最新竞赛试题选编及解析

高中数学卷

数学奥林匹克工作室　编

首都师范大学出版社

出 版 说 明(一)

2000 年是中国基础教育的“减负”年。对于教育类出版社来讲,有关教育类图书不仅仅面临的是发行册数锐减,还面临着不可逆转的图书退货浪潮。正是在这种形势下,我社仍然出版了这批中小学各科竞赛试卷汇编图书。为什么呢?想来,是基于以下几个方面的考虑:

一、中国的中小学教育水平,尤其是改革开放后的教育水平,无可争议的在世界是领先的。每一位关心教育的人士都知道,我国高中学生参加的国际学科奥林匹克竞赛,每一学科每个年度都取得了骄人的成绩。这些成绩的取得,是无数老师及教育工作者常年不断辛勤耕耘的结果。作为教育类出版社,作为出版学科奥林匹克图书时间最早、图书规模最全、影响最大的出版社,我们绝不能计较经济效益的得失,责无旁贷地要把老师们这些年的成果反映出来。

二、中小学各学科竞赛的宗旨,是让那些学有余力,学有兴趣或一时对该学科还没有学习主动性的学生在原有学科课堂教学的基础上进一步延伸拓展,以“培养兴趣,开发智力,提高能力”。这是当前我国实行素质教育的有机组成部分。由于受教育者的千差万别,让千千万万的中小学生齐步走是不实际的。有的学生数、理、化有优势,就应该让他们的数、理、化在原有的基础上再系统地多学一些;有的学生在文学、外语方面很有天赋,就应该让他们在这些领域比其他学生多学一些。现在流行一种倾向,谈到素质教育就是琴棋书画,谈到“减负”就是砍数、理、化,这是应该注意的。作为教育类出版社的编辑,要明确自己的责任,坚持正确的出版方向,努力为我国的素质教育多做贡献。

三、出版这批图书是为了满足学生的实际需要。经常有一些学

生来信询问有关竞赛的资料及竞赛报名等问题，受个人、学校等方面条件的限制，他们不了解或不能参加各种竞赛是遗憾的。我想，这批图书对他们是会有帮助的。

最后，还要再次说明的是，我社这批图书的出版，是为了尽可能全面地展示近年我国中小学学科竞赛的全貌，是想进一步推动我国学科竞赛的健康发展。这些试题的产生，是众多老师多年集体智慧的结晶。在这里，我社并代表全体编选者向每一位从事该项工作的专家和老师们致以崇高的敬意，并希望能够进一步加强联系，共同促进这项工作的开展。

董凤举

2001.2.28

出版说明(二)

目前各级各类的高中数学竞赛活动可谓品种繁多,《最新竞赛试题选编及解析——高中数学卷》辑录了近几年来比较有影响的高中数学竞赛试题,书后并附有参考解答。

在辑录的过程中,我们参考了许多出版物。希望这份材料能够对老师的教学和同学的学习有所帮助。

参加编选工作的有:无边,白云,蒋雅玲,吴易,刘维,李志纬。

编　者

2001年2月

目 录

第 37 届国际数学奥林匹克(1996 年)试题/解答 …………………… 1
中国数学奥林匹克(1996 年)试题/解答 ………………………………… 3
全国高中数学联合竞赛(1996 年)试题/解答 ………………………… 4
上海市高中数学竞赛(1996 年)试题/解答 …………………………… 7
"希望杯"数学邀请赛(1996 年)试题/解答 …………………………… 9
北京市中学生数学竞赛(1996 年)试题/解答 ……………………… 13
第 38 届国际数学奥林匹克(1997 年)试题/解答 …………………… 15
第 38 届 IMO 中国国家队选拔赛(1997 年)试题/解答 ………… 17
中国数学奥林匹克(1997 年)试题/解答 …………………………… 19
全国高中数学联合竞赛(1997 年)试题/解答 ……………………… 21
上海市高中数学竞赛(1997 年)试题/解答 ………………………… 25
"希望杯"数学邀请赛(1997 年)试题/解答 ………………………… 27
北京市中学生数学竞赛(1997 年)试题/解答 ……………………… 31
第 39 届国际数学奥林匹克(1998 年)试题/解答 …………………… 33
第 39 届 IMO 中国国家队选拔赛(1998 年)试题/解答 ………… 34
中国数学奥林匹克(1998 年)试题/解答 …………………………… 36
全国高中数学联合竞赛(1998 年)试题/解答 ……………………… 37
上海市高中数学竞赛(1998 年)试题/解答 ………………………… 41
湖南省高中数学竞赛(1998 年)试题/解答 ………………………… 43
河南省高中数学竞赛(1998 年)试题/解答 ………………………… 46
"希望杯"数学邀请赛(1998 年)试题/解答 ………………………… 48
第 40 届国际数学奥林匹克(1999 年)试题/解答 …………………… 52
中国数学奥林匹克(1999 年)试题/解答 …………………………… 54
全国高中数学联合竞赛(1999 年)试题/解答 ……………………… 56

