

误差理论与 测量平差

● 樊功瑜 编著



同济大学出版社

内 容 提 要

本书在对测量误差理论及基本测量平差方法阐述的基础上,加强了测量误差理论的深度和广度,建立了测量平差中数学模型的概念,对近代测量平差的发展作了较广泛的介绍。

本书可作为高等院校测绘各专业的教材,也可供有关专业的工程技术人员学习参考。

责任编辑 郁 峰
封面设计 李志云

误差理论与测量平差

樊功瑜 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号 邮编:200092)

新华书店上海发行所发行

常熟市印刷七厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:7.75 字数:220 千字

1998 年 4 月第 1 版, 1998 年 4 月第 1 次印刷

印数:1-2000 定价:7.00 元

ISBN 7-5608-1824-2/TU·255

前 言

本书是在教材《最小二乘法与测量平差》(同济大学出版社, 1985年)的基础上重新编写的。与原教材相比,本书突出了以下几点:

1. 加强了基本测量误差理论的深度和广度。
2. 建立了测量平差中数学模型(包括函数模型和随机模型)的概念。
3. 对测量平差的近代发展作了较广泛的介绍,以适应当前和未来发展的要求。

本书在写作过程中,得到了刘大杰教授的关心和支持,并提出了许多宝贵的意见和建议,对此,作者深表谢意。

受水平所限,书中定有不妥之处,恳切希望读者批评指正。

樊功瑜

1998年1月

目 录

第一章 绪 论	(1)
§ 1-1 测量误差	(1)
§ 1-2 本课程的任务	(3)
§ 1-3 测量平差的发展	(3)
§ 1-4 测量平差的内容	(5)
第二章 测量误差理论	(7)
§ 2-1 偶然误差的分布	(7)
§ 2-2 精度标准	(14)
§ 2-3 协方差及其传播律	(18)
§ 2-4 权与权的确定	(33)
§ 2-5 权逆阵及其传播律	(39)
§ 2-6 单位权中误差的计算	(49)
§ 2-7 n 维误差分布	(53)
§ 2-8 误差椭圆	(56)
§ 2-9 偶然误差特性的假设检验	(72)
第三章 最小二乘准则	(79)
§ 3-1 参数估计与测量平差	(79)
§ 3-2 估计值的最优性质	(80)
§ 3-3 最小二乘准则	(81)
第四章 间接平差	(89)
§ 4-1 间接平差原理	(89)

§ 4-2	间接平差求平差值的步骤	(94)
§ 4-3	高斯约化法	(97)
§ 4-4	间接平差的精度评定	(105)
§ 4-5	测边网间接平差	(110)
§ 4-6	测角网间接平差	(118)
§ 4-7	边角网间接平差	(136)
§ 4-8	带约束条件的间接平差	(140)
第五章 条件平差		(147)
§ 5-1	条件平差原理	(147)
§ 5-2	条件平差的精度评定	(152)
§ 5-3	条件平差的步骤	(154)
§ 5-4	测角网条件平差	(158)
§ 5-5	测边网条件平差	(171)
§ 5-6	边角网条件平差	(178)
§ 5-7	带参数的条件平差	(184)
第六章 近代测量平差简论		(193)
§ 6-1	测量平差的数学模型	(193)
§ 6-2	测量平差参数的统计性质	(197)
§ 6-3	秩亏自由网平差	(200)
§ 6-4	序贯平差	(207)
§ 6-5	最小二乘配置	(211)
§ 6-6	附加系统参数的平差	(216)
§ 6-7	数据探测法与稳健估计	(220)
§ 6-8	随机模型的验后估计	(225)
§ 6-9	有偏估计	(230)
参考文献		(239)

第一章 绪 论

§ 1-1 测量误差

在测量工作中,当对某一客观存在的量,例如两点之间的距离或高差、三点之间构成的水平角等,尽管采用了比较精密的仪器和合理的观测方法,测量人员的工作态度也是认真仔细的,但多次测量的结果之间还是有差异,这说明观测值中存在着测量误差(或称观测误差)。测量误差产生的原因是多方面的,但概括起来,有测量仪器不够完善、观测者感觉器官的限制以及外界环境的影响等三个方面。

