浙江大学　　姚交兴　马骥　施高义　等编

機械工程實驗

上海科学技术文献出版社

机械工程实验

浙江大学　姚交兴　马　骥　施高义　等编

上海科学技术文献出版社

机械工程实验

姚文兴　马骥　施高义　等编

上海科学技术文献出版社出版
（上海市武康路2号）
新华书店上海发行所发行
昆山县亭林印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16　印张 6.75　字数 168,000
1986年10月第1版　1986年10月第1次印刷
印数：1—6,500
书号：15192·498　定价：1.45元
《科技新书目》128—247

前　　言

实验技能的培养，在高等工科院校学生整个学习过程中占有重要地位。它是和理论知识的学习相辅相成的两个重要方面。

实验的作用不仅在于验证科技领域中已知的现象和规律，帮助学生更形象更深刻地理解理论知识，更重要的还在于通过多次多种类型的实验熟悉各类仪器设备的应用，掌握实验手段、方法和技能，从而为在今后的生产实践和研究工作中，探索某些科技问题新的现象和变化规律以至为发明创造打下良好的基础。实验常常是重大科技发明的基础和前提，这在科技发展史上已屡见不鲜，实验的重要意义正在于此。

在高等工科院校学习期间，学生所接触到的实验很多，按学校性质，学科类别不同以及设备条件的差异，可能会有相当差别，其中专业实验可能更是如此。

但是就同一类别（如机械系）的系科而言，基本性质的基础实验，恐怕也仅是大同小异。

据知，不少高等院校的机械类或近机类专业，学生所从事的这类机械实验，大都分散在金工、机械原理、机械零件等教研室或实验室进行，所用的实验指导书等资料尚没有统一格式和要求，因而印刷工作量大，费用贵。

《机械工程实验》一书将力求各实验中的一些共性问题，如数据处理与误差分析，常用的测试仪器和方法，实验报告书的撰写技术以及应包括的内容、指导书的格式等等作一系统的叙述和指导，这对培养学生独立的实验工作能力是有利的。

本书包括四部分内容，一、二、三部分分别由姚交兴、马骥、施高义执笔。第四部分内容取材于浙江大学部分机械工程基础实验，分别由宋炳华、毛节用、赵英才、章维明、张为鄂、鲍秀琴、尚礼、朱有华、姚交兴、马骥、施高义等同志整理编写。高承煜、石永刚、陈长赓、周桂如同志分别审阅有关内容，全书最后由唐金松同志审校。

本书可作大专院校机械类和近机类学生的实验教学用书以及有关教师和科技人员的参考用书。

全书错误或不妥之处敬请读者指正。

编　者

目　录

前　言

第一部分　实验数据的误差分析及处理

一、测量与误差……1

二、精度……3

三、随机误差……4

四、系统误差……14

五、过失误差……19

六、实验数据处理的一般步骤……22

第二部分　机械量测试常用仪器的工作原理

一、机械量的一般概念……24

二、常用测量方法分类……24

三、几种常用的传感器简介……25

四、常用的显示及记录设备……34

第三部分　实验报告的撰写

一、概述……35

二、学生实验报告的编写……35

三、技术报告的编写……37

四、数据表达与处理时应注意事项……40

第四部分　实验指示书

实验一　金相试样的制备……43

实验二　钢的显微分析……46

实验三　碳钢的热处理……48

实验四　钢的淬透性测定……50

实验五　铸铁的显微分析……53

实验六　金属的塑性变形与再结晶……54

实验七　机构运动简图的测绘……57

实验八　渐开线齿轮范成原理……59

实验九　刚性回转体的静平衡……62

实验十　刚性回转体的动平衡……63

实验十一　封闭功率流式齿轮效率的测定……66

实验十二　减速器传递功率和效率的测定……71

实验十三　滑动轴承实验……75

实验十四　滑动轴承 pV 值测定……79

实验十五　润滑条件下摩擦系数的测定……83

附录一　金相显微镜的使用……………………………………………………………87
附录二　硬度及硬度机的使用……………………………………………………………94
附录三　直流电机的可控硅无级调速……………………………………………………99

第一部分　实验数据的误差分析及处理

在这一部分，我们首先介绍测量、误差、精度的基本概念，以及它们的性质和分类。然后着重讨论实验数据的误差分析及其基本处理方法。

一、测量与误差

这里先对测量与误差的某些基本名词术语和概念作一简要介绍。

(一)测量

要进行实验，就必须进行测量。著名科学家门捷列夫说："科学始于测量"。这充分说明了测量工作对科学实验的重要性。科学实验一向不满足于定性描述各种现象，总是力求测定实验参数之间的数量关系。只有这样，才能深刻地认识物质运动的规律性。

