怎样添加
平面几何辅助线

本书被评为
全国优秀畅销书

- 探讨添加辅助线的基本规律
- 掌握解决平面几何问题的基本方法
- 收集近年各地中考试题
- 系统传授解题技巧

中国致公出版社

怎样添加平面几何辅助线

王长明　编著

中国致公出版社

图书在版编目(CIP)数据

怎样添加平面几何辅助线/王长明编著. —北京:中国致公出版社,2000.1

ISBN 7-80096-318-7

Ⅰ.怎… Ⅱ.王… Ⅲ.平面几何-初中-数学参考资料 Ⅳ.G634.63

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第07656号

怎样添加平面几何辅助线

编　　著:王长明

责任编辑:刘　秦

出版发行:中国致公出版社

(北京市西城区太平桥大街4号　电话 66168543　邮编 100810)

经　　销:全国新华书店

印　　刷:北京市白河印刷厂

开　　本:787×1092　1/32开

印　　张:9.25

字　　数:200千字

版　　次:2001年7月第4版　　2002年1月第8次印刷

印　　数:48001—53000册

ISBN 7-80096-318-7/G·75　　　**定价**:9.60元

前　言

如果说数学是一座春意盎然、繁花似锦的大花园，那么，平面几何就是鲜艳夺目、绚丽多彩的大花坛。它以严密的逻辑思维使人叹服，又以精巧的思维技巧令人陶醉。

平面几何是初中数学的一门重要课程，它的基础知识在生产实践和科学研究中有着广泛的应用，又是继续学习数学和其它学科的基础，但对不少初中学生来说，平面几何也是一门难度较大的学科。

解数学题的一个基本思路是将复杂的问题转化为较为熟悉的或已经掌握的问题。不少平面几何问题都需要进行这种转化，添加适当的辅助线就是实现这种转化的一种重要手段。

要系统地掌握添加辅助线的方法并非易事。本书试图探讨添加辅助线的基本规律，以帮助初中学生掌握解决平面几何问题的基本方法。本书的大部分例、习题选自于各地近年的中考试题。

希望同学们能爱上这本书，从中有所收益，掌握平面几何的基本知识、解决平面几何问题的基本思路，逐渐成为数学大花园的主人。

要系统地阐述添加辅助线的方法不是一件轻而易举的事，在尝试中难免挂一漏万。不足之处，恳请读者批评指正。

目　　录

第一章 几何命题的直接证法

要证明某个命题成立，可以从原命题的条件出发，根据已有的定义、公理、定理、法则，通过一系列的推理，一直推到所要证明的结论为止. 几何学中多数定理都是采用这种方法证明的. 这种方法叫做直接证法.

在思考证明命题的过程中，由于思考问题的思路的顺逆不同，又分综合法和分析法.

第一节 综合法

综合法是一种“执因导果”的方法. 要证明命题“若 A 则 B”，可由 A 出发，先推证出结论 C；再由结论 C 推证结论 D；……直到推证出结论 B 为止. 其过程可简单表示为：

$A \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow B.$

例 1 （河北省沧州等地市 1989 年初中毕业、升学考试试题）已知：矩形 ABCD 的对角线 AC 的垂直平分线分别交 AB、CD 于 E、F，求证：AE＝AF.

证明 $\because$ EF 是 AC 的垂直平分线，

$\therefore AF=CF.$

$\because AO=CO,$

$\angle AOE=\angle COF,$

$\angle OAE=\angle OCF,$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF.$

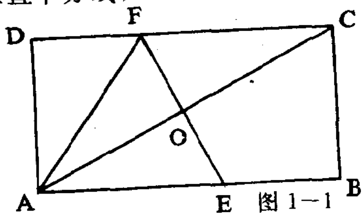

图 1—1

$\therefore \quad AE=CF.$

$\therefore \quad AE=AF.$

上面，我们根据已知条件"EF 是 AC 的垂直平分线"导出"AO=OC"及"∠AOE=∠COF"的结论；根据已知条件"矩形 ABCD"导出"∠OAE=∠OCF"的结论. 由上面的两个结论得到"△AOE≌△COF"的新结论，并由此推断 AE=CF. 再由已知条件"EF 是 AC 的垂直平分线"得出推断 AF=CF，由上述两个推断得出待证结论：AE=AF.

例 2 （苏州市 1985 年中考题）已知：如图 1－2，Rt△ABC 中，AD 是斜边 BC 上的高，∠ABC 的平分线交 AD 于 F、交 AC 于 E，求证：$\frac{DF}{FA}=\frac{AE}{EC}$.

