高等院校经济应用数学系列教材

XIANXING DAISHU

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \quad (ab \neq 0)$$

线性代数与线性规划

$$\max S = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

YU XIANXING GUIHUA

沈大庆　沈长源　李　峰　编著

北京邮电大学出版社

高等院校经济应用数学系列教材

线性代数与线性规划

沈大庆　沈长源　李 峰　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与线性规划/沈大庆,沈长源,李峰编著.—北京:北京邮电大学出版社,2001.5

(高等院校经济应用数学系列教材)

ISBN 7-5635-0492-3

Ⅰ.线… Ⅱ.①沈…②沈…③李… Ⅲ.①线性代数②线性规划 Ⅳ.①0151.2②0221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 021695 号

书　　名: 线性代数与线性规划
编　　著: 沈大庆　沈长源　李　峰
责任编辑: 徐夙琨
出 版 者: 北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
　　　　　邮编:100876　发行部电话:62282185 62283578(传真)
　　　　　E-mail: publish@bupt edu cn
经　　销: 各地新华书店
印　　刷: 北京源海印刷厂
印　　数: 1—7 500 册
开　　本: 850 mm×1 168 mm　1/32　印张:9.5　字数:246 千字
版　　次: 2001 年 8 月第 1 版　2001 年 8 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 7-5635-0492-3/O·29-2
定　　价: 18.00 元

前　　言

本书是根据教育部关于经济管理类大学本科生教学大纲，同时参考研究生入学全国统一考试数学大纲的基本要求编写的。

在编写的过程中，我们根据多年的教学经验对以往的线性代数教材进行了重新整理，尽可能地写得细致易懂，例题也做了精心挑选，旨在让学生能够理解并且掌握必要的基本理论和方法，为今后学习相关课程和应用打下一个良好的基础。为了使学生体会到线性代数是一门应用性很强的基础理论，我们还选编了线性规划一章，可根据学时的需要讲授其全部或部分内容。

此外为适应当前数学教学的需要，我们还增加了使用 Mathematica3.0 数学软件计算某些问题的内容。

习题的选编分为两部分，一部分是对掌握基本理论和方法的练习和检查；一部分是客观性题目，以适应各类考试中的标准化试题，同时也是对学生掌握基本理论和方法的强化和提高。

本书由沈大庆副教授、沈长源副教授任主编，李峰任副主编。因编者水平有限，错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

2001 年 1 月

目　录

第一章 行列式

1.1 行列式的定义

解方程是数学中基本的问题,在数学中以二阶、三阶行列式来解二元、三元线性方程组.

对二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

用 $a_{22}\cdot(1)+(-a_{12})\cdot(2)$得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

同样可得 $$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,则有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

把 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$记为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,并称它为**二阶行列式**,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

例如:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 3\times(-6)-5\times 2=-28$$

同样可用行列式表示

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

则二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,则

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 7 \\ 2x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$$

【解】 $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 3 \times (-6) - 5 \times 2 = -28$

$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 7 \times (-6) - 4 \times 5 = -62$

$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 7 = -2$

得方程组的解

$$x_1 = \frac{31}{14}, \quad x_2 = \frac{1}{14}$$

类似地对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$为三阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

例如:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 3\times5\times4 + (-2)\times8\times7 + 6\times2\times3 \\ &\quad - 6\times5\times7 - (-2)\times2\times4 - 3\times8\times3 \\ &= -282 \end{aligned}$$

设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,则三元线性方程组的解用行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中 D_j 为用常数项替换 D 的第 j 列得到的行列式($j=1,2,3$).

对 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

它的解是否也能用行列式来表示,这就需要先搞清 n 阶行列式的定义、性质,为此下面先介绍排列、逆序数的概念.

定义 1 由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组,称为一个 **n 阶排列**,简称为排列.

例如:2431 为一个 4 阶排列; 42513 为一个 5 阶排列.

n 阶排列的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!$.

