萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

# 幾何及代數之基本

味白蘭　罕廷頓著
鄭太朴譯



商務印書館發行

# 幾何及代數之基本

味白蘭　罕廷頓著

鄭太朴譯

算 學 小 叢 書

# 萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

# 幾何及代數之基本

味白蘭 罕廷頓著

鄭太朴譯

發行兼印刷者 商務印書館 上海寶山路

發行所 商務印書館 上海及各埠

中華民國十九年四月初版



H

Translated by
CHENG TAI PO

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

## 目　次

# 幾何學之基本

Oswald Veblen 著

## I. 引 言

關於幾何學之基本，曾引起了許多心理學，論理學，及智識論上的問題；本篇於此概不涉及。這裏亦幷不去設想倘使歐几里得(*Euclid*)在今日作其幾何學之開首數頁則當若何寫法，因而試一爲之。事實上，以全部而論，其結果的論斷當與眞爲歐几里得所已作者無甚大異。這裏所欲稍詳一述者，祇是關於近代見解與古代有不同的數處。

此項不同，幷非因歐几里得所用論理的方法及用意與近代研究基本的數學家所用者有不同所

致。歐氏忽視了有幾個潛入他的論證的假定，這是錯了的。他的用意與近代學者相同，凡能證的命題必證明之，且務求用最少的假定以證之。因之，每使他去證直覺上明白的理。一自理(*Axiom*)可爲一自明之眞理，但照他的慣例，一切自明的眞理，不是自理。

幾何學上許多專門用語都有定義，而每一用語的定義，亦務必用其他用語爲之定出來，如是輾轉推求，必有一用語無法定者。因此，一本幾何學的書之開首，至少必須有一用語不能有定義者，不則此書將無開首之處了。今卽對此"點"之語，不給以定義。這裏，讀者可自由設想點是何物，祇須與所說關於此者能過得去。我們固不妨用說話以表達對於點的觀念，如說點無長，寬，厚之度，但此種說法，不是我們幾何學書之一部分，此與推得定理時所用論理上的步驟全無關係。

如果幾何學上的命題，將其按論理的次序排列之，務使每個都能自其前者中推演出，則開首者

必無法如此辦，因其前無有命題了。從此，可知必須先有假設(*Assumptions*)。假設自須立得使人對之無可懷疑，然無論其爲眞理與否，不能影響及基於其上之推理(*reasoning*)之可靠性，且不能影響其爲假設的事實。這裏不必深論此項形而上的問題，究竟假設爲自明的眞理，爲自理，抑爲公共的觀念，經驗的張本，乃至是什麼，祇求不出數學的範圍，以此爲一未勘定的字用之。

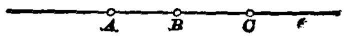
除"點"之一字外，點與點間之"關係"，亦將不給以定義而使用之，例如說 $ABC$ 三點之次序爲 $\{ABC\}$，即是表其關係。"關係"亦可任讀者自爲設想是什麼，祇須與下面的說法相符。

這些假設，原來舊時的幾何學以及目前大部分教科書內，均已隱含的用到，不過明白的將其列出視爲幾何學基本之一部，則是最近來的事。

## II. 次序之假設

**假設一**　設如有數點 $A, B, C$，其次序作 $\{AB$

*C*}，則此數點是分開不同的。



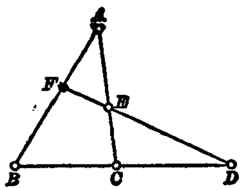

**假設二** 設如有數點 *A*,*B*,*C*，其次序作{*ABC*}，則其次序不作{*BCA*}。

**定義** 設如 *A* 與 *B* 爲分開的點，*AB* 線含有 *A* 及 *B* 以及一切點 *X*，作以下諸次序之一：{*ABX*}，{*AXB*}，{*XAB*}。*X* 點作{*AXB*}次序時構成線段 *AB*，而說是在 *A* 與 *B* 之中間。*A* 與 *B* 名爲此段之端。此段并其端構成一線的間隙 (*linear interval*)。


