科學圖書大庫

複變數函數論

(增訂本)

編著者 賴漢卿

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

複變數函數論

（增訂本）

編著者 賴漢卿

徐氏基金會出版

9

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鋆　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十五年六月十九日三版

複變數函數論
(增訂本)

基本定價　2.80

編著者　賴漢卿　國立清華大學數學系教授

(63)局版臺業字第0116號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號 電話7813686 7815250號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

目　錄

第一章　複數函數

第二章　複數微分

第三章　複數積分

第四章　初等函數

第五章　Möbius 變換

第六章　Laurent 展開式與無限函數例

第七章　奇異點與留數定理

第八章　留數的應用與定積分的計算

第九章　有理型函數與全函數的表現定理

第十章 保角寫像與解析延拓

第十一章 調和函數

第一章　複數函數

1.1.　複數

函數論是研究複數變數的複數值函數。我們研究這種函數主要的對象是在某種意義下可微分的函數通常叫做解析函數。爲建立這種解析函數的理論基礎，我們就先來介紹複數系。複數可以看作平面上的向量。

先從二次方程式

$$x^2+1=0 \tag{1.1}$$

的解來說，我們知它沒有實數解（根），因此我們就考慮實數系以外的數系，看是否有一種數能滿足（1.1），或更一般的來求代數方程式

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 x+a_0=0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1.2}$$

的解，其中$a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots, a_0$ 爲任意實數。爲此我們就引進一新數稱爲"虛數單位"$i=\sqrt{-1}$，做爲（1.1）的一解，然後考慮形如

$$a+b_i \text{ 或 } a+ib \tag{1.3}$$

的數，式中a,b表任意實數，這種數我們稱爲**複數**。其代數運算規定作以x爲未知數的二項式$a+bx$之運算，且滿足

$$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,\quad i^5=i,\ \cdots\cdots \tag{1.4}$$

當我們完成這個手續後（1.1）的解就是i 與$-i$ 。在（1.3）中如置$b=0$，則我們所說的複數就成爲實數，所以實數系R，實際上是複數系$C=\{a+b_i \mid a,b\in R\}$的部分集合。

在（1.2）中x 可取複數，則即使$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ 也是複數，方程式（1.2）恒有解存在，這個結果就是所謂代數的**基本定理**，我們將在後面討論。

下面我們來說明爲什麼複數可以看作平面上的向量。也就是複數與平面上的點有一對一對應關係。

取平面的直交坐標，其橫坐標與縱坐標分別令爲x與y，平面上的點z以實數x與y的序對(x,y)表示，則序對(x,y)有下列關係：

二序對 $z_1=(x_1, y_1)$ 與 $z_2=(x_2, y_2)$ **相等**之意，我們定義做 $x_1=x_2$ 與 $y_1=y_2$, 並記作 $z_1=z_2$ 。又其**和**、**積**定義作

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)\equiv(x_1+x_2, y_1+y_2) \tag{1.5}$$

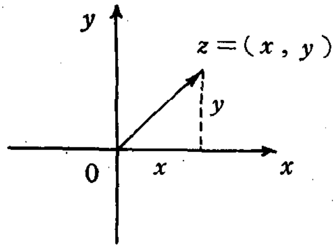
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2)\equiv(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2) \tag{1.6}$$

顯然 $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$.

從 (1.5) 當 $z_1=(x_1, y_1)$, $z_2=(x_2, y_2)$ 已知，且滿足方程式

$$z_1+z=z_2$$

時，其解只有一個 $z=(x, y)=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ ，這個解稱爲 z_2 與 z_1 的差，並記作 z_2-z_1 . 又當 $z_1=(x_1, y_1)\neq(0.0)$ 時，滿足方程式



$$z_1z=z_2$$

的解 z 也只有一個 (x, y) ，那就是

$$x=\frac{x_2x_1+y_2y_1}{x_1^2+y_1^2}, \qquad y=\frac{y_2x_1-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}$$