河南省高中数学竞赛(1999 年)试题/解答 …………………… 59
"希望杯"数学邀请赛(1999 年)试题/解答 …………………… 61
第 41 届国际数学奥林匹克(2000 年)试题/解答 ……………… 65
中国数学奥林匹克(2000 年)试题/解答 ……………………… 67
全国高中数学联合竞赛(2000 年)试题/解答 ………………… 69
参考解答 ……………………………………………………… 72

第 37 届国际数学奥林匹克（1996 年）

1. 设 $ABCD$ 是块矩形的板，$|AB|=20$，$|BC|=12$. 这块板分成 20×12 个单位正方形.

设 r 是给定的正整数. 当且仅当两个小方块的中心之间的距离等于 $\sqrt{r}$ 时，可以把放在其中一个小方块里的硬币移到另一个小方块中.

在以 A 为顶点的小方块中放有一个硬币，我们的工作是要找出一系列的移动，使这硬币移到以 B 为顶点的小方块中.

(a)证明当 r 被 2 或 3 整除时，这一工作不能够完成；

(b)证明当 $r=73$ 时，这项工作可以完成；

(c)当 $r=97$ 时，这项工作是否能完成？

2. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle APB-\angle ACB=\angle APC-\angle ABC$. 又设 D，E 分别是 $\triangle APB$ 及 $\triangle APC$ 的内心. 证明：AP，BD，CE 交于一点.

3. 设 $S=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 是所有非负整数的集合. 找出所有在 S 上定义、取值于 S 中的满足下面条件的函数 f：

$$f(m+f(n)) = f(f(m))+f(n)$$

对所有 m、$n\in S$ 成立.

4. 设正整数 a、b 使 $15a+16b$ 和 $16a-15b$ 都是正整数的平方. 求这两个平方数中较小的数能够取到的最小值.

5. 设 $ABCDEF$ 的凸六边形，且 AB 平行于 ED，BC 平行于 FE，CD 平行于 AF. 又设 R_A，R_C，R_E 分别表示 $\triangle FAB$，$\triangle BCD$ 及 $\triangle DEF$ 的外接圆半径，p 表示六边形的周长. 证明：

$$R_A+R_C+R_E\geqslant\frac{p}{2}.$$

6. 设 n、p、q 都是正整数且 $n>p+q$，若 x_0，x_1，…，x_n 是满足下面条件的整数：

(a) $x_0=x_n=0$；

(b) 对每个整数 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 或 $x_i-x_{i-1}=p$，或 $x_i-x_{i-1}=-q$。

证明：存在一对标号 (i,j)，使 $i<j$，$(i,j)\neq(0,n)$，且 $x_i=x_j$。

中国数学奥林匹克（1996年）

一、设 H 是锐角$\triangle ABC$的垂心，由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP、AQ，切点分别为 P、Q. 求证：P，H，Q 三点共线.

二、设 $S=\{1,2,\cdots,50\}$. 求最小自然数 k，使 S 的任一 k 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b，满足 $(a+b)\mid ab$.

三、设函数 $f:R\to R$ 适合条件

$$f(x^3+y^3)$$
$$=(x+y)((f(x))^2-f(x)f(y)+(f(y))^2),x,y\in R$$

试证：对一切 $x\in R$，都有

$$f(1996x)=1996f(x).$$

四、8位歌手参加艺术节，准备为他们安排 m 次演出，每次由其中4位登台表演，要求8位歌手中任意两位同时演出的次数都一样多. 请设计一种方案，使得演出的次数 m 最少.