测量仪器不够完善是指仪器制造上的缺陷和精密程度的限制,如水准仪在制造上不能保证视准轴与水准管轴的严格平行;用刻到厘米分划的尺子量距,不能保证毫米读数是正确的,等等。观测者感觉器官的限制是指人的鉴别能力有一定限度,因而瞄准、读数等都会产生误差。环境因素的影响是指观测时空气的温度、湿度以及风力、大气折光等因素,使观测值带有误差。通常把以上三个方面的因素称为观测条件。显然,观测条件好一些,观测成果的质量就好一些,反之,观测成果的质量就差一些。若观测条件相同,则观测成果的质量也相同。在测量工作中,把观测成果质量的好与坏相应地称为精度高与精度低,若观测成果的质量相同,则称为等精度或同精度。

测量误差按其对观测结果的影响可分为系统误差、偶然误差和粗差三类。

一、系统误差

在相同观测条件下进行一系列观测,如果误差在数值上和符号上保持不变或按某一定规律变化,则称这种误差为系统误差。例如,用一把含有尺长误差的尺子丈量距离,当距离越长,这种误差的影响越大;又如在大气温度不同于尺长检定温度的情况下丈量距离,也会使观测成果含有系统误差。

系统误差常具有一定的积累性,因此,对成果的影响较大,应当设法消除或削弱其影响,如以上两种系统误差,可以在丈量的距离中加入尺长改正和温度改正,这样,就可以削弱它们带给观测成果的影响。

二、偶然误差

在相同的观测条件下进行一系列观测,如果误差在数值上和符号上表现出偶然性,即其数值时大时小,其符号忽正忽负,且不能预先知道,则称这种误差为偶然误差。例如估读小数和照准目标时所产生的误差等。偶然误差是由许多随机因素影响而产生的小误差的代数和,因此又称偶然误差为随机误差。

偶然误差在数值上和符号上表现的偶然性,只是对单一的误差而言的,但大量的偶然误差却具有明显的规律性,在第二章将对此作详细讨论。

三、粗差

在测量工作中,除了以上两类误差外,还可能发生错误,错误又称为粗差。如瞄错目标、读错数值等,这样的粗差是由于观测者粗心大意造成的,因此,要求在测量工作中必须小心谨慎,另外还要采用适当的观测方法,以避免发生粗差。

在整个测量过程中,应当剔除粗差,消除或削弱系统误差的影响,使观测值中仅含偶然误差,这样的观测值和偶然误差可以看作

是服从于正态分布的随机变量。

§ 1-2 本课程的任务

由于在观测值中总是存在着测量误差,同时也是为了检查错误,因此,通常都要进行多余观测。所谓多余观测,就是对观测量进行多于必要观测数的观测。例如,为了确定一个平面三角形的形状,只需要观测任意两个内角就可以了,但通常是观测三个内角;又如对某段距离,只要观测一次就可以得到其长度,但通常要观测两次或两次以上;等等。通过多余观测,观测值之间必然产生矛盾(不符值或闭合差),因此,就要对带有测量误差的观测值进行处理,消除它们之间的矛盾,同时还要利用这些不符值来评定观测成果的质量。因此,概括起来,本课程的任务有以下两个方面:

(1) 对一系列带有测量误差的观测值进行处理,求出未知参数的平差值。

(2) 评定测量成果的精度。

§ 1-3 测量平差的发展

与其他学科一样,测量平差的产生和发展,始终是与生产实践的需要以及科学技术的发展紧密相连的。18世纪末,在天文学、大地测量学等有关科学领域内,常常要求解决这样一个课题,即从多于未知参数的观测值中求出未知参数的最优值。该课题引起当时各国许多学者的兴趣和关注。1794年,17岁的高斯(G.F.Gauss)首先提出用最小二乘法解决这一问题。1801年,天文学家对刚发现的谷神星运行轨道的一段弧长作了一系列的观测(后因故中止),高斯用自己提出的最小二乘法解决了当时天文学界这一难题,对谷神星的运行轨道作了预报,使天文学家又及时找到了这颗彗星。直到1809年,高斯才把这一理论正式发表在《天体运动的理论》这篇论文中。