测量，通常是指将被测的量与所选定的参考标准进行比较并确定其比值的过程。例如，通常的长度测量，就是将被测的长度与直尺或量块作比较。有时，事前要对测量仪器进行标定，其目的就是为了提供进行比较的参考标准。

测量方法，一般可分为直接测量和间接测量两种。

1. 直接测量

将被测的量直接与测量单位进行比较，并从测量仪表或量具上直接读出测量结果的方法称为直接测量。例如用转速表测量旋转轴的转速，用水银温度计测量润滑油的温度，用压力表测量滑动轴承的油膜压力等都是直接测量的例子。这种测量方法在工程实验中较为常见，其特点是操作过程简单、方便，显示测量结果迅速、直观。

2. 间接测量

必须先测定与被测量有关的其它物理量，然后按其函数关系计算出被测量的方法称为间接测量。例如，要测量减速器的输出功率 P，可以先测得输出轴的扭矩 T (N-mm)和转速 n(rpm)，然后按下式计算而得：

$$P=\frac{Tn}{9.55\times10^{6}}(\mathrm{kW})$$

这种测量方法操作过程有时比较复杂，其精度取决于各单项测量所用的仪器精度。

此外，根据测量条件是否变化，测量方法又有等精度测量和不等精度测量之分。测量过程中所使用的仪器、方法、进行测量的人员及测量次数等条件都完全相同的重复测量称为等精度测量。在上述测量条件部分或全部改变的情况下所进行的测量称为不等精度测量。

(二)误差

一个完整的测量结果，通常应包括被测量的量值和它的误差两部分。严格地讲，无论测量方法多么完善，测量仪器多么精密，测量人员多么细心，都无法测得被测量的真值。只要进行测量，就必然伴有误差。这种误差存在的必然性和普遍性早已为实践所证实。据此，得出下述重要的误差公理：实验结果都具有误差，误差自始至终存在于一切科学实验的过程之

中。我们的任务是通过对误差的研究，根据实际需要和可能，尽量减小或消除误差，以获得最接近于真值的测量结果。

科学实验中对误差常常有不同的分类法。

1. 按误差的表示方法不同来分

(1) 绝对误差

被测量的实际测量值与它的真值之差称为绝对误差，通常简称误差。

即
$$\Delta x = x - A_0 \tag{1-1}$$

式中 Δx——绝对误差；

x——实际测量值；

A_0——被测量的真值。

由于绝对误差可能是正值或负值，因此式(1-1)可以改写成

$$A_0 = x \pm \Delta x \tag{1-2}$$

(2) 相对误差

绝对误差与被测量的真值之比值，并以百分数表示的误差称为相对误差。

即
$$e = \frac{\Delta x}{A_0} \times 100\% \tag{1-3}$$

式中 e——相对误差。

因为在一般情况下，$|\Delta x| \ll |A_0|$，且测量值 x 与真值 A_0 非常接近，因此也可以近似用绝对误差与实际测量值之比值作为相对误差。

即
$$e \approx \frac{\Delta x}{x} \times 100\% \tag{1-4}$$

例如用机械式转速表测得减速器输出轴的转速为 1010 rpm，用更精密的光电数字测速仪测得该转速为 1000rpm。因为后者的精度高，故可以认为 1000rpm 接近真值，于是机械式转速表测量值的绝对误差为：

$$\Delta x = 1010 - 1000 = 10\text{rpm}$$

而相对误差为：

$$e = \frac{10}{1000} \approx \frac{10}{1010} \approx 1\%$$

必须说明的是，在这一部分我们假设被测量的值是恒定不变的，测得值的所有变化都是由测量误差引起的。实际情况可能并不是这样，但为使讨论问题简化，仍作如上假设。

2. 按照误差的特性分

(1) 系统误差

在相同条件下多次重复测量同一量时，误差值和符号呈现明显规律性变化，我们称这类误差为系统误差。

通常，测量设备、测量方法、测量人员和测量环境等方面的差异和变化，都是造成系统误差的原因。因此，可以用实验或分析的方法找出其变化规律，通过改善测量条件，以尽量减小或消除它对测量结果的影响。

