依 据 新 大 纲 ● 与 新 教 材 同 步

2001

双色

大课堂

dakotang

吴新华 梁秀红 主编

高三数学

- 教法方略
- 疑难指津
- 融会贯通
- 跟踪测试
- 名师精编
- 一目了然

吉林教育出版社

依据新大纲 与新教材同步

双色大课堂

daketang

吴新华 梁秀红 主编

高三数学

吉林教育出版社

（吉）新登字 02 号

主　编：吴新华　梁秀红
副主编：巩恩党　周四阳
编　著：吴新华　梁秀红　巩恩党
　　　　李喜民　周四阳　王祖奇

双色大课堂·高三数学

责任编辑：王世斌　　封面设计：木头羊工作室

出版：吉林教育出版社　880×1230 毫米　32 开本　15.125 印张　552 千字
发行：吉林教育出版社　2001 年 7 月第 3 版　2001 年 7 月第 3 次印刷
印数：1—10000 册　定价：19.80 元
印刷：北京泽明印刷有限责任公司　ISBN 7-5383-3239-1/G·2899

前　言

在逐步摆脱传统应试教育模式、深化素质教育的今天，广大师生亟需从教学效率不高、苦不堪言的题海战术中解脱出来。“书山有路勤为径，学海有涯巧作舟”。广大学生渴盼的是变苦学为巧学、变苦读为巧读的学习方法，需要的是高标准、高质量、广思路、大视野、新角度、新构思的学习指南，使自己真正成为学习方法得当、思维方法灵巧、应试技能过硬的有信心、有灵气、能创新的人才。为此，根据高三总复习的特点，编写了这本适合学生复习，以便在更短的时间内掌握更多的知识。

本书采用单色版，由于各学科特点不同，本书栏目灵活设置有：

▲**教法方略**　以例题反应各章各节的重点、难点、易混点，在题中掌握知识、巩固公式。

▲**融会贯通**　在本章知识的基础上举一反三，达到灵活通变的目的。

▲**金题回眸**　选取近年来的高考题型作例题，使学生了解高考题的各种形式，有备而战。

▲**精题选萃**　根据各章的重点设置了形形色色的题型，使学生能灵活掌握，多方面变通。

我们希望本书能够给参加高考的同学带来惊喜。

本书编委会

目　录

第一部分　代数

第二部分　解析几何

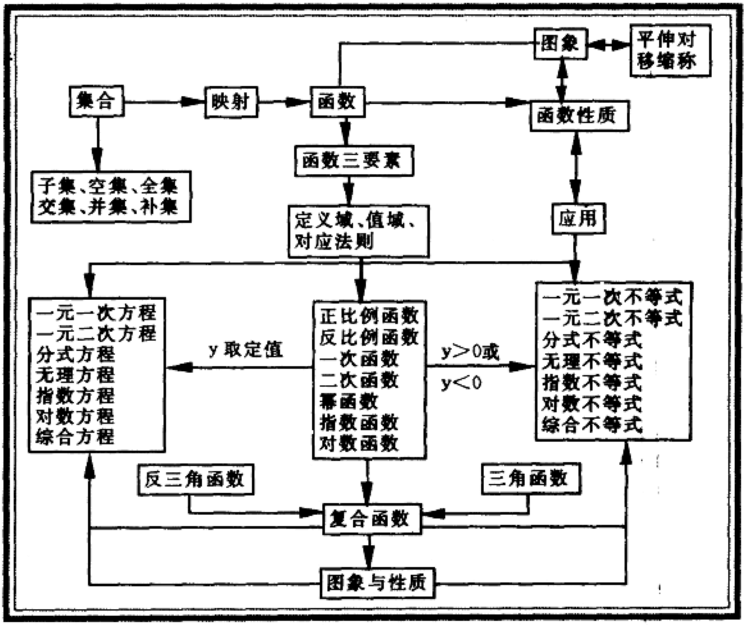
第三部分　立体几何

第一部分 代 数

第一章 集合与函数

▲教法方略

一、知识结构



数学中的四大思想——函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、等价转换思想在函数一章中全部得到了充分体现，本章更应突出数形结合思想与分类讨论