证明 在△DBA 与△ABC 中，

$\because \angle ADB=\angle BAC=90^\circ,$

$\angle ABD=\angle ABC$

$\therefore \triangle DBA \backsim \triangle ABC$

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}.$

$\because$ BE 是∠ABC 的平分线

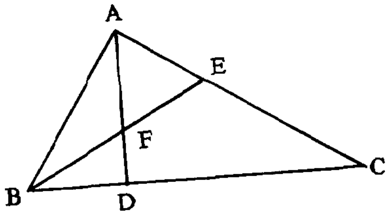

图 1－2

$\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$

$\frac{DF}{FA}=\frac{BD}{AB}$

$\therefore \frac{DF}{FA}=\frac{AE}{EC}.$

上面的证明过程也可表示为：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle BAC=90^\circ,\\ \angle ADB=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\angle BAC=\angle ADB\\ \angle ABC=\angle ABD\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle DBA\backsim\triangle ABC\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}\right.\\ BE\text{ 平分}\angle ABC\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AB}{BC}\\ \dfrac{DF}{FA}=\dfrac{BD}{AB}\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{DF}{FA}=\frac{AE}{EC}.$$

例 3 （承德市 1987 年中考题）如图 1—3，在$\triangle ABC$ 中，$BC=\frac{1}{2}AB$，$\angle B=2\angle A$，求证：$\triangle ABC$ 为直角三角形.

证明 用综合法证明过程可表为：

作$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于 E，

过 E 作 $ED\perp AB$，D 为垂足。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle ABC=2\angle A\\ BE\text{ 平分}\angle ABC\end{array}\right\}\Rightarrow\angle 2=\angle A\Rightarrow AE=BE\\ ED\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow BD=AD=\frac{1}{2}AB$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BC=\frac{1}{2}AB\\ BD=\frac{1}{2}AB\end{array}\right\}\Rightarrow BC=BD\\ \angle 1=\angle 2\\ BE=BE\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle EDB\cong\triangle ECB\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\angle C=\angle EDB=90^\circ$$

$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形.

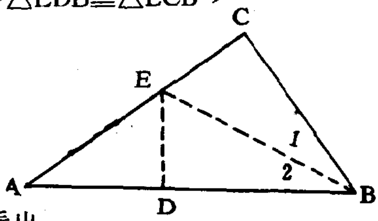

图 1—3

由上面三个例题，我们可以看出，用综合法有以下几个特点：

1. 综合法是一种“执因导果”的方法，它的依据是题目的已知条件和相关的几何学定义和定理.

因此，要能正确地证出一个几何命题，必须仔细地审清题意，充分发挥题设条件的作用，同时，必须熟悉几何学的公理、定义和定理，否则证明将成为无米之炊.

2. 综合法由已知条件逐步有序地推导出所要证明的结论，一环扣一环，条理清楚.

3. 有时，由因生成的果不止一个，有些果并不有助于导出所需要的结论. 因此，在推导过程中，注意力要瞄准待证的结论，使推导目的性很明确地进行.

在例 1 中，由已知条件“ABCD 为矩形”，还可以导出：AD=BC，AC=BD 等结论，这些结论对于推论“AE=AF”来说是用不上的，没有必要将它们一一写出. 由题设条件、几何定义和定理推证出的结论究竟哪一条对下一步推理有用？哪一条是多余的？要掌握判断的技巧非经过长期磨炼不可. 在解题过程中要探索，在探索过程中，一定要时刻注意最终目标.

4. 由因生成的果不止一个，其中能与待证命题相关的果也可能不止一个，这就形成了一道证明题的多种证法. 在例 1 中，若连结 CE，则 AO=OC，$\angle COF=\angle AOE$，$\angle OAE=\angle OCF$，$\triangle COF\cong\triangle AOE$，也可证出 AE=AF 的结论.

多种证法不仅有助于复习几何基本知识，更有助于思维能力的培养，同学们应多进行这方面的练习.

5. 为了充分发挥题目已知条件的作用，在用综合法证题的过程中，常常需要添加辅助线.

在例 3 中，作 BE 的目的源于已知条件：$\angle B=2\angle A$. 作了 BE，不仅得到$\angle 1=\angle 2$，而且得到了$\angle 2=\angle A$、AE=BE 等结

论. 正因为 $AE=BE$, $BC=\frac{1}{2}AB$, 因此作 DE 就可得到 $BD=BC$ 的结论和 $\angle EDB=90°$ 的结论, 不作这两条辅助线, 要证明原命题, 是很艰难的.