(2) 随机误差

在一定条件下多次重复测量同一量时，误差值和符号无规律地变化的误差称为随机误差。

在测量过程中，由于误差呈现随机变化，所以对于某一次具体的测量，事先无法预测误差的大小和符号。但是，对于多次等精度测量，其结果一般服从统计规律。因此，我们可以用概率论和数理统计的方法来分析处理测量所得的数据，以获得最可靠的测量结果。

(3) 过失误差

明显歪曲测量结果的误差称为过失误差。

产生过失误差的原因多半是某些偶然因素，例如，由于测量人员测错、读错、记错、算错以及在操作过程中的其它失误而造成的误差。含有过失误差的数值称为异常值。异常值一般要予以剔除。

在误差分析中，系统误差和随机误差的概念，以及它们之间的关系可以进一步用图1-1来说明。图中的钟形曲线是测得值的概率密度分布曲线。这里，假设测得值是服从正态分布的随机变量X。在数理统计中，把随机变量X可能取值的全体称为总体，每一个可能值称为个体，包括n个个体的一组数值称为一组样本观察值。并用符号μ和$\bar{x}$分别表示总体均值和样本均值(详见第三节)。从图1-1可见，由于误差的存在，测得值x_i与真值A_0不能重合。即根据误差的必然性原理，通常无法测得真值A_0。因此，按概率统计理论，可用测量值的总体均值μ或有限次测量的算术平均值$\bar{x}$来近似代替真值A_0。并把测得值x_i与真值A_0之差称为真误差。把测得值x_i与总体均值μ之差称为随机误差。图1-1表明，真误差等于随机误差与系统误差的代数和。当测量中不存在系统误差时，A_0与μ重合，此时可视μ为真值，随机误差即为真误差。而把测得值与算术平均值之差称为残余误差，简称残差。即

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

式中　v_i——残差。

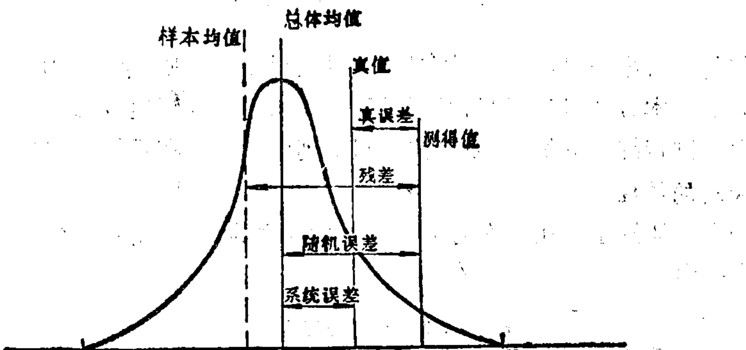


图 1-1　误差的定义及相互关系

二、精　　度

精度通常是指测量结果与真值的接近程度。在数量上精度可用相对误差来表示，如相对误差为1%，则可笼统称其精度为10^{-2}。

精度与误差大小相对应，因此，精度相应地分为：

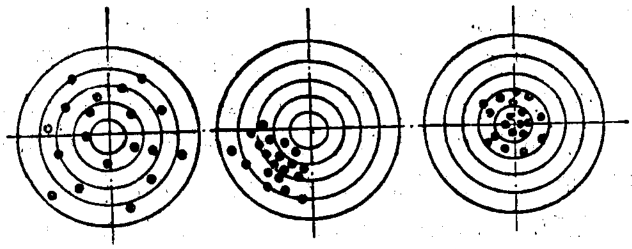
1. *精密度*　反映由于随机误差的影响，测得值偏离真值的程度。表示测量值的分散性

和重复性。一批比较集中的数据，其随机误差小，精密度高。

2. *准确度* 反映由于系统误差的影响，测得值偏离真值的程度。系统误差大，表示测量结果对其真值的偏差大，准确度就低。

3. *精确度* 反映由于随机误差和系统误差的综合影响，测得值偏离真值的程度。表示只有系统误差和随机误差都很小，即准确度和精密度都高的测量，才能获得精确度或精度高的测量结果。

下面以打靶为例，进一步说明精密度、准确度和精确度的含义及其相互关系。如图 1-2 所示，靶心比作测量的真值，每个弹痕比作每次测量的测量值。图(*a*)中，弹痕较均匀地分布在靶心周围，但弹痕的整体比较分散，表示系统误差较小，随机误差较大，即准确度较高，精密度较低。图(*b*)则相反，表示精密度较高，准确度较低。图(*c*)表示系统误差和随机误差均较小，即准确度和精密度都比较高，所以其结果的精度很高。