思想，通过对例题、习题的理解，重点培养这两方面的能力．

函数是中学阶段最重要的内容之一，应主要从定义、图像、性质三方面加以研究．在复习时，要全面掌握、透彻理解每一个知识点．

二、考试内容

集合・子集、交集、并集、补集．

$|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$型不等式．一元二次不等式．

映射、函数．

分数指数幂与根式、幂函数及其图像、函数的单调性、函数的奇偶性．

反函数・互为反函数的函数图像间的关系．

指数函数．

对数・对数的性质和运算法则、对数函数、换底公式、简单的指数方程和对数方程．

三、考试要求

(1)理解集合、子集、交集、并集、补集的概念．了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合．

(2)理解$|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$型不等式的概念，并掌握它们的解法．了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系，掌握一元二次不等式的解法．

(3)了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数的函数图像间的关系．

(4)理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图像的对称性的关系描绘函数图像．

(5)理解分数指数幂、根式的概念，掌握分数指数幂的运算法则．

(6)理解对数的概念，掌握对数的性质和运算法则．

(7)掌握幂函数的概念及其图像和性质．在考查掌握函数性质和运用性质解决问题时，所涉及的幂函数 $f(x)=x^a$ 中的 a 限于在集合$\{-2,-1,-1/2,1/3,1/2,1,2,3\}$中取值．

(8)掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图像和性质，并会解简单的指数方程和对数方程．

四、学法指导

函数是中学数学的重要内容之一，贯彻于中学数学的各个部分，是中学数学主线，它不仅应用广泛，而且是学习高等数学的基础．

学习本章内容，应重点掌握以下几点：

1. 正确理解集合的有关概念，明确集合中的元素必须是确定的、无序的、互异的；掌握表示集合的几种方法：列举法、描述法和图示法；准确使用有关符号$\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\subset$，$=$表示元素与集合、集合与集合间的关系；会求给定集合的交集、并集、补集；能运用集合的观点处理代数、三角、解析几何的问题．

2. 正确理解映射、函数、反函数等有关概念、表示方法；会求函数的定义域，掌握求函数值域的常用方法；会求函数的反函数，掌握互为反函数的两函数图像间的关系；能根据函数解析式、图像研究函数的单调性、奇偶性、周期性，并能利用函数的性质绘出函数图像；会用运动、变化的观点分析具体问题中变量间的函数关系．

3. 熟练掌握二次函数、幂函数、指数函数和对数函数的概念、图像、性质，并能综合运用．会用同底法、对数法、换元法等方法解指数、对数方程．

4. 定义域是函数的三要素之一，在研究函数问题时，一定要在定义域的范围内进行，这一点尤为重要．数形结合是一种重要的数学思想，函数的图像能形象直观地反映出函数中变量间的变化关系，能帮助我们正确地理解题意、分析问题，迅速地找到解题思路．所以在解决函数有关问题时，应先绘出函数图像，充分利用图像帮助解题．方程、不等式、函数三者之间有着紧密的联系，要学会利用函数研究方程、不等式的基本方法．

▲疑难指津

一、集合

集合间的关系和运算可归纳成下表

	定义	性质与说明
子　集	如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）．若 $a\in A$，且 $A\subseteq B$，可推出 $a\in B$	①$A\subseteq A$； ②$\varnothing\subseteq A$； ③若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$； ④有 n 个元素的集合的子集个数是 2^n

	定义	性质与说明
真子集	如果 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）	①空集是任何非空集合的真子集； ②若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$； ③有 n 个元素的集合的真子集的个数是 2^n-1
集合相等	对于两个集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，我们就说这两个集合相等，记作 $A=B$	两个相等的非空集合 A 和 B，它们的元素是完全相同的
交集	由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\}$	①$A\cap A=A$； ②$A\cap\varnothing=\varnothing$； ③$A\cap B=B\cap A$
并　集	由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A\ 或\ x\in B\}$	①$A\cup A=A$； ②$A\cup\varnothing=A$； ③$A\cup B=B\cup A$； ④若 n 代表集合中元素的个数，则 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
补　集	已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在 I 中的补集，记作 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\{x\mid x\in I，且\ x\notin A\}$	①$A\cup\overline{A}=I$； ②$A\cap\overline{A}=\varnothing$； ③$\overline{\overline{A}}=A$