因此, 我们要学会根据题设条件作辅助线的方法, 以便充分发挥已知条件的作用.

第二节 分析法

分析法是从命题的结论 B 出发, 分析结论 B 成立的充分条件, 追根寻源, 逐步递推, 直至回溯到题设条件 A, 从而断定"若 A 则 B"是正确的. 分析过程可表示为:

结论 B→条件 C→条件 D→……→条件 A.

分析法是一种"由果寻因"的方法.

例 1 如图 1－4, 已知 $AC\perp BC$, $AD\perp BD$, $AM=BM$, $\angle ECD=\angle EDC$, 求证: ME 是 CD 的垂直平分线.

分析 要证明 ME 是 CD 的垂直平分线, 可先证: $DE=CE$ 及 $MC=MD$. ∴有必要连结 MC、MD.

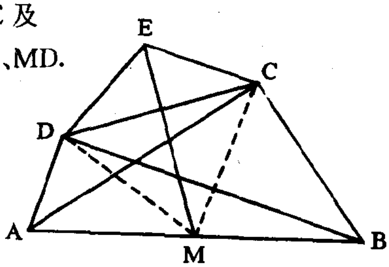

图 1－4

$\because \angle ECD=\angle EDC$,

$\therefore DE=CE$,

$\because AC\perp BC$, $AM=BM$,

$\therefore CM=\frac{1}{2}AB$.

同理 $DM=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore DM=CM$.

原题可证.

为方便计，在叙述证题过程时，常采用综合法的表达形式.

证明　连结 MC、MD.

∵ $AC \perp BC$，$AM = BM$，

∴ $CM = \frac{1}{2}AB$.

∵ $AD \perp BD$，$AM = BM$，

∴ $DM = \frac{1}{2}AB$.

∴ $CM = DM$.

∵ $\angle ECD = \angle EDC$

∴ $DE = CE$.

因此　ME 是 CD 的垂直平分线.

例 2　(北京市 1991 年初中毕业、升学考试试题)已知：如图 1－5，ABCD 是圆内接四边形，$DP /\!/ CA$ 交 BA 延长线于 P，求证：$AD \cdot DC = PA \cdot CB$.

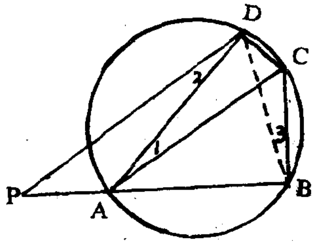

图 1－5

分析　要证明 $AD \cdot DC = PA \cdot CB$，可先证明 $\frac{AD}{CB} = \frac{PA}{DC}$.

由于 AD、CB、PA 和 DC 分属△PAD 和△DCB，因此，可连结 BD，先证明△PAD∽△DCB.

要证明△PAD∽△DCB，可先证明它们有两对对应角相等.

∵ ABCD 是圆内接四边形，∴ $\angle PAD = \angle DCB$.

∵ $PD /\!/ AC$，∴ $\angle 2 = \angle 1$.

∵ $\angle 1 = \angle 3$，∴ $\angle 2 = \angle 3$.

因此　原题可证.

思路分析，可简单表示如下：

$AD \cdot DC = PA \cdot CB \to$ 连结 BD，$\triangle PAD \backsim \triangle DCB$

$$\begin{cases} \angle PAD = \angle DCB \to ABCD \text{ 是圆内接四边形.} \\ \angle 1 = \angle 3 \to \angle 1 = \angle 2 \to PD /\!/ AC. \end{cases}$$

证明过程，请读者完成.

例 3 （福建省 1987 年初中毕业会考试题）如图 1－6，⊙M 与⊙O 相交于 A、B 两点，点 M 在⊙O 上，⊙O 的弦 MC 分别与弦 AB、⊙M 交于 D、E 两点，求证：(1)$MA^2 = MD \cdot MC$；(2)E 是△ABC 的内心.

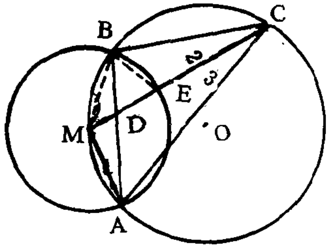

图 1－6

分析　思路分析可简示如下：

(1)$MA^2 = MD \cdot MC \to \dfrac{MD}{AM} = \dfrac{AM}{MC} \to$

$\triangle AMD \backsim \triangle CMA \to$

$\to \angle 1 = \angle 3 \to \angle 2 = \angle 3 \to MA = MB$（连结 MB）.