五、设 $n\in N$，$x_0=0$，$x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$. 求证：

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}.$$

六、在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$BC=1$. 求$\triangle ABC$的内接三角形（三顶点分别在三边上的三角形）的最长边的最小值.

全国高中数学联合竞赛(1996年)

第一试

一、选择题

1. 把圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 与椭圆 $9x^2+(y+1)^2=9$ 的公共点用线段连结起来,所得到的图形为(　　).

(A)线段　　(B)不等边三角形

(C)等边三角形　　(D)四边形

2. 等比数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1536$,公比 $q=-\frac{1}{2}$,用 $\prod_n$ 表示它的前 n 项之积. 则 $\prod_n(n\in \mathbf{N})$最大的是(　　).

(A)$\prod_9$　　(B)$\prod_{11}$　　(C)$\prod_{12}$　　(D)$\prod_{13}$

3. 存在整数 n,使 $\sqrt{p+n}+\sqrt{n}$ 是整数的质数 p(　　).

(A)不存在　　(B)只有一个

(C)多于一个,但为有限个　　(D)有无穷多个

4. 设 $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$,则 $a_1=\cos(\sin x\pi)$,$a_2=\sin(\cos x\pi)$,$a_3=\cos(x+1)\pi$ 的大小关系是(　　).

(A)$a_3<a_2<a_1$　　(B)$a_1<a_3<a_2$

(C)$a_3<a_1<a_2$　　(D)$a_2<a_3<a_1$

5. 如果在区间$[1,2]$上,函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=x+\frac{1}{x^2}$在同一点取相同的最小值,那么,$f(x)$在该区间上的最大值是(　　).

(A)$4+\frac{11}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$　　(B)$4-\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

(C)$1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$　　(D)以上答案都不对

6. 高为 8 的圆台内有一个半径为 2 的球 O_1，球心 O_1 在圆台的轴上，球 O_2 与圆台的上底面、侧面都相切. 圆台内可再放入一个半径为 3 的球 O_2，使得球 O_2 与球 O_1、圆台的下底面及侧面都只有一个公共点. 除球 O_2，圆台内最多还能放入半径为 3 的球的个数是(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

二、填空题

1. 集合 $\{x \mid -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}, x \in \mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是________.

2. 复平面上，非零复数 z_1、z_2 在以 i 为圆心、1 为半径的圆上，$\overline{z_1} \cdot z_2$ 的实部为零，z_1 的辐角主值为 $\frac{\pi}{6}$，则 $z_2 =$________.

3. 曲线 C 的极坐标方程是 $\rho = 1 + \cos\theta$，点 A 的极坐标是 $(2, 0)$. 曲线 C 在它所在的平面内绕 A 旋转一周，则它扫过的图形的面积是________.

4. 将给定的两个全等的正三棱锥的底面粘在一起，恰得到一个所有二面角都相等的六面体，并且该六面体的最短棱的长为 2. 则最远的两顶点间的距离是________.

5. 从给定的六种不同颜色中选用若干种颜色，将一个正方体的六个面染色，每面恰染一种颜色，每两个具有公共棱的面染成不同的颜色. 则不同的染色方案共有________种.（注：如果我们对两个相同的正方体染色后，可以通过适当的翻转，使得两个正方体的上、下、左、右、前、后六个对应面的染色都相同，那么，我们就说这两个正方体的染色方案相同.）

6. 在直角坐标平面上，以 (199, 0) 为圆心、以 199 为半径的圆周上整点（即横、纵坐标皆为整数的点）的个数为________.

第二试

一、设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n - 1 (n = 1, 2, \cdots)$，数列 $\{b_n\}$

满足 $b_1=3, b_{k+1}=a_k+b_k(k=1,2,\cdots)$. 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

二、求实数 a 的取值范围,使得对任意实数 x 和任意 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}.$$

三、如图 1, 圆 O_1 和圆 O_2 与 $\triangle ABC$ 的三边所在的三条直线都相切, E,F,G,H 为切点, 并且 EG、FH 的延长线交于 P 点. 求证: 直线 PA 与 BC 垂直.