**假設三** 設如點 *C* 及 *D* 在 *AB* 線內($C \neq D$)，則 *A* 在 *CD* 線內。(註：$C \neq D$ 表示 *C* 與 *D* 不同之意)。

**假設四** 設如 *A* 與 *B* 爲二分開的點，則有一點 *C* 存在，俾 *A*,*B* 及 *C* 作{*ABC*}次序。

**假設五** 設如三分開的點 $A,B$,及 $C$ 不在同一線上,$D$ 及 $E$ 爲二點,其次序作 $\{BCD\}$,及 $\{CEA\}$,則有一點 $F$ 存在作 $\{AFB\}$ 次序而 $D,E$,及 $F$ 在同一線上。



**假設六** 有三分開的點 $A,B$ 及 $C$ 存在,不作以下任何一次序者:

$\{ABC\}$, $\{BCA\}$, $\{CAB\}$。

**定理一** 設如有三點 $A,B$ 及 $C$,其次序作 $\{ABC\}$,則其次序作 $\{CBA\}$,不作以下任何一次序:

$\{CAB\}$, $\{BAC\}$, $\{ACB\}$, $\{BCA\}$。

[證] 自線之定義,$A$ 是在 $BC$ 線上。由假設一,$C$ 與 $A$ 是分開的;故照假設三,$B$ 在 $CA$ 線上。因 $B$ 與 $C$ 及 $A$ 是分開的,所以這裏有以下諸次序之一: $\{CAB\}$, $\{CBA\}$, $\{BCA\}$。但照假設二,$\{BCA\}$ 不能成立,而若作 $\{CAB\}$,則照假設二不能有 $\{ABC\}$。因此,$\{ABC\}$ 可有 $\{CBA\}$,而不能有 $\{BCA\}$ 及 $\{CAB\}$。

由適纔所證明的，知不能有 $\{BAC\}$，蓋不然則又可有 $\{CAB\}$ 了。又，$\{ACB\}$ 亦不能有，因 $\{BCA\}$ 已取消。如是，定理一所說已證明。

**系一**　設如 $A$ 與 $B$ 為分開的點，$AB$ 線同 $BA$ 線，$AB$ 段同 $BA$ 段。

**系二**　設如 $A,B,C$ 點作 $\{ABC\}$ 次序，則均在 $AB,BC,CA$ 線上。

**定理二**　每兩分開的點，有一，幷且祇有一線包含之。

［證］　今設 $A$ 與 $B$ 為兩分開的點。照定理一，系一，$AB$ 線同 $BA$ 線。又設 $C$ 為 $AB$ 線上之任何一點與 $A$ 分開者，$X$ 為 $AB$ 線之任何一點與 $C$ 及 $A$ 均分開。因 $C$ 在 $AB$ 上，照假設三，$A$ 在 $CX$ 線上，於是這裏可有以下諸次序之一：$\{ACX\}$，$\{CAX\}$，$\{CXA\}$。此三者中究應是何者，可得自定理一及線之定義 $X$ 是在 $AC$ 上。因之，$AB$ 線之一切點是在 $AC$ 線上。

今設 $Y$ 為 $AC$ 之任何一點，與 $B$ 及 $A$ 均分

開的。因 $C$ 在 $AB$ 上，由假設三及定理一之系二，$B$ 是在 $AC$ 上。又因 $B$ 與 $Y$ 在 $AC$ 上，照假設三 $A$ 是在 $BY$ 上。所以有 $\{ABY\}$，或 $\{BAY\}$，或 $\{BYA\}$。而由定理一，$Y$ 是在 $AB$ 上。