例如:3 个数的不同排列共有 $3!=3\times2\times1=6$ 个,它们是:

123, 132, 213, 231, 312, 321

定义 2 对排列中的一对数,若左边的数大于右边的数(不一定相邻),称它们构成一个逆序.在 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,其逆序总数称为此排列的**逆序数**,记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如:对排列 42315, 其中 42, 43, 41, 21, 31 为逆序, 则 $N(42315)=5$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

把一个排列的某两个数交换位置,其余数字不动,得到一个新排列,这种变换称为**对换**.

例如:42315对换 3,5 变为 42513,此时 $N(42513)=6$.

定理 1 对换改变排列的奇偶性(即经过一次对换,可使奇(偶)排列变为偶(奇)排列).

【证明】 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_r abb_1\cdots b_s$，对换 a,b 变为 $a_1\cdots a_r bab_1\cdots b_s$，经过一次对换，只改变了 a,b 的排列顺序，则当 $a<b$ 时，经对换逆序数增加1；当 $a>b$ 时，经对换逆序数减少1，所以两排列 $a_1\cdots a_r abb_1\cdots b_s$ 与 $a_1\cdots a_r bab_1\cdots b_s$ 的奇偶性不同.

再证一般对换情形.

设排列为 $a_1\cdots a_r ab_1\cdots b_s bc_1\cdots c_t$，作 s 次相邻对换变为

$$a_1\cdots a_r abb_1\cdots b_s c_1\cdots c_t,$$

再作 $s+1$ 次相邻对换变为

$$a_1\cdots a_r bb_1\cdots b_s ac_1\cdots c_t,$$

经 $2s+1$ 次相邻对换使 a,b 对换，所以两排列的奇偶性不同.

定理2 n 阶排列总数中，奇偶排列各占一半. 即奇排列数等于偶排列数为$n!/2$.

证明从略.

下面利用排列、逆序数的概念分析二阶、三阶行列式的特点.

在二、三阶行列式中，称横排为行，纵排为列. 从上向下依次称为第1行，第2行，…；从左向右依次称为第1列，第2列，…. 其中数 a_{ij} 称为元素，第一个下标 i 称为行标，表示元素 a_{ij} 所在的行数；第二个下标 j 称为列标，表示元素 a_{ij} 所在的列数.

二、三阶行列式表示的代数式称为二、三阶行列式的展开式，其值称为行列式的值.

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 可表示为 $\sum\limits_{(j_1j_2)}(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$，其中 j_1j_2 表示由1,2构成的二阶排列，$\sum\limits_{(j_1j_2)}$ 表示项 $(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$ 按 j_1j_2 取遍所有二阶排列作和.

当 j_1j_2 为 12 时得到的项为：$(-1)^{N(12)}a_{11}a_{22}=a_{11}a_{22}$

当 j_1j_2 为 21 时得到的项为：$(-1)^{N(21)}a_{12}a_{21}=-a_{12}a_{21}$

当每一项中元素的行标按自然数顺序排列时，该项的符号与列标的逆序数有关，逆序数是偶数时为正号，逆序数为奇数时为负号.

对三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

(1) 展开式中每一项中的元素乘积项由不同行、不同列的 3 个元素相乘组成，形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$；列标排列 $j_1j_2j_3$ 为 1,2,3 的 3 阶排列；3 阶排列总数为 $3!=6$，展开式为 6 个元素乘积项的代数和.

(2) 当每项中元素的行标按自然数顺序排列时，各项前的符号由列标排列的逆序数决定，逆序数是偶数时为正号，逆序数是奇数时为负号.

有正号的列标排列：123，312，231，其逆序数

$$N(123)=0,\ N(312)=2,\ N(231)=2$$

所以它们均为偶排列；

有负号的列标排列：321，213，132，其逆序数

$$N(321)=3,\ N(213)=1,\ N(132)=1$$

所以它们均为奇排列.

三阶行列式可表示为 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 表示由 1,2,3 构成的三阶排列，$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示项 $(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 按 $j_1j_2j_3$ 取遍所有三阶排列作和，当

$j_1j_2j_3$ 取遍所有三阶排列时得到对应的 6 个项.

利用排列、逆序数的概念可以把三阶行列式推广到 n 阶.