這個解 z 稱爲 z_2 與 z_1 的商，並表示作 $z=\dfrac{z_2}{z_1}$ 。於是序對的四則運算就完全決定了。平面上的點有了上述的相等關係與四則運算後，這種點也就可看作一種數，我們就稱平面上的這些點（序對）爲**複數**，此平面稱爲**複數平面**。

再考慮序對的特別形 $(a, 0)$ 。顯然

$$(a, 0)\pm(b, 0)=(a\pm b, 0)$$
$$(a, 0)(b, 0)=(ab, 0)$$

且於 $b\neq 0$ 時，

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)}=\left(\frac{a}{b}, 0\right)$$

故對於實數 a, b 有 $a<b$ 時，定義 $(a, 0)<(b, 0)$ ，則實數全體與形如 $(a, 0)$ 的序對全體可視爲一體，在代數學上稱實數全體與序對 $(a, 0)$ 的全體對於**相等**，**大小**以及**四則運算**是同構的 (isomorphic) 。因此我們將 $(a, 0)$ 簡記作 a 。在此意義下，複數平面的橫坐標軸就稱爲**實軸**，與它對應的縱坐標軸就稱爲**虛軸**。爲簡單起見，序對 (0.1) 就用 i 表示，於是

$$i^2=(0.1)(0.1)=(-1, 0)=-1$$

即 i 滿足方程式 (1.1) ，是前面所說的虛數單位，又

$$(0,y)=(0,1)(y,0)=iy$$

所以

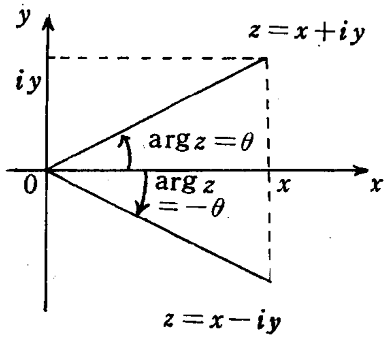
$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+iy \tag{1.7}$$

至此我們很清楚的看出複數平面上的點，即序對$z=(x,y)$可用虛數單位寫成（1.7）的形式，所以與（1.3）所稱的複數是一對一對應，此處x稱爲z的**實部**，y稱爲z的**虛部**，通常寫成$x=R_e z$，$y=I_m z$　。對於複數$z=x+iy$，我們稱複數$x-iy$爲z的**共軛複數**，而以$\bar{z}$表示。現在我們來看看$\bar{z}$的運算；對於兩複數z_1，z_2而言有下列的關係

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\qquad \overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\ (z_2\neq 0)。$$

複數$z=x+iy$的絕對值$|z|$用$(x^2+y^2)^{1/2}$來定，這是由原點$0=(0,0)$到點$z=(x,y)$的距離，若$z\neq 0$，則由原點向z的向量與實軸的正向所成的角稱爲複數z的**偏角**（或說**幅角**），用$\arg z$表示。假使忽視偏角的2π之整數倍，則每一個不爲0之複數的偏角可以唯一確定。複數0的偏角是沒定義的，以後我們寫$\arg z$表示z的偏角忽視2π的整數倍者，而$\mathrm{Arg}z=\arg z+2n\pi$（$n$爲任意整數）。顯然，



$$z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)\equiv\gamma e^{i\theta}$$

$$(|z|=\gamma,\ \arg z=\theta) \tag{1.8}$$

上式稱爲z的**極形式**。對於不爲0的兩複數$\alpha=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$。$\beta=\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)$，則有

$$\alpha\beta=\gamma\rho\left[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\right] \tag{1.9}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\rho}\left[\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)\right] \tag{1.10}$$

以及　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$，　$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$　。

如果不計2π的整數倍，則

$$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta,\quad \arg\frac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta$$

由（1.9）得de Moivre 公式如下

$$\alpha^n=[\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=\gamma^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \qquad (1.11)$$

