次数可以按下列方法来确定：从等于或大于 n 的 2 的最少次幂中减去 n，把余数用二进制表示，其中 1 的个数即为轮空的次数。在这个例子中，我们把 64(即 2^6)减去 37 得到 27。27 用二进制表示就是 11011，其中共有四个“1”，因此这次比赛共有四次轮空。证明这一奇妙算法的正确性是一次很有趣的练习。

这个问题中所描述的比赛类型常被称为“淘汰赛”。它符合计算机科学家称为在一个包含 n 个元素的集合中通过两两比较

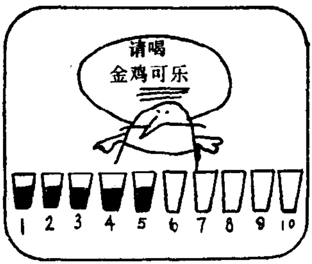
来确定最大元素这样一种算法的情况。正如我们所知，恰需经过 $n-1$ 次两两比较才能确定最大值。计算机的分类操作也可以采取对 3 个、4 个、5 个等元素组成的集合进行比较的方法。

分类在计算机科学中至为重要，有些书籍通篇论述其应用。你很容易想到许多实际的问题，其中包含有很重要的分类过程。据估计，在科学、事务处理和工业上使用的计算机，其四分之一左右的运行时间是花在分类问题上的。

奎贝尔*的玻璃杯

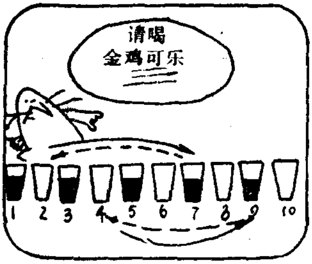


巴尼在汽水柜台工作。他用 10 只玻璃杯给两名顾客出了个难题。

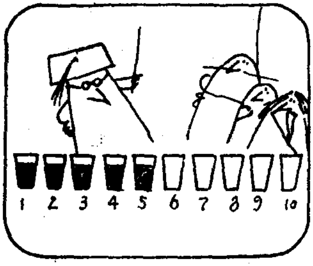


巴尼：这一排有 10 只玻璃杯，左边 5 只内有汽水，其余 5 只空着。请你使这排杯子变成满杯和空杯相互交错，条件是只允许移动四只杯子。

* 奎贝尔(quibble)一词在英文中是模棱两可、双关语之意——译注

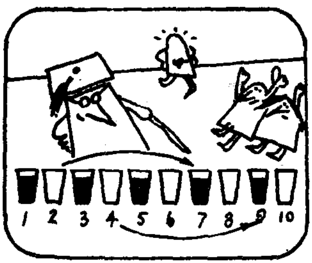


巴尼：好，只要分别把第二只和第七只，第四只和第九只交换一下位置就成了。



奎贝尔教授碰巧听见了，他总爱耍点花招。

奎贝尔教授：何须移动四只？我只要移动两只就行了，你行不行？



奎贝尔教授：很简单。只要拿起第二只杯子，把里面的汽水倒进第七只杯子，再拿第四只杯子把汽水倒进第九只杯子就行了。

不寻常的奎贝尔

虽然奎贝尔教授抓住话语中的模棱两可之处解了这个问题，但这个问题并不象乍看上去那么简单。例如，还是这么一个问题，但改成100只满杯挨着100只空杯排成一排，请考虑一下，若要使其变成满杯和空杯交错排列，需将多少对杯子互换位置？

如果真的使用200只杯子来解答这一问题显然不大合乎实际，所以第一步不妨分析一下 n 值较小时的情况，n 为满(或空)杯的数目，以得出一个模式。你研究这个问题时可以利用两种颜色的筹码(也可用正面朝上和正面朝下的牌，正面朝上或正面朝下的硬币，或两种不同币值的硬币)。如果 $n=1$，则无需移动；当 $n=2$，显然是把一对筹码移动一次。你也许会有点惊讶，当 $n=3$ 时，也是把一对筹码的位置交换一次。再进一步做下去，你就会悟出一个简单的模式：当 n 为偶数时，互换位置的次数为 $n/2$ 次，当 n 为奇数时，则为 $(n-1)/2$ 次。所以如果是100只满杯和100只空杯，互换50次位置就成了。

这样需移动100只杯子。奎贝尔的解题花招可以把需要移动的杯子数减少一半。

有一个与刚才分析的问题非常相似但困难得多的古典难题。一种类型的 n 件东西，紧挨着另一种类型的 n 件东西排成上述那样的一排(同上面一样，也可采用玻璃杯、筹码和纸牌等)。你想使这一排中不同类型的东西相互交错，但这里我们规定不同的“移动”方法：这次只准把任意一对相邻的筹码移动至一排中空着的位置，且滑动时不得改变这两个筹码的左右顺序。