在此之前的 1806 年,勒戎德尔(A. M. Legendre)发表了《决定彗星轨道新方法》一文,他从代数观点也独立地提出了最小二乘法。

自从高斯提出最小二乘法以来,广大测量学者对测量平差理论和方法进行了大量研究。在电子计算机尚未出现的手算时期,针对如何简化计算,提出了许多方法,如克吕格两组平差法、史赖伯法则、博尔兹扩展法等。随着电子计算机在测量平差中的广泛应用,从根本上改变了过去手算时期的平差计算观点,大量的、复杂的计算变为可能,从而推动了测量平差的理论和方法,使之得到了很快的发展,主要表现在以下几个方面:

1. 相关平差

1947 年,田斯特拉(T. M. Tienstre)提出了相关平差法。这一理论的出现,使观测值的概念广义化了,即把对观测值独立的要求推广到随机相关。

2. 秩亏自由网平差

1962 年,迈塞尔(P. Meissl)提出的秩亏自由网平差,把测量平差中的满秩阵推广到奇异阵。

3. 滤波、推估与配置

1969 年,由克拉鲁普(T. Kararup)提出的最小二乘滤波、推估与配置,把平差参数从非随机变量推广到随机参数。

4. 附加系统参数平差法、数据探测法与稳健估计法

最小二乘平差通常是假定观测值中仅含偶然误差,而实际上,这是不可能的,因此,相应产生了研究系统误差与粗差的理论及方法。其中,附加系统参数的平差方法是在平差过程中加入一些系统参数,以便对系统误差进行补偿。

60 年代后期,由巴尔达(W. Baarda)提出的数据探测法和可靠

性理论,则为粗差理论的研究及应用奠定了基础。目前,对粗差的处理办法有二:一是基于假设检验理论的数据探测法,该法仍属于最小二乘法;二是有别于最小二乘法的另一种新的估计方法,称为稳健估计法或抗差估计法。

5. 验后定权方法

权的确定是测量平差中一个非常重要而又复杂的问题。经典的定权通常是在平差之前,这种验前的方法很难做到正确定权。80年代以来,有关这方面的理论和方法得到了很快的发展,主要是把先验定权改进为验后定权,使之更合理,更正确。

6. 有偏估计

当平差参数过多时,参数之间就难免存在着近似的线性关系,此时采用有偏估计,可望在均方误差为最小的意义下优于最小二乘法。目前应用最广的有偏估计是由霍尔(A. E. Hoerl)和克纳德(R. W. Kennard)于1970年提出的岭估计。

以上介绍的平差理论和方法,由于受计算条件的限制等原因,真正被广泛应用都在70年代或80年代以后,因此把它们都归入到近代平差内容中。

对于近十多年发展起来的全球定位系统(GPS)、地理信息系统(GIS)、遥感技术(RS)、专家系统(ES)以及数字摄影测量系统(DPS)等所谓5S新技术,必将会出现新的测量平差问题,因此,需要不断用新的理论和方法去处理并加以解决。

§ 1-4 测量平差的内容

围绕着测量平差的两个任务,本课程讲授的重点是基于偶然误差的最小二乘平差的基本理论和基本方法,为进一步学习和研究测量平差打好基础。具体内容有以下四个方面:

(1) 测量误差理论 偶然误差的分布、传播及检验；衡量测量精度的标准中误差与权的定义； n 维误差分布及二维误差分布与误差椭圆理论等。

(2) 测量平差的最小二乘准则 应用数理统计理论推导最小二乘原理。

(3) 测量平差的基础方法 包括间接平差、条件平差、带参数的条件平差以及带约束条件的间接平差等。按最小二乘准则推导以上各平差方法的平差计算公式，并结合实例说明具体应用。

(4) 近代平差理论和方法简介 为后续有关课程的学习以及进一步研究打下基础。

学习本课程，既要注重掌握平差原理，又要求具有处理实际平差问题的能力。

第二章 测量误差理论

测量平差的两个基本任务都与测量误差紧密相连,因此,应掌握必要的测量误差理论知识。本章从阐述偶然误差的统计特性开始,引出测量精度的评定标准,导出误差传播的关系式,并在此基础上,进一步讨论 n 维误差特别是二维误差的分布规律。最后介绍关于偶然误差特性的统计假设检验方法。