$\searrow \angle AMD = \angle CMA$

(2)E 是△ABC 的内心 $\to \angle 2 = \angle 3$.

$\to$ 连结 BE，$\angle ABE = \dfrac{1}{2} \angle ABC \to$

$\angle ABE = \dfrac{1}{2} \angle AME$.

从上面三个例题解题思路的分析过程，我们可以看到：

1. 分析法是一种“由果寻因”的方法，目的性明确，逐步推理，逻辑性强.

2. 认真分析题设条件，熟悉几何学基本理论是掌握分析法的前提.

3. 运用分析法推理时，要注意运用已知条件. 产生一个结论

(果)的条件(因)不一定是唯一的,怎样才能找到正确的途径呢?首要的一条就是要密切注视已知条件.

在例 1 中,证明 DM=CM 的方法不是一种,我们为什么不采用与证明 DE=CE 一样的方法呢?是考虑到题目条件中有 $AC \perp BC$、$AD \perp BD$、AM=BM,由这些条件可以推证 $DM=CM=\frac{1}{2}AB$. 我们用 AB 作为 DM 与 CM 之间的桥梁.

在例 2、例 3 中,我们为什么通过寻找两对对应角相等来证明两个三角形相似呢?在例 2 中,由已知条件有 $\angle 1=\angle 3$,$\angle PAD=\angle DCB$ 这些条件,在例 3 中,$\angle AMC$ 公用,在分析过程中,我们应努力做到:分析有理,推证有据.

4. 在分析、寻找证题思路过程中,有时需作辅助线,作辅助线的目的是帮助分析,在例 3 中,连结 BE 是为了利用内心定义来证明待证命题;在例 1 中,连结 MC、MD 是为了利用线段的垂直平分线的性质来证明命题. 在例 2 中,连结 BD 是为了造出 $\triangle DCB$. 总之,作辅助线应该是有目的的,而不是盲目的.

第三节 分析法与综合法的联合使用

分析法与综合法是两种不同的思维方法,其区别在于思维的顺序相反. 分析法从待证命题出发,依据几何学基本理论,按一定的逻辑顺序,从一个问题自然而然地导向另一个问题,逐步导到问题的最终解决;而综合法,先从已知条件开始,依据几何学基本理论,逐个推证出一个又一个结论,最终得到待证命题. 分析法和综合法的推理过程可以用下面的示意图简单地表示出来:

$$\boxed{\text{已知条件}} \underset{\text{分析法}}{\overset{\text{综合法}}{\rightleftarrows}} \boxed{\text{待证命题}}$$

一般说来，证明比较简单的问题时，用综合法比较简洁，而比较复杂的问题，因题设条件较多，涉及面广，究竟从哪一个已知条件入手，往往难以确定，因此，直接用综合法也就不太方便了：分析法就不同了，由于它从待证命题开始，目的明确，从一个问题到另一个问题，条理清晰、思路分明，效果自然好些。

在解决实际问题时，为了取长补短，常采用分析法来寻找待证命题与已知条件之间的关系，找出解题途径，具体证明时采用综合法. 有些问题的解决需要两种方法联合使用.

例 1 如图 1－7，P 为正方形 ABCD 的边 DC 上一点，且 AP＝BC＋CP，M 是 CD 的中点，求证：∠BAP＝2∠DAM.

分析 要证明∠BAP＝2∠DAM，可作∠BAP 的平分线交 BC 于 E，只要能证明∠BAE＝∠DAM，就能得到待证命题.

要证明∠BAE＝∠DAM，可先证明：△ABE≌△ADM. 由于 ABCD 是正方形，∠B＝∠D＝90°，AB＝AD，∴ 只要能证明 BE＝DM 就可以了.

由于 M 是 CD 的中点，$DM=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}BC$，∴ 可先证明 $BE=\frac{1}{2}BC=CE$.

怎样来证明 BE＝CE 呢？似乎无出路.

审题过程，可发现：已知条件 AP＝BC＋CP 未用，如果在 AP 上取一点 F，使 PF＝CP，则 AF＝BC＝AB. ∵ ∠1＝∠2，AE＝AE，∴ △ABE≌△AFE. 因此 BE＝EF.

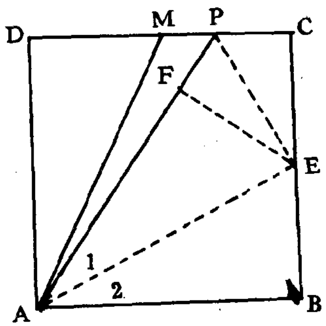

图 1－7

要证明 BE＝CE，可先证：EF＝CE.