二、一元二次不等式

在利用二次函数的图像讨论一元二次不等式的解法时，实际上这一解法把二次函数、一元二次方程、一元二次不等式这三者联系起来了．

一元二次不等式的解集，就是当一元二次函数的函数值取一定的符号时所对应的自变量所组成的集合；一元二次方程的解，就是当一元二次函数的函数值取某一个特定的值时所对应的自变量的值．一元二次函数描述的是 x，y 两个变量相互影响变化的整个过程；一元二次不等式描述了当二次函数的函数值 $y>0$ 或 $y<0$ 时，y 随 x 变化的一个区段；一元二次方程则描述了 y 随 x 变化的整个过程中的某一个时刻．

三、映射

1. 定义：见课本．

2. 有两个集合 A,B，它们可以是数集，也可以是点集或其他集合．这两个集合有先后次序，从 A 到 B 的映射与从 B 到 A 的映射是截然不同的．

3. 存在一个从集合 A 到集合 B 的对应法则 f. 在对应法则 f 的作用下，和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a（在 f 下）的象，a 叫做 b 的原象．

4. 集合 A 中的任何一个元素都有象，并且象是惟一的．例如，设 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,1,\frac{1}{2}\}$，对应法则 f 是"取倒数"，这时由于 A 中的元素 0 无象，A，B，f 不能构成映射，但对于映射来说，A 中两个（或几个）元素可以允许有相同的象，例如课本图 1－11(3) 所表示的映射就属于这种情况．

5. 不要求集合 B 中每一个元素都有原象，即 B 中可能有些元素不是集合 A 中的元素的象．例如，已知集合 Q,R，对应法则 f 是"加$\sqrt{2}$"，它使 R 中的元素 $a+\sqrt{2}$ 和 Q 中的元素 a 对应．这时虽然 R 中有许多元素，如$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，1，π 等，都不是 Q 中任何元素的象，但 Q,R,f 三者之间符合构成映射的条件，所以 $f:Q\to R$ 是从 Q 到 R 的一个映射．也就是说，由象组成的集合（象集）$C\subseteq B$.

6. 具体映射的对应法则 f 的内容是具体的，如"加倍"、"平方"、"取余弦"等．

对应法则 f 可以通俗的比喻成"加工机"，其中的"A 中任意一个元素"好比是原料，由 A 到 B 的对应法则 f 就像是对原料加工的过程，加工后的惟一产物应在 B 中．如果对 A 中的某元素（原料）不能加工，或者加工后的产物不惟一或者产物不在 B 中，这个对应就不是由 A 到 B 的映射．例如 $A=\overline{R^-}$，$B=R$，由 A 到 B 的对应法则 f 是"取对数"，这个对应就不是由 A 到 B 的映射，因为 A 中元素 0"无法加工"．若把 A 改成 R^+，这时 f 就是由 A 到 B 的映射了．又如 $A=\overline{R^-}$，$B=R^+$，由 A 到 B 的对应法则是"求平方根"，这个对应也不是由 A 到 B 的映射，原因是 A 中元素 0 经过"求平方根"这种"加工"后，产物不在 B 中，若把 B 换成 R，集合 A 和由 A 到 B 的对应法则不变，它也不是由 A 到 B 的映射，由为 A 中任一个非零元素 a 在这种"加工"下，产物是 $\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$，可见产物不惟一．若在 $A=\overline{R^-}$，$B=R$ 的条件下，把由 A 到 B 的对应法则改成"求算术根"，这时就形成了由 A 到 B 的映射．

四、函数

1. 用映射刻画的函数的近代定义可以这样叙述：设 A,B 都是非空的数的集合，f 是从 A 到 B 的一个对应法则，那么 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数，

记作

$$y=f(x),$$

其中 $x\in A,y\in B$. 原象集合 A 叫做函数 $f(x)$ 的定义域,像集合 C 叫做函数 $f(x)$ 的值域. 很明显,$C\subseteq B$.

由此可以看出,函数只不过是具有以下两个特点的一种特殊的映射 $f:A\to B$:

(1)集合 A,B 是非空的数的集合.