例如，当 $n=3$ 时，解题过程如下所示：

```
XXXOOO
    XOOOXX
    XOO   XOX
        XOXOXO*
```

普遍的解是什么？当 $n=1$，是没有意义的；当 $n=2$，你立即会发现无解；当 $n>2$，解此问题至少须作 n 次移动。

当 $n=4$ 时，求解不很容易，你不妨一试，煞是有趣，或许你能把当 $n\geqslant3$ 时的解题过程公式化。

* 原文如此，应为OXOXOX——译注

根据这一难题还可产生许多奇异的变相问题，用来测验你的智力。这里试举几例：

1. 在移动一对相邻的筹码时，若两者颜色不同，则将其位置互调，除此以外，其余规定不变。这样，一对黑-红筹码在移至新的位置前就变成一对红-黑筹码。解 8 个筹码移动五次。对于 10 个筹码来说，作 5 次移动也够了。我们尚不知道它的普遍解，也许你能找出来。

2. 某种颜色的筹码少一个，即某种颜色的筹码有 n 个，另一种颜色的筹码则有 $n+1$ 个，除此以外，其余规定不变。已经证明，对于任意 n 个筹码，其解是作 n* 次移动，而且这是最少的移动次数。

3. 使用三种不同颜色的筹码。按通常的方式移动一对对相邻的筹码，使得所有这三种颜色交相辉映。当 $n=3$(共有 9 个筹码)，其解需作 5 次移动。在这些变相问题中，假设在最终形成的一排中不允许留有任何空距。如果允许留有空距，则问题的解法就令人惊奇地变为移动 4 次了。

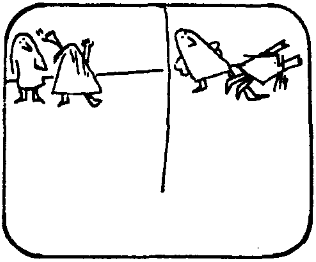
看来尚有许多其它的变化形式，但据我们所知，迄今未曾有人提出，更谈不上解题了。例如，假设一次可以同时移动 3 个或更多相邻的筹码，在上述各变相问题中改用这种移动方式。

假如是先移动 1 个筹码，后移动 2 个相邻的筹码，再 3 个，4 个，依此继续下去，那又会怎样？给定某种颜色的筹码 n 个，另一种颜色的筹码也为 n 个，这个问题的解是否总是作 n 次移动？

---

* 原文为 n^2，似有误——译注

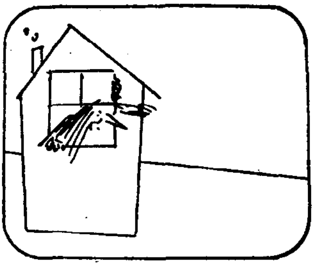
令人困窘的道路



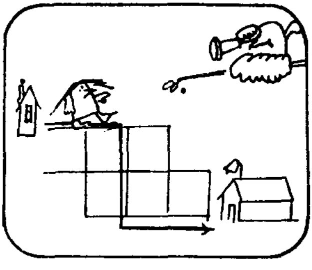
苏珊很是为难。她步行去学校，路上老是碰到斯廷基。

斯廷基：嘻，苏珊，我可以陪你一起走吗？

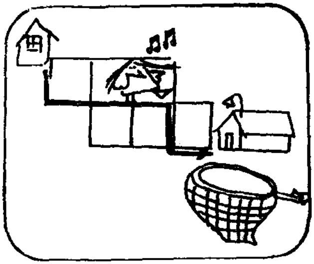
苏珊：不，请走开。



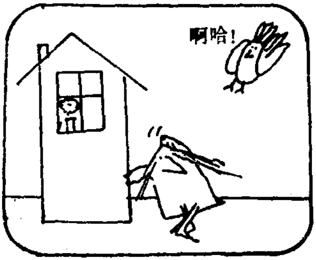
苏珊：我有办法了。每天早上我走不同的路线去学校。这样，斯廷基就不知在哪儿找到我了。



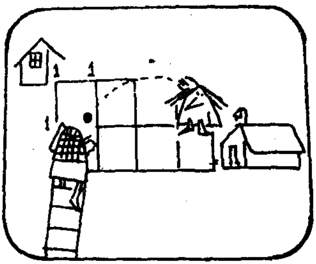
这张地图表示苏珊的住所和学校之间的所有街道。苏珊去学校时，走路的方向总是朝东或者朝南。



这是苏珊走的另一条路线。自然她不想偏离学校的方向走路。但总共有多少条路线可行？

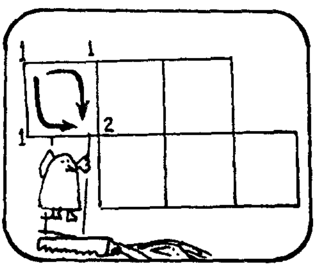


苏珊：我真想知道有多少条路线可走。让我想一下。要算出多少条路线看来并不简单。嗯，啊哈！一点不难，简单得很！苏珊想到了什么好主意？



她的推理如下：

苏珊：在我家这个角点上写一个1，因为我只能从这一点出发。然后在与此相隔一个街区的两个角点上各写一个1，因为到达那里只有一条途径。



苏珊：现在我在这个角点上写一个2，因为到达那里可以有两条途径。

苏珊发现2是1加1之和，她忽然领悟：若到某一角点仅一条途径，则该角点上的数字为前一个角点上的数字；若有两条途径，则为前两个角点上的数字之和。