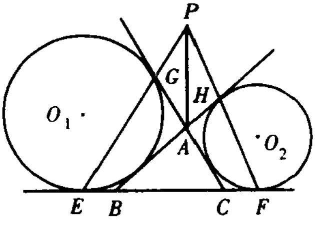

图 1

四、有 $n(n\geqslant 6)$ 个人聚会, 已知:

(1) 每个人至少同其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个人互相认识;

(2) 对于其中任意 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个人, 或者其中有 2 人相识, 或者余下的人中有 2 人相识.

证明: 这 n 个人中必有 3 人两两相识.

上海市高中数学竞赛（1996年）

一、填空题

1. 已知α、β、$\alpha+\beta$都是锐角，用“$>$”号连接$\sin(\alpha+\beta)$、$\sin\alpha+\sin\beta$，$\cos\alpha+\cos\beta$是______.

2. 三角方程$\cos 2x=0$在区间$[0,100]$内的所有解的和是______.

3. 已知满足条件$|z^2|+|z^2-1|=7$的复数z在复平面内所对应的点的集合是一条二次曲线．则该二次曲线的离心率e______.

4. 已知直角$\triangle ABC$斜边上的高是CD，且$AD=\frac{1}{3}AB$．将$\triangle ACD$绕CD旋转至$\triangle A_1CD$，使二面角A_1-CD-B为$60°$．则异面直线A_1C与AB所成角的大小是______（用反三角函数表示）.

5. 若关于x的二次方程$ax^2-(3a+1)x+4a-5=0$至少有一个整数根，则正整数a的值是______.

6. 从集合$M=\{a\mid a\in\mathbf{N}，且a\leqslant 100\}$中选取四个各不相等的数，使它们按从小到大顺序组成公比为整数的等比数列．则这样的等比数列共有______个.

7. 连接椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的右焦点$F_2$与椭圆上动点$A$，作正方形$F_2ABC$（$F_2$、$A$、$B$、$C$四点按顺时针方向排列）．则当点$A$沿椭圆运动一周后，动点$C$的轨迹方程是______.

8. 四个半径都是1的球两两外切，都在一个大球里面，且都与大球相切．则这个大球的半径是______.

9. 点集$A=\{(x,y)\mid\sin(3x+5y)>0，且x^2+y^2\leqslant\pi^2\}$所构成的平面图形的面积是______.

10. 若关于x的不等式$|x-1|>x^2+a$仅有负数解，则实数a

的取值范围是________.

二、设 $k_1<k_2<k_3<\cdots$ 是正整数，且没有两个是相邻的，又对于 $m=1,2,3,\cdots,s_m=k_1+k_2+\cdots+k_m$. 求证：对每一个正整数 n，区间 $[s_n,s_{n+1})$ 中至少含有一个完全平方数.

三、已知集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，求该集合具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有 2 个元素，且每个子集中任意两个元素的差的绝对值大于 1.

四、平面上给定 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 3)$，任意三点不共线，由其中 k 个点对确定 k 条直线（即过 k 个点对中的每一点对作一条直线），使这 k 条直线不相交成三个顶点都是给定点的三角形. 求 k 的最大值.

“希望杯”数学邀请赛（1996年）

一、选择题

1. 若函数 $y=\left|\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-1\right|$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$，那么正数 ω 的值是（　　）.

(A)8　　(B)4　　(C)2　　(D)1

2. 不等式 $\sqrt{x^2-3}>x-1$ 的解是（　　）.

(A)$x>2$　　(B)$x\leqslant-\sqrt{3}$

(C)$x>2$ 或 $x\leqslant-\sqrt{3}$　　(D)$x>1$ 或 $x\leqslant-\sqrt{3}$

3. 如果 $\sin\alpha+\cos\alpha>\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$，那么角 α 的终边所在的象限是（　　）.

(A)1 或 2　　(B)2 或 3　　(C)2 或 4　　(D)1 或 4

4. 如果直线 $y=kx-1$ 和椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a}=1$ 仅有一个交点，则 k 和 a 的取值范围分别是（　　）.