定义 3 由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n)$ 构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示代数和 $\sum\limits_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1\cdots j_n)}$ 表示对项 $(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ 按 $j_1\cdots j_n$ 取遍所有 n 阶排列作和,$(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

类似二、三阶行列式可定义元素、行(列)标、元素乘积项、展开式和行列式的值等概念.

由定义可知 n 阶行列式等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,每一项的符号由列标排列 $j_1\cdots j_n$ 的逆序数来决定. n 阶行列式共有 $n!$ 项.

显然,n 阶行列式的定义包含了二、三阶行列式的定义,且一阶行列式为 $|a|=a$.

例 2 计算:

(1) 主对角线行列式

$$D=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

(2) 副对角线行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

其中未写出的元素均为零.

【解】 (1) 设 $\lambda_i=a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式一般项为$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,只考虑可能不为零的项.第1个元素$a_{1j_1}$取自第1行,$a_{11}\neq0$,$D$中含有$a_{12},\cdots,a_{1n}$的项均为零,则只有$j_1=1$;第2个元素$a_{2j_2}$取自第2行,不能取自第1列,且$D$中含有$a_{23},\cdots,a_{2n}$的项均为零,则只有$j_2=2$;如此下去有$j_3=3,j_4=4,\cdots,j_n=n$,则

$$D=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

(2) 设 $\lambda_i = a_{i\,n-i+1}(i=1,\cdots,n)$，分析方法同(1)，

$$D = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n} a_{2\,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

例 3 由定义证明上三角形行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

【证明】 设 D_n 的一般项为 $(-1)^{N(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，只考虑可能不为零的项，第 n 行只有 a_{nn} 可能不为零，故取 $j_n = n$；第 $n-1$ 行能取的元素中只有 $a_{n-1\,n-1}$ 可能不为零，故取 $j_{n-1} = n-1$；如此下去可得 $a_{nj_n} = a_{nn}$，$a_{n-1\,j_{n-1}} = a_{n-1\,n-1}$，$\cdots$，$a_{1j_1} = a_{11}$，所以 $D_n = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

同样可证下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积，这是行列式计算中常用的结论.

下面给出 n 阶行列式定义的另一种表达形式.

容易证明行列式 $D_n = |a_{ij}|_n$ 的一般项还可表示为

$$(-1)^{N(i_1\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_n)}a_{i_1j_1}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1\cdots i_n$ 与 $j_1\cdots j_n$ 为两个 n 阶排列.

例如：$a_{41}a_{32}a_{14}a_{23}$ 为四阶行列式中的一个元素乘积项，$N(4312)=5, N(1243)=1, (-1)^{5+1}=1$，该乘积项在展开式中前面的符号为正.若交换元素位置使行标排列成为自然排列，则变为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，$N(4321)=6, (-1)^6=1$，符号也为正.

例 4 已知 $a_{i5}a_{42}a_{3j}a_{21}a_{k4}$ 为五阶行列式的一项，问 i,j,k 取何值？

【解】 由于每一项中元素取自不同行、不同列，所以列标 $j=3$；若取行标 $i=1,k=5$ 则 $N(14325)+N(52314)=9$，若取行标 $i=5,k=1$ 则 $N(54321)+N(52314)=16$，因为 $a_{i5}a_{42}a_{3j}a_{21}a_{k4}$ 前是正号，所以 $i=5,j=3,k=1$.

上面的结论还说明行标与列标的地位是对称的，由此还可以得到

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

1.2 行列式的性质

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，记 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

称 D^{T} 为行列式 D 的**转置行列式**，即把行列式 D 的行改成列得到

的行列式.

性质 1 行列式转置后其值不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

【证明】 设 $D=\sum\limits_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{nj_n}$$

因为 $a_{ij}=b_{ji}$,所以 $D^{\mathrm{T}}=\sum\limits_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{j_11}\cdots a_{j_nn}=D$.

这说明行列式中行所具有的性质对列也成立,所以以下性质只对行给出证明.

性质 2 互换两行(或两列),行列式变号.即

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

【证明】 设

$$D=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array} \qquad D_1=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array}$$

其中 $1\cdots p\cdots q\cdots n$ 为自然数排列.

D 与 D_1 有相同的元素乘积项 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$,此项在