(a) (b) (c)

图 1-2 精度比较

三、随机误差

以下几节将着重讨论随机误差、系统误差及过失误差的性质，产生的原因和规律，减小或消除这些误差的基本方法，以及如何对测量结果作出适当的评定等问题。

在对随机误差进行统计分析时，我们假设测量列中已不存在系统误差和过失误差。

(一)随机误差的特性

我们先看一个具体例子。在一次测定摩擦系数的实验中，重复测量摩擦系数共 162 次，其结果列于表 1-1 中。

表 1-1 摩擦系数的测量结果

摩擦系数范围	在此范围内的读数数目	摩擦系数范围	在此范围内的读数数目
0.080 0—0.082 5	1	0.105 0—0.107 5	23
0.082 5—0.085 0	1	0.107 5—0.110 0	15
0.085 0—0.087 5	0	0.110 0—0.112 5	7
0.087 5—0.090 0	2	0.112 5—0.115 0	12
0.090 0—0.092 5	2	0.115 0—0.117 5	8
0.092 5—0.095 0	4	0.117 5—0.120 0	8
0.095 0—0.097 5	9	0.120 0—0.122 5	2
0.097 5—0.100 0	22	0.122 5—0.125 0	2
0.100 0—0.102 5	18	0.125 0—0.127 5	1
0.102 5—0.105 0	25		和 = 162

为了便于讨论，我们作出以摩擦系数 x_i 为横坐标，每一读数的数目 n（频数）为纵坐标的统计直方图（见图 1-3）。

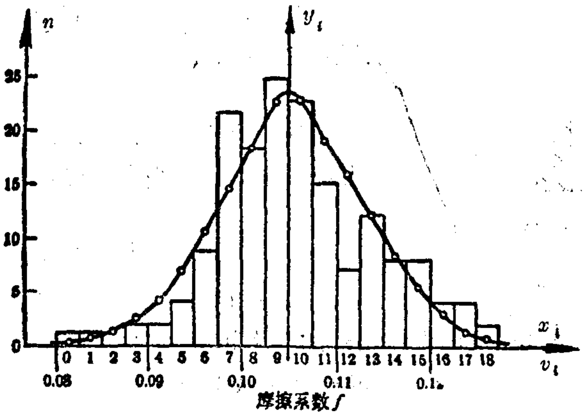


图 1-3 摩擦系数的统计直方图

由图 1-3 可见，测量的全部结果具有明显的统计规律性。实践证明，这种规律性也就是测量值所含的随机误差的特性。如若以残差 v_i 为横坐标，v_i 出现的概率密度 y_i 为纵坐标，并将坐标原点移到算术平均值 $\bar{x}=0.105$ 处，则图中所示的连续的对称曲线，即为误差的正态分布曲线，也称高斯（Gauss）分布曲线。这就表明，随机误差的出现是遵循正态分布规律的。

以上我们通过实验方法，由样本观察值得到了经验正态分布曲线。在数学上，可以用解析法推导出理论正态分布曲线的解析方程式，它的具体内容可用数学语言表达为：

当在一定条件下，对某个被测量 x（真值为 μ）进行 n 次等精度重复测量时，得到一系列结果 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$，则各个测得值 x_i 出现的概率密度函数 $p(x)$ 为正态分布函数。即

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-5}$$

式中 e ——自然对数的底，$e\approx 2.71828\cdots$；

σ ——标准误差（详见后）；

$(x-\mu)$ ——真误差。

令 $\delta=x-\mu$

则式(1-5)可改写为：

$$p(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-6}$$

概率密度 $p(x)$ 或 $p(\delta)$ 的图解曲线如图 1-4 所示。图中阴影部分的面积，等于测得值出现在区间 $[x_a, x_b]$ 内的概率，也就是真误差 δ 之值出现在区间 $[x_a, x_b]$ 内的概率。其值为：

$$P\{x_a<x\leqslant x_b\}=\int_{x_a}^{x_b}p(x)dx$$

$$=P\{a<\delta\leqslant b\}=\int_a^b p(\delta)d\delta \tag{1-7}$$

显然，下式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\delta)d\delta = 1 \tag{1-8}$$