如是，已可知 $AB$ 線與 $AC$ 線同。設如 $D$ 爲 $AB$ 之任何一點與 $C$ 不同者，卽可知 $CD$ 線同 $CA$ 線，因而同 $AB$ 線。換言之，任何含有 $C$ 與 $D$ 的線均與 $CD$ 線同。

**系** 兩不同的線所有同的點不能多於一。

［證］ 設如有二點相同，則爲此二點所決定的線，將與原有的線均相同。

**定理三** 設如 $DE$ 爲任何一線，則有一點 $F$ 存在不在此線上者。

［證］ 設如每一點均在此 $DE$ 線上，則此線將含有如假設六中所說的三點 $A$, $B$, $C$。照定理二，$AB$ 線與 $DE$ 線將相同；如是，$AB$ 線將含有 $C$，此與假設六不合。

**定理四** 設如 $A$ 與 $B$ 爲任何二點，則有一點

$F$ 作$\{AFB\}$次序。

［證］ 照定理三，可有一點$E$不在$AB$上者(如第5面圖)。而照假設四，則可有一點$C$作此次序：$\{AEC\}$。$C$點不能在$AB$上，不則此線亦將含有$E$，此是照定理二所必如此者。由假設四，可有一點$D$作$\{BCD\}$次序。因此，由假設五，有一點$F$作$\{AFB\}$次序。

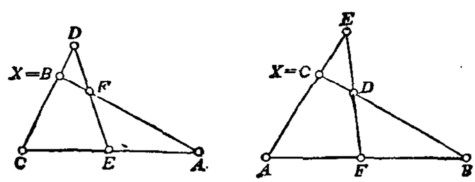
我們現在已可知道，一線$AB$至少必須有五點，蓋除$A$與$B$外，至少有一點$X_1$在其中間(定理四)，以及至少有一點$X_2$與一點$X_3$作此次序者：$\{ABX_2\}$，$\{X_3AB\}$(假設四，定理一)。而此$X_1$，$X_2$，$X_3$，三點，則照定理一爲分開的。

以上所證明諸定理，都是直覺上卽可明白的。然必須一一證明之者，所以顯我們所立諸假設，實際上乃是對於我們所想像的點與線表其特性者。假設五所說，由圖上可明白的事實(第5面圖)，乃是$D$，$E$，$F$點不僅如假設中所云是同線的，且其次序爲$\{DEF\}$。我們現在卽證成之爲一定理。

**定理五** 假設五之 $D,E,F$ 點,其次序爲 $\{DEF\}$。

[證] 因 $D,E,F$ 在同一線上,故照定理二,$F$ 在 $DE$ 上。於是其次序爲以下諸次序中之一:$\{DEF\}$,$\{DFE\}$,$\{FDE\}$。

今設其次序爲 $\{DFE\}$。$E,C,D$ 點不在同一線上,不則照定理二 $A,B,C$ 亦必在此線上。因此,由



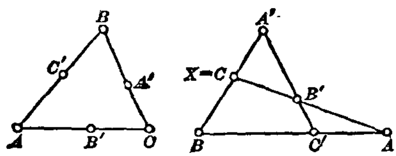

假設五(如上左圖),倘使次序爲 $\{CEA\}$,$\{EFD\}$,則必有一點 $X$ 作此次序:$\{DXC\}$,而在 $AF$ 上,但 $B$ 是 $AF$ 與 $DC$ 兩線所公有之點。所以照定理二之系,$X=B$。如是我們可得 $\{DBC\}$ 并 $\{BCD\}$,此與定理一相抵觸。

又試設其次序爲 $\{FDE\}$。如前,$E,F,A$ 點不

能在同一線上。故照假設五(如上右圖),倘使其次序為$\{AFB\}$,$\{FDE\}$,則必有一點$X$在$BD$上作$\{EXA\}$次序。但$BD$與$EA$之公有點為$C$,故可得$\{ECA\}$并$\{CEA\}$,此又與定理一不合。如是,定理五所說已證明。