(2)$f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 的映射.

2. 函数的核心是对应法则.

一般地说,在函数记号 $y=f(x)$ 中,f 即代表对应法则。等式 $y=f(x)$ 表明,对于定义域中的任意 x,在"对应法则 f"的作用下,即可得到 y. 因此,f 是使"对应"得以实现的方法和途径,是联系 x 与 y 的纽带,从而是函数的核心. 当情况比较简单时,对应法则 f 可用一个解析式来表示. 但在不少问题中,对应法则 f 也可能不便用或不能用一个解析式来表示,这时,就必须采用其他方式(如数表或图像等).

3. 定义域(或原象集合)是自变量 x 的取值范围,它是函数的一个不可缺少的组成部分. 定义域不同而解析式相同的函数,应看做是两个不同的函数. 例如,二次函数 $y=x^2$,它的定义域通常是实数集 R. 但当考察正方形的边长与面积的关系时,它的定义域是正实数集 R^+. 显然,这两个函数是不同的函数. 它们的不同也可从它们的图像相异来得到验证. 又如 $y=\sqrt{x^2}$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$,同样可由它们的定义域与图像来验证它们是不同的函数. 在中学阶段,所研究的函数通常都是能够用解析式表示的,如果未加特别说明,函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合. 在实际问题中,还必须考虑自变量 x 所代表的具体的量的允许值范围.

值域是全体函数值所成的集合,在多数情况下,一旦定义域和对应法则确定,函数的值域也就随之确定. 此外还应注意,按照课本中的函数定义,所有的函数都是指单值函数.

五、函数的单调性

1. 定义:见课本.

2. 函数的"单调性",不说"函数的增(减)性";在某个区间上是增(减)函数,不说在某某区间内是增(减)函数. 实际上,函数的单调性不涉及区间的端点问题,因为函数的单调性是指某个区间上的整体性质,单点不影响函数的单调性,"上"包含了"内",而"内"却不包含"上",用"上"字能较好地反映函数的整体性质. 在写函数的单调区间时,如果区间的端点在函数的定义域内,写成开区间或闭区间都可以. 在定义

域内是增(减)函数，不说“在定义域上是增(减)函数”，这仅仅是为了符合语言使用的习惯．在定义域内或某区间上是增(减)函数，不说“在定义域内或某区间上单调递增(减)”．实际上“单调递增(减)”可以是不严格的增(减)，而且也不仅仅对区间来定义，它是更广泛的概念，中学不予介绍，教材上只引入“单调区间”，而不使用“单调递增(减)区间”．

讨论函数的单调性，必须在定义域内给定的区间上进行．例如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\neq0)$，在区间 $(-\infty,0)$ 上是减函数，在 $(0,+\infty)$ 上也是减函数．但要注意：$x=0$ 不属于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域，因此，切不可把这里的区间 $(0,+\infty)$ 误写成 $[0,+\infty)$，也不可说 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数．实际上，令 $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=1$，有 $x_1<x_2$，但 $f(x_1)=-2$，$f(x_2)=1$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，这不符合减函数的定义．这一点，正好说明了整体和局部既统一又矛盾的情况．

3. 判断函数单调性的方法

(1)图像法：从图像上来看，增函数的图像，从左向右，上升，可以形象地描述为“蒸蒸日上”；减函数的图像，从左向右，下降，可以形象地描述为“每况愈下”．反之亦然．

(2)定义法：对于任意的 $x_1<x_2$，增函数 $\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$（转化为判断 $f(x_1)-f(x_2)<0$，当 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 同号时亦可转化为判断 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 与 1 的大小），减函数 $\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$（转化为判断 $f(x_1)-f(x_2)>0$，当 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 同号时亦可转化为判断 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 与 1 的大小）．

(3)利用已知函数的单调性来判定较复杂函数的单调性．

六、函数的奇偶性

1. 定义：见课本．

2. 函数的奇偶性是针对函数的整个定义域讲的．由于任意的 x 和 $-x$ 均要在定义域内，显然奇函数或偶函数的定义域就是关于原点对称的．因此，函数的定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件．

3. 根据定义法证明(或判定)函数的奇偶性的步骤是：①求函数的定义域，并判断其定义域是否关于原点对称．若不对称，则此函数不具有奇偶性；若对称，再进行第二步．②判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系，并下结论．若 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(x)\neq0$，则

此函数为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$ 且 $f(x)\neq 0$，则此函数为偶函数；若 $f(-x)=f(x)$ 且 $f(-x)=-f(x)$，则函数为既是奇函数又是偶函数；$f(x)\neq -f(x)$，则此函数为既不是奇函数又不是偶函数．

4. $f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0$

$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0$

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，那么函数 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数的充要条件是 $f(x)=0$.