(A)$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 和 $(0,1]$　　(B)$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 和 $(0,1)$

(C)$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 和 $[0,1]$　　(D)$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 和 $(0,1)$

5. 已知 θ 是第三象限的角，并且 $\sin^4\theta-\cos^4\theta=\frac{5}{9}$，那么 $\sin2\theta$ 的值是（　　）.

(A)$\frac{2}{9}\sqrt{14}$　　(B)$-\frac{2}{9}\sqrt{14}$　　(C)$\frac{2}{3}$　　(D)$-\frac{2}{3}$

6. 直线 l 过点 $(0,2)$ 且与双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支有两个不同的交点，则 l 的倾角的取值范围是（　　）.

(A)$\left(0,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{3}\right)\cup\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{3},\pi\right)$

(B) $\left(0,\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$

(C) $\left(\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{15}}{3},\pi\right)$

(D) $\left(\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{15}}{3},\dfrac{3}{4}\pi\right)$

7. 当 a、$b<0$ 时，函数 $y=\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最大值是(　　).

(A) $-(\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|})^2$　　(B) $(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|})^2$

(C) $-\dfrac{1}{(\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|})^2}$　　(D) $\dfrac{1}{(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|})^2}$

8. 由平面 M 外一点向 M 引出的两条射线所夹的角是 $\alpha(0<\alpha<\pi)$，两条射线在 M 内的射影所夹的角是 $\beta(0<\beta<\pi)$，那么 α 与 β 之间的大小关系是(　　).

(A) $\alpha<\beta$　　(B) $\alpha=\beta$

(C) $\alpha>\beta$　　(D) 不能确定的

9. 若 $\dfrac{\lg 2ax}{\lg(a+x)}<1$ 的解包含 $(1,2]$，则 a 的取值范围是(　　).

(A) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　　(B) $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$

(C) $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　　(D) $(0,1)$

10. 给出下列四个不等式：

① 当 $x\in R$ 时，$\sin x+\cos x>-\dfrac{3}{2}$.

② 对于正实数 x、y 及任意实数 α，有 $x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}<x+y$.

③ x 是非 0 实数，则 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$.

④ 当 α、$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$|\sin\alpha-\sin\beta|\leqslant|\alpha-\beta|$. 在以上不等式中不成立的有(　　).

(A)0 个　　(B)1 个　　(C)2 个　　(D)3 个

二、填空题

11. 等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,前 n 项和 $S_n=A$,则前 $3n$ 项的和 $S_{3n}=$________.

12. 适合等式 $\arccos\frac{12}{13}-\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)=\arcsin x$ 的 x 的值是________.

13. 已知不等式$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-a}>4^{-x}$的解集是$(-2,4)$,那么实数 a 的值是________.

14. 已知 $i^2=-1$,集合$\{s|s=1+i+i^2+i^3+\cdots+i^n,n\in\mathbf{N}\}$包含的全部元素是________.

15. 已知 $\text{tg}\theta\in(1,3)$,且 $\text{tg}(\pi\text{ctg}\theta)=\text{ctg}(\pi\text{tg}\theta)$,则 $\sin2\theta$ 的值等于________.

16. 不等式$\frac{1}{\log_2(x-1)}<\frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$的解是________.

17. 函数 $y=\arccos(x-x^2)$的值域是________.

18. 已知函数 $y=\lg(mx^2-4x+m-3)$的值域是 R,则 m 的取值范围是________.

19. 在三棱锥 $P-ABC$ 中,$\angle APC=\angle CPB=\angle BPA=\frac{\pi}{2}$,并且 $PA=PB=3$,$PC=4$,又 M 是底面 ABC 内一点,则 M 到该三棱锥三个侧面的距离的平方和的最小值是________.

20. 非负实数 x、y 满足 $x+2y\leqslant6$,$x^2-6x+5\leqslant y$,则 $f(x,y)=x^2+y^2-6y-8y$ 的最大值是________,最小值是________.

三、解答题

21. 设数列$\{a_n\}$是无穷递缩等比数列,并且 $a_n=\frac{(x-2)\sqrt{4-\frac{1}{3}x^2}}{(x-1)^n}$,$n\in\mathbf{N}$. 以 $f(x)$表示这个数列的和.

① 求 $f(x)$的解析式.