式中 n 為整數，若 n 為負整數則 $\alpha^n=\dfrac{1}{\alpha^{-n}}$ 。

習題1-1

1. 求 $z^4=i$ 的根。
2. 對於二複數 α,β，若 $\alpha\beta=0$，則 α,β 兩者之一必為 0 。
3. 對於二複數 α,β，試證明
$$||\alpha|-|\beta||\leq|\alpha|+|\beta| \text{ 。}$$
4. 試證明 $|z|\equiv|x+iy|\geqslant(|x|+|y|)/\sqrt{2}$ ，並決定其等號成立時的條件。
5. 試證明 $|z+\omega|^2\equiv(z+\omega)\overline{(z+\omega)}$。
6. 設二複數為 z 與 ω ，則 $z\overline{\omega}+\overline{z}\omega$ 為實數。
7. 試證明方程式 $z^3+2z+4=0$ 的根不在單位圓內。
8. 設 $x_n+iy_n=(1-i\sqrt{3})^n$ （x_n,y_n 為實數；$n=0,\pm1\cdots\cdots$）則
$$x_n y_{n-1}-x_{n-1}y_n=4^{n-1}\sqrt{3}$$
9. 試證明 $z\ (\neq0)$，$-z$，$1/\overline{z}$，$-\dfrac{1}{\overline{z}}$，0 等五點共綫。
10. 試證明 $z\ (\neq0)$，$\dfrac{1}{z}$，$-\overline{z}$，$-\dfrac{1}{\overline{z}}$，1，-1 等六點共圓。

1.2. 複數數列與級數

考慮複數數列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots$，或寫成 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 。若有一複數 α 使 $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n-\alpha|=0$，則數列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在點 α 收斂，α 稱為 $\{\alpha_n\}$ 的極限（值）。此極限也常寫成

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha \quad \text{或} \quad \alpha_n\to\alpha\ (n\to\infty) \text{。}$$

嚴密的定義是：「給任意正數 ε 時，有一適當的正整數 $N=N(\varepsilon)$ 存在，而於 $n\geqslant N$ 時，恒使 $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$ 」。

極限在複數面的幾何意義可以用下面方式表示：以點 α 為中心，正數 γ

爲半徑之圓的內部以集合 $\{z\,||z-\alpha|<\gamma\}$ 表示時，其極限的意義就是給任意正數 ε，找一對應的正整數 N，於 $n\geqslant N$ 時，則 α_n 都在開圓板 $\{z\,||z-\alpha|<\varepsilon\}$ 內。

定理 1.1　數列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂的充要條件是 $R_e\,\alpha_n\to R_e\,\alpha$ 與 $I_m\,\alpha_n\to I_m\,\alpha$ $(n\to\infty)$。

定理 1.2　數列 $\{\alpha_n\}_{n=1}$ 收斂的充要條件是給任意一正數 ε，就有一正整數 $N=N(\varepsilon)$ 存在，當 $m,n>N$ 時，恒使

$$|\alpha_n-\alpha_m|<\varepsilon .$$

成立。(本定理叫做 Cauchy 的收斂判別定理)。

定理 1.3　(Bolzano-Weierstrass 定理) 有界的無限複數集合恒有(至少有一個)極限點。

點 z_0 稱爲某一集合 S 的**極限點** (Limit point) 就是 z_0 的任意 ε—近傍：$\{z\,||z-z_0|<\varepsilon\}$ 至少包含 S 的兩元素(卽兩點)。

以上三個定理的證明與實數數列的情形相同，就留給讀者自行驗證。

其次我們來談談用複數爲項的級數。考慮

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \tag{1.12}$$

令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k$　當數列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂時，級數 (1.12) 稱爲收斂，此時 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的極限 S 就稱爲級數 (1.12) 的和。並記作

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$$

由定理 1.2 得下列定理。

定理 1.4　級數 (1.12) 收斂的充要條件是任意給一正數 ε 時，存在一適當的正整數 $N=N(\varepsilon)$，若 $m>n\geqslant N$，則

$$|\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots\cdots+\alpha_m|<\varepsilon$$