下面一定理,在直覺上與假設五同樣的明白,并試證之。

**定理六** 設如$A,B,C$為不是同在一線上的點,而$A'$在$B$與$C$之間,$B'$在$C$與$A$之間,$C'$在$A$與$B$之間,則$A',B',C'$亦不是同在一線上。




[證] 設使$A',B',C'$,同在一線上,則其次序必作以下諸次序之一:$\{A'B'C'\}$,$\{B'A'C'\}$,$\{A'C'B'\}$。今試問$\{A'B'C'\}$是否可能。$A',C',B$點不能同在一線上,蓋不則照定理二此線必并含有

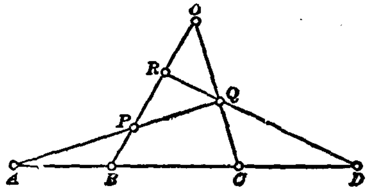
$A$ 與 $C$。而照假設五，倘使有 $\{BC'A\}$ 與 $\{C'B'A'\}$，則必有一點 $X$ 存在作 $\{BXA'\}$ 次序，而在 $AB'$ 上。但 $A'B$ 與 $AB'$ 有公點 $C$，因此，$X=C$，而我們可得 $\{BCA'\}$ 并 $\{BA'C\}$，此卽不合理。

用此法并可證明 $\{B'A'C'\}$ 及 $\{A'C'B'\}$ 亦均不能。

## III. 一線上之次序

**定理七** 設 $\{ABC\}$ 并 $\{BCD\}$，則 $\{ABD\}$。

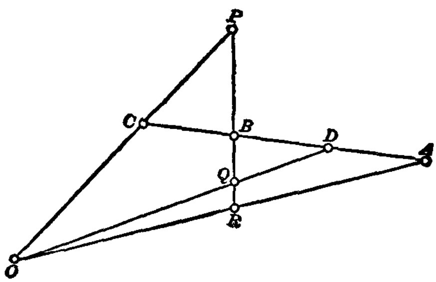
〔證〕 照定理三及假設四，可有點 $P$ 及 $O$ 不在 $AB$ 線上，而作 $\{BPO\}$ 次序。由假設五，定理五，可知 $\{CBA\}$ 及 $\{BPO\}$ 必有一點 $Q$ 作 $\{OQC\}$ 及 $\{APQ\}$。同樣，$\{BCD\}$ 及 $\{CQO\}$ 有一點 $R$ 作 $\{ORB\}$ 與 $\{DQR\}$。$A, Q, D$ 點不能同在一線上，不則 $P$ 亦



將在 $AD$ 上。因此，照假設五，$\{DQR\}$ 及 $\{QPA\}$ 必有一點 $X$ 作 $\{AXD\}$ 在 $RP$ 上。但 $RP$ 與 $AD$ 兩線之共有點為 $B$，故 $X=B$，而 $\{ABD\}$。

**定理八**　設 $\{ABC\}$ 并 $\{ABD\}$，而 $C\neq D$，則或為 $\{BCD\}$ 或為 $\{BDC\}$。

［證］　因於定理二，故這裏祇須證明 $\{CBD\}$ 之不可能。照定理三及假設四，可有點 $O$ 及 $P$ 不在 $BC$ 線上而作 $\{OCP\}$ 次序。而 $\{OCP\}$ 及 $\{CBD\}$




必有一點 $Q$ 作 $\{DQO\}$ 及 $\{PBQ\}$（如上圖）。$A$ 既在 $BC$ 上，不能在 $CP$ 上。因之，$\{OCP\}$ 及 $\{CBA\}$ 可有一點 $R$ 作 $\{ARO\}$，及 $\{PBR\}$。如是，可得三個不是同在一線上的點 $O,A,D$，以及三個點 $B,Q,R$，而 B 在 $A$ 與 $D$ 間，$Q$ 在 $D$ 與 $O$ 間，$R$ 在 $O$ 與 $A$