证明 EF=CE 的途径很多，究竟哪一条途径合适呢？由于 $\angle AFE=\angle B=90°$，$\therefore \angle C=\angle PFE$. 考虑到 PF=CP，$\therefore$不妨连结 PE，先证明$\triangle PEF\cong\triangle PEC$. 这两个直角三角形全等现已显然，EF=CE 的结论可得，原命题可证.

例 2 如图 1－8，已知：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于 D，自 A 作 BC 的垂线交 BC 于 E，交 BD 于 F，过 F 作 BC 的平行线 FG 交 AC 于 G，求证：AD=CG.

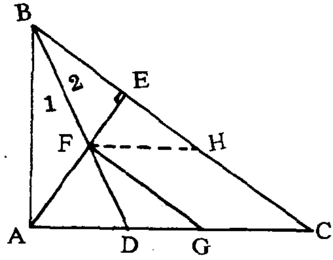

图 1－8

分析 AD、CG 不在一个三角形内，也无法找出两个可能全等的三角形，使它们分属这两个三角形. 因此，我们不妨先用综合法分析已知条件.

题中最引人注目的是 BD 平分$\angle ABC$，即$\angle 1=\angle 2$，由于 $\angle BAC=\angle BEF=90°$，因此，$\angle ADB=90°-\angle 1=90°-\angle 2=\angle BFE=\angle AFD$，$\therefore$AF=AD.

要证明 AD=CG，可先证明 AF=CG.

考虑到 FG∥BC，若过 F 作 AC 的平行线交 BC 于 H，则得平行四边形 GCHF，$\therefore$CG=FH. 因此，要证明 AF=CG，可先证明 AF=FH.

AF、FH 是$\triangle AFB$和$\triangle HFB$的一组对应边，在这两个三角形中，$\angle 1=\angle 2$，BF=BF，而$\angle FHB=\angle C=90°-\angle ABC=\angle FAB$，$\therefore\triangle AFB\cong\triangle HFB$，AF=FH，原题可证.

例 3 （浙江省 1991 年初中中专、技校招生统一考试试题）$\odot O$与$\odot O'$相交于 A、B 两点，割线 CE、DF 都过 B 点，且 $AB^2=BC\cdot BD$，$\angle ABC=\angle ABD$，求证：AD 是$\odot O$的切线，AC 是$\odot O'$的切线.

分析 如图 1—9，要证明 AD 是$\odot O$ 的切线，可过 A 作$\odot O$ 的直径 AG，先证明 $AD\perp AG$，即$\angle DAG=90^\circ$.

要证明$\angle DAG=90^\circ$，可先证明$\angle DAB+\angle BAG=90^\circ$. 如何证明这个结论，似乎无从下手，不妨再用综合法分析已知条件.

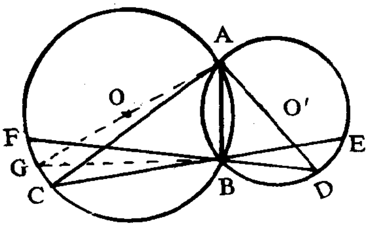

图 1—9

考虑到 AG 是$\odot O$ 的直径若连结 BG，则$\angle ABG=90^\circ$（有了一个直角！），$\angle BAG+\angle G=90^\circ$. $\therefore$ 要证明$\angle DAB+\angle BAG=90^\circ$，可先证明$\angle DAB=\angle G$.

$\because \angle G=\angle C$，$\therefore$ 要证明$\angle DAB=\angle G$，可先证明$\angle DAB=\angle C$.

如何证明$\angle DAB=\angle C$ 呢？不妨进一步分析已知条件. “$AB^2=BC\cdot BD$”、“$\angle ABC=\angle ABD$”所涉及的线段、角全都集中在两个三角形内：$\triangle ABC$ 和$\triangle DBA$，且$\angle C$ 和$\angle DAB$ 是这两个三角形的对应角. 因此，可以通过证明$\triangle ABC\backsim\triangle DBA$ 来得到$\angle C=\angle DAB$ 的结论.

用同样的方法可以寻得证明 AC 是$\odot O'$ 切线的途径.

由以上几个例题可见，对于一个几何证明题，只有通过既有分析又有综合的思维活动，才能找到正确的解题途径. 在以上几个例题的思路展开中，时而突出了分析，时而突出了综合；时而下推，时而上溯，所以，要随时注意它们之间的联系和相互补充，要灵活而不要拘泥于一种方法.