系 1.4　若級數 (1.12) 收斂，則 $\alpha_n\to 0$ $(n\to\infty)$。

對於級數 (1.12) 的各項絕對值所成的級數

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots\cdots+|\alpha_n|+\cdots\cdots,$$

若爲收斂，就稱 (1.12) 爲**絕對收斂級數**。利用不等式

$$|\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots\cdots+\alpha_{n+p}|\leq|\alpha_{n+1}|+|\alpha_{n+2}|+\cdots\cdots+|\alpha_{n+p}|$$

則由定理1.4可證明下列定理

定理1.5 絕對收斂級數必為收斂（其逆未必是對的）。

習題1-2

1. 設 $\alpha_k=2^{-k}(1+i)$，試問級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 是否收斂？是否絕對收斂？

2. 設(1) $\alpha_k=\dfrac{1}{(1+i)^k}$，(2) $\alpha_k=i^k$，試問 $\sum_{k=1}\alpha_k$ 是否收斂？

3. 試問下列級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 是否收斂？如果是收斂則求其和。

(1) $\alpha_k=\dfrac{1}{(1+i)^{2k}}$，　(2) $\alpha_k=i^{2k}$，　(3) $\alpha_k=\dfrac{1}{k!}$

4. 求下列集合的導集合（Derive set）即其所有極限點的集合

(1) $\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\}$ $(m,n=1,2,\cdots\cdots)$，

(2) $\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\}$ $(m,n=1,2\cdots\cdots)$。

1.3 廣義的複數平面與立體射影

數學家喜歡做一般的情形，而不相信有例外。就像我們在實數系裏說「任何二次方程式，必有二根」，是不正確的，而數學家就想了個辦法使上述的一般話成為正確，那就是引進複數的理由，也就是將原來的數系擴大，使上述的命題在擴大的數系裏變成正確。又如「任意不同的二直綫相交於一點」的說法，對於歐幾里得幾何的二平行綫並不成立。但在射影幾何裏，引入一理想元素為無窮遠綫，則平行綫的例外情形就被消除。類似的理想元素在代數數論中，也被引進用來恢復分解的唯一性。像這樣的情形，在複變數函數論裏，用下列基本變換

$$\omega=\frac{1}{z} \tag{1.13}$$

做為廣義複數的工具。(1.13) 定義了1－1變換（寫像），但有二個例外的情形；那是 $z=0$ 時無像，且於 $w=0$ 時無前像。為了消除這兩種例外，使 (1.13) 恒是1－1變換，通常就在複數面上添加一理想元素，稱為無窮

遠點∞，以構成一新的平面叫做**廣義複數面**。於是變換（1.13）乃將廣義複數面 $1-1$ 映至該平面本身，而前述的兩種例外情形就不會發生了，蓋我們可將 $z=0\to w=\infty$ 而 $w=0$ 做為 $z=\infty$ 的像。$z=\infty$ 的近傍定義做集合 $\{z\,|\,|z|>R\}$，經（1.13）的變換，$z=\infty$ 的近傍乃映至 0 點的近傍 $\{w\,|\,|w|<\frac{1}{R}\}$。

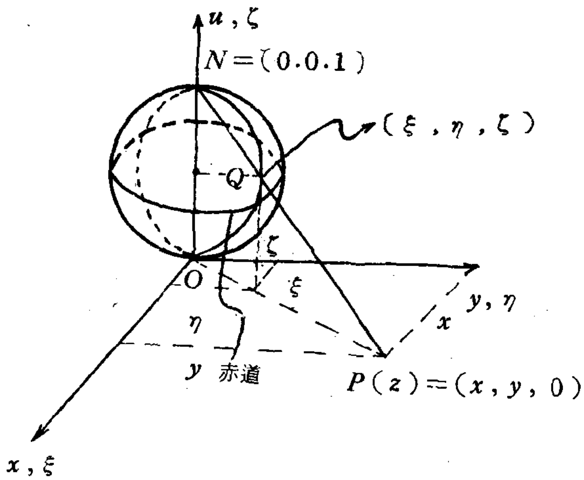
下面我們來考察複數在複數平面的幾何表現。用複數平面添加一元素∞（無窮遠點），即廣義的複數平面，使與一球面上的點一一對應，這種對應通常稱為**立體射影**（Stereographic projection）。立體射影有兩種更替的形式：