§ 2-1 偶然误差的分布

设有一组观测值 L_1, L_2, \dots, L_n , 其相应的真值为 $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_n$, 由于观测误差的存在, 因此观测值与其相应的真值不会相等, 其差数为

$$\Delta_i = \bar{L}_i - L_i \quad (2-1-1)$$

其中, Δ_i 称为真误差或简称误差。若记

$$L_{n \times 1} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \\ \vdots \\ \bar{L}_n \end{pmatrix}, \quad \Delta_{n \times 1} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

则有
$$\Delta = \bar{L} - L \quad (2-1-2)$$

从统计观点看, 当观测值仅含偶然误差时, 其数学期望就是真值, 即有

$$E(L) = \bar{L} \quad (2-1-3)$$

代入(2-1-2)式,有

$$\Delta = E(L) - L \quad (2-1-4)$$

其中

$$E(L) = (E(L_1) \ E(L_2) \cdots E(L_n))^T$$

$n \times 1$

在 § 1-1 中已指出,对单一的偶然误差说来,其数值和符号不具有什么规律性,然而这种反映在个别偶然误差上的偶然性(或随机性),在对大量偶然误差的统计分析中,却呈现出一定的规律性,并且当误差个数越多,这种规律性表现得越明显。为了揭示偶然误差的规律性,在相同观测条件下,对某测区 817 个三角形的内角进行了观测,并按(2-1-1)式计算内角和的误差为

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 817)$$

式中, $(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 为第 i 个三角形内角观测值的和。由于在观测值中已剔除了粗差,且系统误差已削弱到可忽略不计,因此从整体讲,这些误差均为随机因素所致,所以它们都是偶然误差,而且各个误差之间是互相独立的。所谓独立,是指各个误差在数值上和符号上互不影响。与这样一组误差相对应的观测值称为互相独立的观测值。

设以 $d\Delta$ 表示误差区间并令其为 $0.5''$,将这组误差分别按正误差和负误差重新排列,统计误差出现在各区间的个数 μ ,计算误差出现在某区间的频率 μ_i/n ,其结果见表 2-1。

从表 2-1 可以看出,该组误差表现出这样的分布规律:绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多,绝对值相等的正误差与负误差个数相近,误差的绝对值有一定限值,最大误差不超过 $3.5''$ 。

为了形象地表达偶然误差这种分布规律,根据表 2-1 的数据,以误差 Δ 的数值为横坐标,以 $\frac{\mu/n}{d\Delta}$ 为纵坐标绘图,如图 2-1 所示。

表 2-1

误差区间 $d\Delta$	Δ 为正值		Δ 为负值		备 注
	个数 μ	频率 μ_i/n	个数 μ	频率 μ_i/n	
0.0' ~ 0.5'	123	0.151	121	0.148	Δ 数值等于 区间左端值 时,统计在该 区间内
0.5' ~ 1.0'	104	0.127	90	0.110	
1.0' ~ 1.5'	75	0.092	78	0.096	
1.5' ~ 2.0'	55	0.067	51	0.062	
2.0' ~ 2.5'	27	0.033	39	0.048	
2.5' ~ 3.0'	20	0.025	15	0.018	
3.0' ~ 3.5'	10	0.012	9	0.011	
3.5' 以上	0	0	0	0	
和	414	0.507	403	0.493	