既是奇函数又是偶函数的函数有无穷多个．如 $f(x)=0, x\in(-1,1)$；$f(x)=0$，$x\in[-2,2]$；$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$ 等等．也就是说，既是奇函数，又是偶函数的函数．它的解析式惟一，而定义域不惟一．解析式不是 $f(x)=0$（实质上的）的函数，不可能既是奇函数，又是偶函数．

6. 定义域关于原点对称的任何一个函数 $f(x)$，总可以写成一个奇函数和一个偶函数之和．事实上设

$$f(x)=g(x)+\varphi(x), \quad ①$$

其中 $g(x)$ 是奇函数，$\varphi(x)$ 是偶函数．则知

$$\begin{aligned} f(-x)&=g(-x)+\varphi(-x)\\ &=-g(x)+\varphi(x) \quad ② \end{aligned}$$

由①，②联立可解出

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

这种求 $g(x)$，$\varphi(x)$ 的办法是解函数方程的常用方法．

7. 性质：偶函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为偶函数；奇函数的和、差仍为奇函数．

奇（偶）数个奇函数的积、商（分母不为零）为奇（偶）函数．一个奇函数与一个偶函数的积为奇函数．$F_1(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数．

对于复合函数 $F(x)=f[g(x)]$，若 $g(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为偶函数；若 $g(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为奇函数；若 $g(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 为偶函数，则 F

(x)为偶函数．

七、反函数

1．定义：见课本．

2．由反函数的定义可知，

函数 $y=f(x)$与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$互为反函数．

3．函数 $y=f(x)$的定义域是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域．

函数 $y=f(x)$的值域是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域．

4．函数 $x=f^{-1}(y)(y\in C,x\in A)$与函数 $y=f^{-1}(x)(x\in C,y\in A)$的区别与联系

(1)函数 $x=f^{-1}(y)$与 $y=f^{-1}(x)$都是 $y=f(x)$的反函数．

(2)在 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$中，x,y 所处的地位不同：在 $y=f(x)$中，x 是自变量，y 是 x 的函数；在 $x=y^{-1}(y)$中，y 是自变量，x 是 y 的函数．在同一坐标系中，$y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$的图像相同．

(3)在 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$中，x,y 所处的地位相同，但表示的量不同：在 $y=f(x)$中，$x\in A,y\in C$，而在 $y=f^{-1}(x)$中，$x\in C,y\in A$. 在同一坐标系中，$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称．以后没有特别指明时，函数 $y=f(x)$的反函数是指 $y=f^{-1}(x)$.

5．求反函数的步骤

(1)求原函数的值域(目的是得到其反函数的定义域).

(2)将 $y=f(x)$看成方程，解出 $x=f^{-1}(y)$.

(3)将 x,y 互换得 $y=f^{-1}(x)$.

6．若奇函数有反函数，则其反函数也是奇函数，但并非每个奇函数都有反函数．如 $y=\sin x,(x\in R)$.

一般来说，偶函数没有反函数，但对特殊的偶函数，如 $f(x)=Z\quad x\in\{0\}$就有反函数，其反函数为 $f^{-1}(x)=0,x\in\{Z\}$.