a 以球與平面相切。　　b 考慮平面通過球心。

我們所用的是(a)的情形；即用直徑為 1 的球面切於複數平面，切點令為原點（0.0.0）稱為**南極**，而過（0.0.0）之直徑的另一端（0.0.1）稱為**北極**，則球心坐標為（0.0.1/2）。在三度空間來說，就是以 xy 平面為複數平面，並考慮坐標為（$x.y.u$）之球面

$$x^2+y^2+u^2=u$$

的意思相同。此時在平面 $u=½$ 上的大圓稱為**赤道**，在赤道的北方稱為**北半球**，南方稱為**南半球**。



令$Q(\xi,\eta,\zeta)$爲球面上一點，Q經立體射影（以北極N爲射影中心，N與廣義複數平面上的元素∞對應）至複數平面上的點$P(z)=(x,y,0)$，則由平面幾何的性質得

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{\zeta-1}{-1}$$

且 $\xi^2+\eta^2+(\frac{1}{2}-\zeta)^2=\frac{1}{4}$， 令$\gamma^2=x^2+y^2=|z|$ 得

$$\xi=\frac{x}{1+\gamma^2}，\quad \eta=\frac{y}{1+\gamma^2}，\quad \zeta=\frac{r^2}{1+\gamma^2} \tag{1.15}$$

求上式的逆變換得

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}，\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}，\quad r^2=\frac{\zeta}{1-\zeta} \tag{1.16}$$

註 立體射影將赤道映成複數平面的單位圓，南半球映成單位圓內部，北半球映成單位圓外部（爲什麼？）。

下面我們來看看立體射影的一些性質。

定理1.6 在立體射影下，球面上的圓映到複數面上是圓或直線，其逆亦眞。

證明 球面上的圓是由一平面剖球面而得，該平面與所給的球面能相交的條件是平面

$Ax+By+Cu=D$ 滿足$A^2+B^2>4D(D-C)$者（爲什麼？）。

設(ξ,η,ζ)爲球面上一點，此點在已知平面上的條件是

$A\xi+B\eta+C\zeta=D$， 由（1.15）得

$$\frac{Ax}{1+r^2}+\frac{By}{1+r^2}+\frac{Cr^2}{1+r^2}=D$$

或 $$u=0,\ (C-D)(x^2+y^2)+Ax+By=D \tag{1.17}$$

上式若$C\neq D$則表示xy平面上的一圓，若$C=D$則表示複數平面上的一直線，此時在原球面上的圓是通過北極（0.0.1）點。

相反地，若$A^2+B^2>4D(D-C)$，考慮（1.17）它是直線或圓依C與D相等與否而定，由（1.16）的坐標變換知(ξ,η,ζ)在球面上滿足條件。

$$p:\ A\xi+B\eta+C\zeta=D$$

換句話說(ξ,η,ζ)是平面p與球面的交點，也就是球面上的一圓。

定理1.7 立體射影是一種保角的變換。

證明 兩曲綫在平面上的交角是由其交點所作各曲綫的切線而定，我們所要證明的是在**複數平面上兩曲線的交角**在立體射影下與**球面上對應的曲線的交角相等**。故當兩平面分別含兩切綫且通過北極（0.0.1）時（為什麼會過那一點？），則表示球面上有兩個圓分別在此兩平面上，且該兩圓除了相交於北極外，還交於另一點（ξ_0，η_0，ζ_0）此點就是在立體射影下與複數面上兩曲綫的交點對應，顯然球面上兩圓的交角與原曲綫（在複數面上）的交角相同。事實上也可依下面分析法證明；設該兩切綫在複數面上為

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3=0 & u=0 \\ b_1x+b_2y+b_3=0 & u=0 \end{cases} \tag{1.18}$$