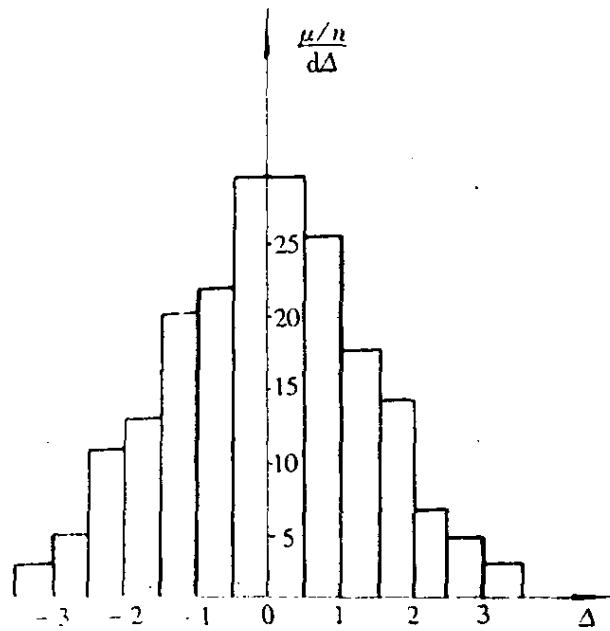


图 2-1

该图称为频率直方图。实际上,由于误差的取值是连续的,故当误差的个数 n 无限增多,并无限缩小误差区间 $d\Delta$,则可以想象,图

2-1 中的各个小长方条顶边的折线就变成一条光滑曲线,如图 2-2 所示。称此曲线为误差分布的概率密度函数曲线,简称误差曲线。它与正态分布曲线极为接近,可以看出,偶然误差的分布是以正态分布为其极限分布,故偶然误差是服从正态分布的连续型随机变量。由概率论知,正态分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (2-1-5)$$

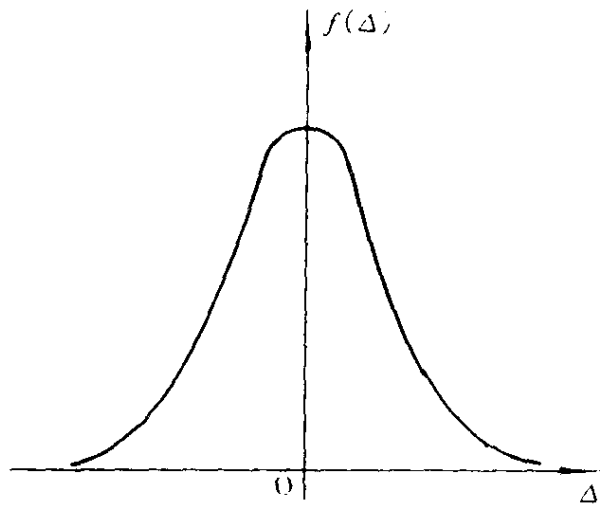


图 2-2

式中, x 为正态随机变量 X 的取值, a 和 σ^2 分别为 X 的数学期望和方差,即 $E(X) = a$, $D(x) = \sigma^2$,它们是正态分布的两个参数。参数为 a 和 σ^2 的正态分布简记为 $N(a, \sigma^2)$ 。这两个参数决定了曲线的位置和形状。在图 2-3 中给出了两条 σ 均为 1 而 a 不相同的曲线,当 $a = 0$ 时,曲线以纵轴为对称线;当 $a = 3$ 时,曲线以直线 $x = 3$ 为对称线,可见 a 决定了曲线的位置。在图 2-4 中给出了三条 a 均为零而 σ 不相同的曲线,当 σ 越小时,曲线形状越陡峭,反之,曲线越平缓,可见 σ 决定了曲线的形状。 a 和 σ^2 是正态分布的两个很重要的数字特征。

根据以上分析,对于偶然误差,由图 2-2 看,其分布曲线的对称线为 $\Delta = 0$,因此可知 Δ 的数学期望:

$$E(\Delta) = 0 \quad (2-1-6)$$

代入(2-1-5)式,则 Δ 的密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \quad (2-1-7)$$