7．若函数 $y=f(x),x\in A,y\in C$ 有反函数，则有

$$f^{-1}[f(x)]=x,x\in A$$

$$f[f^{-1}(x)]=x,x\in C$$

八、函数的图像及常用变换

函数图像的定义：在平面直角坐标系中，以函数 $y=f(x)$中的 x 为横坐标，函数值 y 为纵坐标的点(x,y)的集合，就是函数 $y=f(x)$的图像．它包含着以下两方面的涵义：图像上每一点的坐标(x,y)均满足函数关系 $y=f(x)$；反之，满足 $y=f(x)$的每

一组对应值 x,y 为坐标的点(x,y)，均在其图像上．

准确地作出函数图像，能直观地显示出函数的性质特点，如单调性、奇偶性、有界性、连续性、周期性、渐近性、对称性、极值性及一些特殊函数值，都在图像上直观地表示出来，它有利于启迪思维，帮助思考解决问题．因此要理解、熟记并准确地画出函数的图像，同时要了解掌握有关函数的图像的特点，如：(1)奇函数图像是关于原点成中心对称的图形，偶函数图像是关于 y 轴成轴对称图形；(2)$y=f(x)$ 和 $y=-f(x)$ 的图像是关于 x 轴成轴对称图形；(3)$y=f(x)$ 和 $y=-f(x)$ 的图像是关于 x 轴成轴对称图形；(3)$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的图形；(4)$y=|f(x)|$ 是 $y=f(x)$ 的图像在 x 轴上方的不变，再将下半面图像以 x 轴为对称轴，翻转到上半平面中所得到的图形；(5)$y=f(x+k)$ 的图像是把 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴平移 $|k|$ 单位($k>0$ 时向左平移，$k<0$ 时向右平移)，得到的图形．

九、树立函数与方程的数学思想

函数描述了自然界中量的依存关系，是对问题本身的数量本质特征和制约关系的一种动态刻画．因此函数思想的实质是剔除问题的非数学特征，用联系和变化的观点提出数学问题，抽象其数量特征，建立函数关系．与这种思想相联系的就是方程的曲线，在解决数学问题时先设定一些未知量，然后把它们当成已知量，根据题设本身各量间的制约关系，列出方程，求得未知数．所设的未知量沟通了变量之间的关系，将问题转化．

函数和方程都是反映了量和量之间的关系，但函数反映的是变量和变量之间的关系，而方程反映的是未知量和已知量之间的关系．等式 $f(x,y)=0$ 是一个方程，在一定条件下可以确定一个函数．例如方程 $Ax+By+C=0$ 在 $B\neq0$ 的条件下可以确定一个函数 $y=f(x)=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$，另一方面，函数 $y=f(x)$ 也可以看成方程 $y-f(x)=0$.

用函数观点理解方程，其方法是将方程 $f(x)=0$ 的解视为函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴(即函数 $y=0$ 的图像)的交点的横坐标；方程 $f(x)=a$ 的解视为函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=a$ 的图像的交点的横坐标；方程 $f(x)=g(x)$ 的解视为函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像的交点的横坐标．

▲融会贯通

【例1】设 A、B 是以实数作为元素的两个集合：$A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$，且 $A\cap B=\{2,5\}$. 求实数 a 的值及 $A\cup B$.

➡**错解** $\because A\cap B=\{2,5\}$ $\therefore 5\in A$

$\therefore a^3-2a^2-a+7=5$ $a^3-2a^2-a+2=0$ $(a-2)(a^2-1)=0$

$\therefore a=2$ 或 $a=1$ 或 $a=-1$.

➡**正解** 同以上过程，求到 $a=2$ 或 $a=1$ 或 $a=-1$.

即 $A=\{2,4,5\}$ 当 $a=2$ 时，$B=\{-4,5,2,25\}$，且适合 $A\cap B=\{2,5\}$；

当 $a=1$ 时，$B=\{-4,4,1,12\}$，此时 $A\cap B=\{4\}$，不合题意；

当 $a=-1$ 时，$B=\{-4,2,5,4\}$，此时 $A\cap B=\{2,5,4\}$，也不合题意.

综上可得，$a=2$ 时，$A\cup B=\{-4,2,4,5,25\}$.

➡**注** 错解只考虑 $A\cap B=\{2,5\}$ 中的元素 2,5 必属于集合 A，根本没有考虑到集合 B，因此条件仅是必要的，a 的取值范围被扩大了. 所以在根据 A 与 $A\cap B$ 的条件求出 a 值后，必须用 B 及 $A\cap B$ 验证是否符合题意，才能筛去 $a=\pm1$，得出 $a=2$ 的正确结论.