恒成立，因为x或δ之值落在区间$[-\infty, +\infty]$内是必然事件。

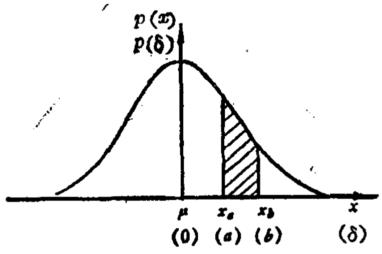


图 1-4　正态分布曲线

由式(1-6)，图 1-3 和图 1-4 可得出随机误差的下列重要特性。

1. 单峰性

绝对值小的误差出现的概率大，绝对值大的误差出现的概率小。当$\delta=0$时，$p(\delta)$有最大值：

$$p(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

2. 对称性

绝对值相等，正负号相反的误差出现的概率相等。即

$$p(-\delta)=p(+\delta)$$

3. 有界性

绝对值很大的误差出现的概率近于零，即随机误差δ出现在一个有限的区间内。

4. 抵偿性

随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值趋于零。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i=0$$

这就是增加测量次数可以提高测量精度的理由。

(二)算术平均值与标准误差

由上面的讨论可知，当测量中仅有随机误差时，对被测量进行等精度重复测量所得的观察值x的出现服从正态分布，用符号表示为：

$$x\sim N(\mu,\sigma^2)$$

上式中的μ和σ是用来表征服从正态分布随机变量特征的两个参数。

1. 算术平均值

在实际测量中，由于误差存在的必然性，我们无法测得真值的大小。而只能根据测得的一组样本观察值来对真值μ进行推断或估计。

设对同一量进行n次等精度测量，所得一列结果为$x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$，则有

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\end{aligned} \tag{1-9}$$

式中$\bar{x}$——算术平均值。

根据概率论的大数定律，当测量次数$n\to\infty$时，算术平均值$\bar{x}$依概率收敛于真值μ。即

$$\begin{aligned}E(\bar{x})&=E\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}[E(x_1)+E(x_2)+\cdots+E(x_i)+\cdots+E(x_n)]\\&=E(x)\\&=\mu\end{aligned} \tag{1-10}$$

上式证明算术平均值 $\bar{x}$ 的数学期望 $E(\bar{x})$ 恰好就是真值 μ。按照无偏估计量的定义，$\bar{x}$ 是真值 μ 的一个无偏估计量。这就是通常用算术平均值作为测量结果的理论依据。数学上称为算术平均值原理。由于 $\bar{x}$ 对应着坐标轴上的一个点，因此，又把求解 $\bar{x}$ 的值称为参数的点估计。

例 1-1 根据表 1-1 所提供的数据，试求 162 次测量的算术平均值。

解：

取表中每一行摩擦系数范围的中值作为观察值 x_i（如 x_1 为第一行 0.0800—0.0825 的中值 0.08125），代入式(1-9)

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=\frac{1}{162}(0.08125+0.08375+\cdots+0.12625)$$

$$=\frac{17.07}{162}=0.10537$$

在要求不高，不需要指出误差时，可以直接用测量数据的算术平均值作为测量结果。

2. 标准误差

以算术平均值作为测量结果是最可靠，最可信赖的。然而，仅由这一项指标还不足以充分描述随机变量的分布规律。例如由表 1-2 中两组实验数据可见，

表 1-2 减速器输出轴转速测量结果

组　别	转　速 (rpm)						算术平均值 (rpm)
1	995	1000	1015	980	1010	1000	1000
2	1025	940	995	1050	1005	985	1000

虽然两组数据的算术平均值都是 1000rpm，但是第一组六个数据的分布范围是 [980, 1015]，第二组六个数据的分布范围是[940, 1050]。这表明两组结果的分散程度并不相同。因此，除了算术平均值以外，还需要有一个表征分散性的指标，用它来描述诸测量结果对真值 μ 的离散程度，只有这样，才能更确切地描述测量值或随机误差的分布规律。在误差分析中，通常用标准误差 σ 作为表征分散性的指标。按概率论中标准差的定义，测量结果的标准误差为：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2}{n}}$$

$$=\sqrt{\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{n}} \tag{1-11}$$

图 1-5 所示为算术平均值 $\bar{x}$ 相同，但标准误差 σ 大小不同（σ 值分别为 0.5 和 1.0）的正态分布曲线。从图中可见，$\sigma=0.5$ 所对应的曲线比较陡峭，分布范围较小；$\sigma=1.0$ 所对应的曲线比较平缓，分布范围较大。图 1-5 所示的例子，充分说明 σ 值的大小能够表征全部测量结果对真值 μ 的离散程度。即 σ 值小，测量值的分散性也小，测量的精密度就高；σ 值大，测量值的分散性也大，测量的精密度就低。因此，在等精度重复测量中，我们用标准误