故偶然误差 Δ 为 $N(0, \sigma^2)$ 变量。

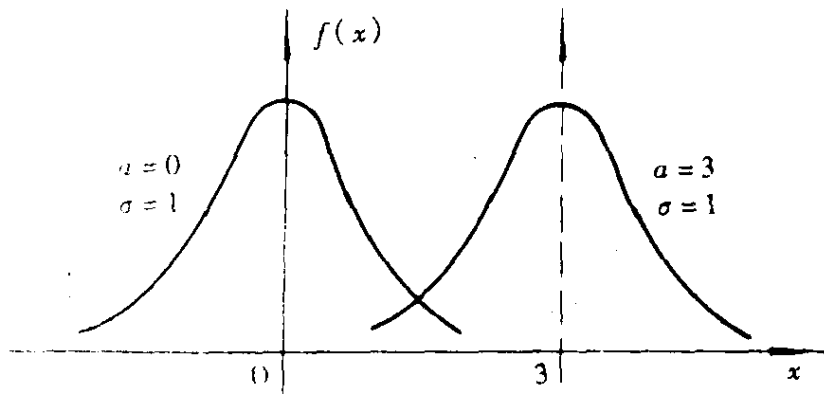


图 2-3

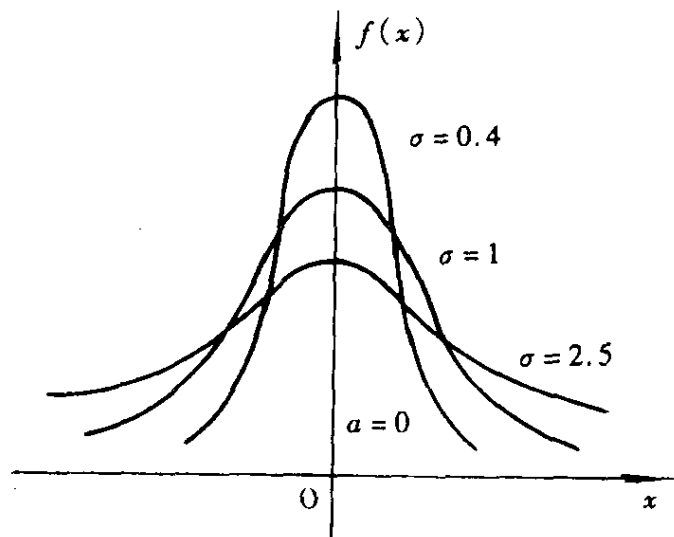


图 2-4

下面,将偶然误差的特性作进一步的阐述*:

* 为了简化,把误差及其取值均用 Δ 表示。所谓误差出现的概率,均指误差出现于某区间的概率。

(1) 在一定观测条件下,误差的绝对值不会超过一定的限值,或者说,误差值出现在一定限值以内的概率 P 为 1,即有

$$P_{-\infty}^{+\infty}(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta) d\Delta = 1 \quad (2-1-8)$$

上式说明,误差曲线与横轴所围的面积为 1。

(2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大,设 $\Delta_1 > \Delta_2$,则有 $P(\Delta_1) < P(\Delta_2)$ 。因为 $P(\Delta) = f(\Delta)d\Delta$,所以有 $f(\Delta_1)d\Delta < f(\Delta_2)d\Delta$,或

$$f(\Delta_1) < f(\Delta_2) \quad (2-1-9)$$

上式说明,密度函数 $f(\Delta)$ 随着误差绝对值 $|\Delta|$ 的增大而减小。

(3) 绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等,即有 $f(+\Delta)d\Delta = f(-\Delta)d\Delta$,或

$$f(+\Delta) = f(-\Delta) \quad (2-1-10)$$

上式说明,密度函数 $f(\Delta)$ 为偶函数。

上面介绍了三种描述误差分布的方法,即列表法、图示法和密度函数法。不难看出,最后一种方法可以替代前面两种,是一个比较全面、科学和方便的方法。在后面的讨论中,将应用密度函数法。为此,下面对密度函数作进一步的分析。

(1) 由(2-1-7)式知, $f(\Delta) > 0$,即 $f(\Delta)$ 的图像全部位于横轴的上方;

(2) 由(2-1-9)式知, $f(\Delta)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调增加的,在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调减小的,或说 $f(\Delta)$ 随 $|\Delta|$ 的增大而减小,当 $\Delta \rightarrow \pm \infty$ 时, $f(\Delta) \rightarrow 0$,即 $f(\Delta)$ 以横轴为其渐近线;

(3) 因 $f(\Delta)$ 为偶函数,故其图像对称于纵轴。

(4) 取 $f(\Delta)$ 的一阶导数,并令其为零,即

$$f'(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2\Delta}{2\sigma^2} \right) = -\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} = 0$$