本题如果同时考虑 A,B 及 $A\cap B$，那么得出的方程组组数较多，一一求解显得比较繁琐，因此针对集合 A 中仅一个待定元素的具体条件，先求出使 A 适合题意时 a 的一切可能值，然后通过验证 B 适合题意筛去一些 a 值，得出满足所有题设条件的 a 值. 这种"攻其一点，再及其余"的做法是一种行之有效的解题策略. 应用时要注意这种做法是分两步进行的，如果只顾"攻其一点"而忘了"再及其余"，就要重犯误解中的错误了.

【例2】求函数 $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$ 的值域.

➡**错解** 由 $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$ 得

$(y-1)x^2-(y+2)x+y-1=0$.

由 $x\in R$，得 $\begin{cases} y-1\neq 0, \\ (y+2)^2-4(y-1)^2\geqslant 0. \end{cases}$

解之，得 $1<y\leqslant 4$ 或 $0\leqslant y<1$.

所以函数的值域为 $y\in[0,1)\cup(1,4]$.

➡**错解分析** 由

$$y=\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}=\frac{(x^2-x+1)+3x}{x^2-x+1}=1+\frac{3x}{x^2-x+1},$$

显然 $x=0$，$y=1$，故函数的值域应包含 $y=1$，即为 $0\leqslant y\leqslant 4$. 产生错误的

原因在于对 x^2 的系数 $y-1$ 讨论的不完整，从而使值域缩小了范围，应分成 $y-1\neq 0$ 及 $y-1=0$ 两种情况分别讨论.

【例3】求函数 $y=x^2-4x+3, x\in(-\infty,2]$ 的反函数，并求出反函数的定义域和值域.

➡错解　由 $y=x^2-4x+3$，得 $x^2-4x+(3-y)=0$. 所以

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4+4y}}{2}=2\pm\sqrt{1+y}.$$

因此反函数为 $y=2+\sqrt{1+x}$，定义域为 $[-1,+\infty)$，值域为 $[2,+\infty)$ 或 $y=2-\sqrt{1+x}$，定义为 $[-1,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+2]$.

➡错解分析　上述错误解法忽略了原函数 $y=x^2-4x+3$ 的定义域为 $(-\infty,2]$，所以反函数只能是 $y=2-\sqrt{1+x}$. 由 $x=2\pm\sqrt{1+y}$ 及 $x\in(-\infty,2]$，首先得 $x=2-\sqrt{1+y}$，再得出 $y=2-\sqrt{1+x}$

➡正解　由 $y=(x-2)^2-1$ 得 $(x-2)^2=y+1$.

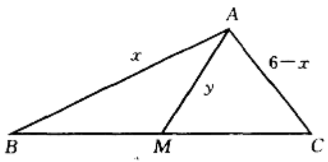
$\because x\in(-\infty,2]$，$\therefore y\geqslant -1$ 且 $x-2=-\sqrt{y+1}$，即

$x=2-\sqrt{y+1}\quad (y\geqslant -1)$

$\therefore$ 此函数的反函数为 $y=2-\sqrt{x+1}, (x\geqslant -1)$

反函数的定义域是 $[-1,+\infty)$，值域是 $(-\infty,2]$.

【例4】已知线段 $BC=4$，点 A 与 B、C 两点距离之和等于 6. 设 M 是 BC 的中点，$AM=y$，$AB=x$，求 $y=f(x)$ 的函数关系式，并求出函数的定义域.



➡错解　在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$ 中，由余弦定理得

$y^2+2^2-4y\cos\angle ABM=x^2$　①

$y^2+2^2-4y\cos(180^\circ-\angle AMB)=(6-x)^2$　②

①+②，得 $2y^2+8=x^2+(6-x)^2$　$\therefore y=\sqrt{x^2-6x+14}$

$\because x^2-6x+14=(x-3)^2+5>0$　$\therefore x\in R$.

➡正解　步骤同上，得 $2y^2+8=x^2+(6-x)^2$　$\therefore y^2=x^2-6x+14$

$\because y=AM>0$，$\therefore y=\sqrt{x^2-6x+14}$