差 σ 作为评价测量结果的精密度高低的尺度是恰当的。

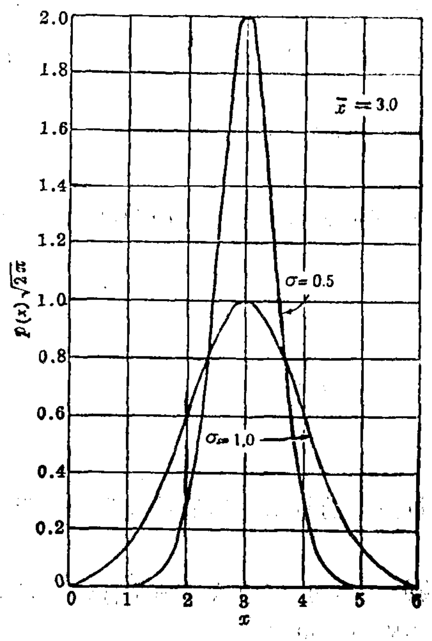


图 1-5 不同 σ 值的正态分布曲线

由于实际上测量次数 n 总是有限的，而且也无法确定式 (1-11) 中真值 μ 的大小，也就是说，按定义式(1-11)仍无法解得 σ 值。虽然如此，对于一列等精度重复测量的结果，我们却能求得它的算术平均值 $\bar{x}$，即能够知道 $v_i=x_i-\bar{x}$ 之值。那么是否可以通过已知的残差 v_i 之值来求解 σ 值呢?数学上已经证明：

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2} \tag{1-12}$$

式(1-12)就是著名的贝塞尔(Bessel)公式，根据它就可以由残差方便地计算出单次测量的标准误差 σ。当 n 为有限次时，贝塞尔公式的计算结果，只是标准误差 σ 的一个估计量，为区别于 σ，改用符号 S 表示，即

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2} \tag{1-13}$$

式中 S——有限次测量时标准误差 σ 的估计量。

除贝塞尔公式外，还有计算标准误差的其它各种方法。这里不再一一列举，有兴趣的读者可以参考有关书籍。

例 1-2 表 1-3 给出了对从同一批产品中抽样的 69 根保险丝进行实验的结果。试求这 69 次测量的算术平均值及其标准误差的估计量 S。

表 1-3 69 根保险丝的实验结果

保险丝的熔断电流 (mA)	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101
在此电流上熔断保险丝的数目 ($n=69$)	3	4	9	10	13	10	8	8	2	2

解:

(1) 按式(1-9)求 69 次测量的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{69}[3(92)+4(93)+9(94)+10(95)+13(96)+10(97)+8(98)+8(99)+2(100)+2(101)]=96.23\text{mA}$$

(2) 按贝塞尔公式计算标准误差的估计量

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$S^2=\frac{1}{68}[3(-4.23)^2+4(-3.23)^2+9(-2.23)^2+10(-1.23)^2+13(-0.23)^2+10(0.77)^2+8(1.77)^2+8(2.77)^2+2(3.77)^2+2(4.77)^2]=4.74$$

所以　　　　$S\approx 2.18\mathrm{mA}$

（三）测量结果的表示

综上所述，对于一列由 n 次等精度重复测量所获得的测量值 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$，可以根据式(1-9)和式(1-13)分别求得它们的算术平均值 $\bar{x}$ 和标准误差的无偏估计量 s。其中 $\bar{x}$ 为真值 μ 的最佳估计量，s 是评价测量结果的精密度高低的尺度。由此可见，用算术平均值和标准误差的统计量 S 来表示测量结果，能确切地描述出测量值 x 或随机误差 δ 的分布规律。

1. 按正态分布确定的极限误差表示测量结果

如前所述，一个完整的测量结果，通常应包括被测量的量值和它的误差两部分。据此，单次测量的测量结果应表示为：

$$x\pm k\sigma \tag{1-14}$$

上式中的 x 即为单次测量的测量值，而 $\pm k\sigma$ 就是测量值 x 的误差界限，在误差分析中把它称为单次测量的不确定度。因为一般情况下要用测量的极限误差表示不确定度，所以下面先按正态分布来确定单次测量值的极限误差。