經立體射影得球面上的兩圓，分別在平面

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3(1-u)=0 \\ b_1x+b_2y+b_3(1-u)=0 \end{cases}$$

上，此兩平面顯然通過（0.0.1），而兩切綫（在 $u=0$ 的複數平面上）所對應球面上的圓相交於北極的交角落在平面 $u=1$（與 $u=0$ 平行）上，其方程式為

$$\begin{cases} a_1x+a_2y=0, & u=1 \\ b_1x+b_2y=0 & u=1 \end{cases} \tag{1.19}$$

由（1.18）與（1.19）知有相等的交角；

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\left(m_1=-\frac{a_1}{a_2},\quad m_2=-\frac{b_1}{b_2}\right). \quad \text{Q.E.D.}$$

我們以 Z_1，Z_2 表球面 Σ 上兩點，其立體射影至複數平面 π 上所對應的兩點設為 z_1, z_2，連結 Z_1 與 Z_2，的弧長 $\alpha(Z_1, Z_2)$ 可用弦長 $d(Z_1, Z_2)$ 來迫近，蓋弦長與弧長的比值於 $z_1\to z_2$ 時為1，令

$$d(Z_1, Z_2)=X(z_1, z_2) \tag{1.20}$$

上式也稱為 z_1, z_2 的弦長，則

$$X(z_1, z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{(1+|z_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|z_2|^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.21}$$

證明上式可參考下圖知

$$\frac{d(Z_1, Z_2,)}{\alpha(Z_1, Z_2)}\doteqdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\to 1 \quad (z_2\to z_1)$$

又
$$d(N, z_1)=(1+|z_1|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$d(N, Z_1)=(\xi^2+\eta^2+(1-\zeta)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$=(1+|z_1|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

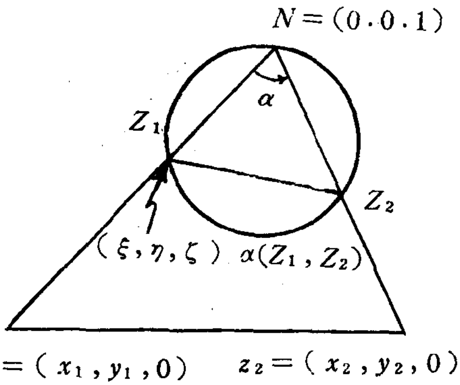
$d(N, z_2) = (1 + |z_2|^2)^{1/2}$

$d(N, Z_2) = (1 + |z_2|^2)^{-1/2}$

則 $\dfrac{d(N, Z_1)}{d(N, Z_2)} = \left(\dfrac{1 + |z_2|^2}{1 + |z_1|^2}\right)^{1/2}$

$= \dfrac{d(N, z_2)}{d(N, z_1)}$

$\Rightarrow \triangle N Z_1 Z_2 \sim \triangle N z_1 z_2$



所以

$$d(Z_1, Z_2) = \frac{d(z_1, z_2)\, d(N, Z_2)}{d(N, z_1)}$$

$$= \frac{|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1|^2)^{1/2}\,(1 + |z_2|^2)^{1/2}}$$

在上述過程中，我們是假設 $z_1 \neq \infty$，$z_2 \neq \infty$之下進行的，但由圖形知

$$X(z_1, \infty) = (1 + |z_1|^2)^{-1/2} = \lim_{z_2 \to \infty} X(z_1, z_2)$$

故z_1, z_2 中有一點爲∞時，公式 (1.20) 依然成立。

從 (1.21) 知 $X(z_1, z_2)$ 是一個距離函數 (metric)，所謂**距離函數**或**稱度量**就是滿足下面條件的函數：

(a) $X(z_1, z_2) \geqslant 0$， 且 $X(z_1, z_2) = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$