由式(1-6)、式(1-7)和式(1-8)可知：

$$\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}d\delta=1 \tag{1-15}$$

一般情况下，随机误差出现在区间[0, δ]内的概率为

$$P(0\leqslant\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\delta}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}d\delta \tag{1-16}$$

令　$K=\dfrac{\delta}{\sigma}$，并把它代入式(1-15)，得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{k^2}{2}}dk=1$$

于是，随机误差出现在区间[0, δ]内的概率为：

$$\phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{k}e^{-\frac{k^2}{2}}dk \tag{1-17}$$

通常称 $\phi(k)$ 为拉普拉斯函数。在工程计算中，不同 k 所对应的 $\phi(k)$ 值可直接在正态分布积分表中查得。表 1-4 列出了正态分布积分表中的部分数据，以供查用。

由表 1-4 和图 1-6 可知，对于服从正态分布的随机误差 $\delta(\delta=k\sigma)$，当 $\delta=\sigma(k=1.0)$ 时，落在区间 $[-\sigma,+\sigma]$ 内的概率 P 约为 68.0%；当 $\delta=2\sigma(k=2.0)$ 时，落在区间 $[-2\sigma,+2\sigma]$ 内的概率 P 约为 95.4%；特别是当 $\delta=3\sigma(k=3.0)$ 时，落在区间 $[-3\sigma,+3\sigma]$ 内的概率 P 约为 99.73%。也就是说，此时在大约 370 次测量中，只有一次的误差落在区间 $[-3\sigma,+3\sigma]$ 以外，其概率仅为 $1-0.9973=0.27\%$。显然这是一个很小的概率。根据实际判断原理，小概率事件要在一次实验中出现是不可能的。换言之，误差出现在区间 $[-3\sigma,+3\sigma]$ 以内可以认为是必然的事。因此，在一般情况下，就把 $\pm3\sigma$ 作为单次测量的极限误差，并把它作为单次测量随机误差的分布界限。

即　　　　$\delta_{1\lim x}=\pm3\sigma$

式中　$\delta_{1\lim x}$——单次测量的极限误差。

表 1-4 正态分布积分表 $\phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^k e^{-\frac{k^2}{2}}dk$

k	$\phi(k)$	k	$\phi(k)$	k	$\phi(k)$	k	$\phi(k)$
0.00	0.0000	0.75	0.2734	1.50	0.4332	2.50	0.4938
0.05	0.0199	0.80	0.2881	1.55	0.4394	2.60	0.4953
0.10	0.0398	0.85	0.3023	1.60	0.4452	2.70	0.4965
0.15	0.0596	0.90	0.3159	1.65	0.4505	2.80	0.4974
0.20	0.0793	0.95	0.3289	1.70	0.4554	2.90	0.4981
0.25	0.0987	1.00	0.3413	1.75	0.4599	3.00	0.49865
0.30	0.1179	1.05	0.3531	1.80	0.4641	3.20	0.49931
0.35	0.1368	1.10	0.3643	1.85	0.4678	3.40	0.49966
0.40	0.1554	1.15	0.3744	1.90	0.4713	3.60	0.499841
0.45	0.1736	1.20	0.3849	1.95	0.4744	3.80	0.499928
0.50	0.1915	1.25	0.3949	2.00	0.4772	4.00	0.499968
0.55	0.2088	1.30	0.4032	2.10	0.4821	4.50	0.499997
0.60	0.2257	1.35	0.4115	2.20	0.4861	5.00	0.49999997
0.65	0.2422	1.40	0.4192	2.30	0.4893		
0.70	0.2580	1.45	0.4265	2.40	0.4918		

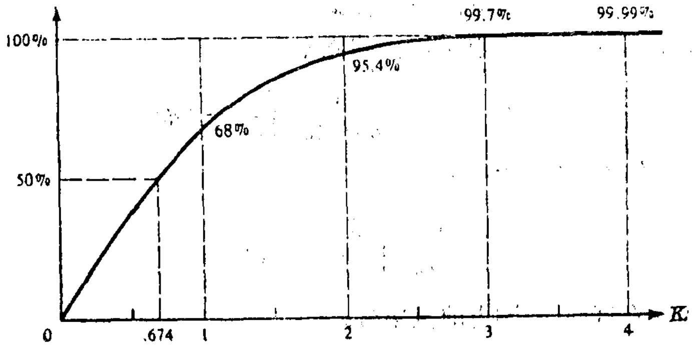


图 1-6 误差分布范围

于是单次测量的结果可表示为：

$$x\pm\delta_{\lim}x=x\pm3\sigma \tag{1-18}$$

按不同的要求，也取 $\pm2\sigma$ 或 $\pm\sigma$ 作为单次测量的极限误差。

由于实际测量中，测量次数 n 总是有限的，故式(1-18)应为：

$$x\pm\delta_{\lim}x=x\pm3S \tag{1-19}$$

其中 S 为有限次测量时标准误差 σ 的估计量。

在多次测量中，用算术平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果，虽然这是最可靠、最可信赖的，但是，当测量次数 n 为有限时，$\bar{x}$ 本身也是一个随机变量，即进行 m 组（每组 n 次）重复测量，所得的 m 个算术平均值 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots\cdots \bar{x}_m$ 本身也都互不相等。因此，有必要进一步分析算术平均值 $\bar{x}$ 的分布规律。

按前所述，当测量中只含随机误差时，由等精度重复测量所得的观察值 x 服从正态分布。而由概率论可知，服从正态分布的随机变量之和仍服从正态分布。由此可得，算术平均

值 $\bar{x}$ 也服从正态分布。于是我们就可以效仿上一节的分析方法，用算术平均值的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 来表征 $\bar{x}$ 对真值 μ 的分散性。根据概论中方差的性质，可以证明：

$$\begin{aligned} D(\bar{x}) &= D\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2[D(x_1)+D(x_2)+\cdots+D(x_n)] \\ &= \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot D(x) \\ &= \frac{D(x)}{n} \end{aligned}$$

因为

$$D(x)=\sigma^2,\ D(\bar{x})=\sigma_{\bar{x}}^2$$

所以

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1-20}$$

由上式可知，算术平均值 $\bar{x}$ 的分布曲线仍然是以总体平均值 μ 为中心的正态分布曲线。但其分布范围比单次测量值的分布范围大为减小(图 1-7)。由此可见，用 $\bar{x}$ 作为测量结果时，能大大减小随机误差的影响，从而提高测量精度。于是，多次测量的测量结果就表示为：

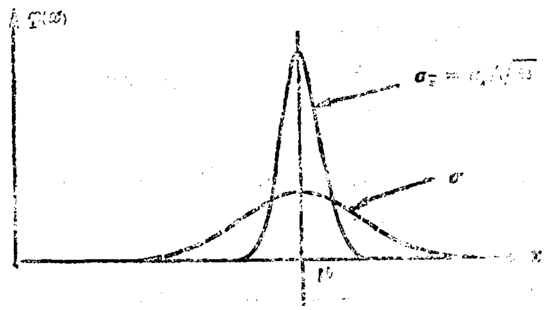


图 1-7 $\bar{x}$ 的正态分布曲线

$$\bar{x}\pm 3\sigma_{\bar{x}}=\bar{x}\pm\frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1-21}$$

在有限次测量时，式(1-21)应为：

$$\bar{x}\pm 3S_{\bar{x}}=\bar{x}\pm\frac{3S}{\sqrt{n}} \tag{1-22}$$

式中 $S_{\bar{x}}$——算术平均值的标准误差的估计量。

显然，当增加测量次数 n 时，$\sigma_{\bar{x}}$ 将下降，测量结果的精度就提高。但应注意的是，由于 $\sigma_{\bar{x}}$ 与 $\sqrt{n}$ 成反比，因此，当测量次数增加到一定程度以后，$\sigma_{\bar{x}}$ 的减小速度渐趋缓慢(图 1-8)，提高精度的效果也就逐渐变小，而此时的测量工作量却大大增加。权衡利弊，一般取 $n=10$ 次已足够。

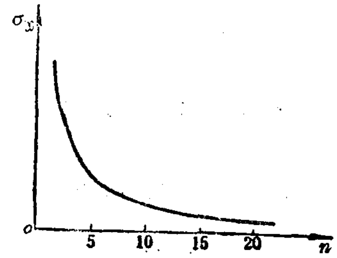


图 1-8 $\sigma_{\bar{x}}$—n 关系曲线

例 1-3 用千分尺测量某一主轴轴径 10 次，所得数据依次如下(单位，mm)：

20.62，20.66，20.67，20.62，20.63，

20.69，20.66，20.61，20.64，20.70，