(b) $X(z_1, z_2) = X(z_2, z_1)$

(c) $X(z_1, z_2) \leq X(z_1, z_3) + X(z_3, z_2)$

前兩條件由 (1.21) 很容易就得到，(c)可由下列等式

$$(a - b)(1 + \bar{c}c) = (a - c)(1 + \bar{c}b) + (c - b)(1 + \bar{c}a)$$

導出，我們取上式兩邊的絕對值得

$$|a - b|(1 + |c|^2) \leq |a - c||1 + \bar{c}b| + |c - b||1 + \bar{c}a|$$

$$\leq |a - c|(1 + |c|^2)^{1/2}(1 + |b|^2)^{1/2} + |c - b|(1 + |c|^2)^{1/2}(1 + |a|^2)^{1/2}$$

上面最後不等式是利用不等式 $(1 + zw)(1 + \overline{zw}) \leq (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$ 得到的。

故 $|a - b|(1 + |c|^2)^{1/2} \leq |a - c|(1 + |b|^2)^{1/2} + |c - b|(1 + |a|^2)^{1/2}$

即(c)成立。

對於度量 $X(z_1, z_2)$ 而言，廣義的**複數**平面是**一完備的度量空間**；這個意思就是對任何 Cauchy 數列都在此空間收斂，且 Bolzano-Weierstrass

定理也成立。更進一層的，在此度量下廣義複數面是有界的（bounded）蓋因 $\max X(z_1, z_2)=1$，不但如此，它還是**全有界**（totally bounded）空間；即任給 $\epsilon>0$ 必存在有限個點集，其 ϵ－近傍可蓋滿此空間（廣義的複數平面）。

上述的球面（1.14）通常稱爲 Riemann 球面（Riemann sphere）。

習題1-3

1. $X(z_1, z_2)=1$ 的充要條件是 $z_1=-\dfrac{1}{\overline{z_2}}$ 或 $z_2=-\dfrac{1}{\overline{z_1}}$，此時 Z_1, Z_2 在球面上恰爲反極點（即爲直徑的兩端）。
2. 試描述下列各點在複數平面與 Riemann 球面上的相關位置。
   $z_1, -z, \overline{z}, -\overline{z}, 1/z, -1/z, 1/\overline{z}, -1/\overline{z}$。
3. 試證明 $X(z_1, z_2)=X(\overline{z}_1, \overline{z}_2)=X(1/z_1, 1/z_2)$
4. 給一數列 $\{z_n\}$ 使 $X(z_m, z_n)\to 0$（$m, n\to\infty$），試證明存在一點 z_0（z_0 可以是 ∞）使 $X(z_n, z_0)\to 0$（$n\to\infty$），這就是證明此廣義的複數面是一完備度量空間。
5. 試證明 $X(z, -1/\overline{z})=1$。
6. 試證明 Cauchy 不等式：$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \le \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 \sum_{k=1}^{n}|w_k|^2$（比較（1.22））。
7. 試證明定理 1.6 中所述球面與平面 $Ax+By+Cu=D$ 相交的充要條件是
$$A^2+B^2>4D(D-C)$$

1.4　曲線

於實數空間的閉區間 $I=[a, b]=\{t \mid a\le t\le b\}$ 定義一複數值連續函數 $z=z(t)$ 時，在 Z 平面上所得 I 之像稱爲 Z 平面上的**曲線**。今設 $Re\, z(t)=x(t)$，$Im\, z(t)=y(t)$，因 $z(t)$ 在 I 連續，故 $x(t)$ 與 $y(t)$ 也在 I 連續，即在 Z 平面上的點 $z(t)=(x(t), y(t))$ 的軌跡爲一曲線，點 $z(a)$，$z(b)$ 分別稱爲該曲線的**始點**與**終點**。

對於曲線 $C: z=z(t)$，$t\in[a, b]$ 若 $z(a)=z(b)$，則 C 稱爲**閉曲線**（closed curve）。又 $a\le t_1<t_2\le b$ 且除了 $t_1=a$，$t_2=b$ 外恒有 $z(t_1)\neq z(t_2)$ 時，C **稱爲單純曲線**（simple curve）。單純閉曲線常稱爲 Jordan