

高等学校试用教材
(应用数学教学用书)

数 学 模 型

姜启源 编

高等教育出版社

本书是编者在清华大学萧树铁教授讲课记录的基础上根据自己的讲稿补充、整理而成的,经高等工业学校应用数学专业教材委员会1986年5月杭州会议审定作为教材。本书着重培养应用数学专业学生的洞察力和想象力,全书分“建立模型”、“初等模型”、“优化模型”、“离散模型”、“稳定性模型”、“人口模型”、“交通模型”及“其它模型”八章。

本书可供理工院校应用数学专业的学生作为教材,也可供数学专业学生、应用数学工作者、高等院校有关教师及科技工作者参考。

高等学校试用教材
(应用数学教学用书)

数 学 模 型

姜启源 编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京第二新华印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张8.625 字数208,000

1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷

印数 00 001—12 150

书号 13010·01382 定价 1.55 元

目 录

第一章 建立数学模型	1
§ 1 现实世界与数学模型.....	1
§ 2 两个例子 万有引力定律和传染病数学模型.....	3
§ 3 建立模型的步骤和模型的分类型.....	15
第二章 初等模型	19
§ 1 稳定的椅子.....	19
§ 2 席位分配.....	20
§ 3 比例方法 划艇比赛和四足动物的身材.....	25
§ 4 定性模型 实物交换与核竞争.....	30
§ 5 量纲分析.....	34
习题.....	41
第三章 优化模型	43
§ 1 森林救火.....	43
§ 2 血管的分支.....	46
§ 3 存贮模型.....	49
§ 4 生产计划与设备检查.....	56
§ 5 最优价格.....	62
§ 6 赛跑的最优速度.....	65
附录 变分法简单介绍.....	73
习题.....	79
第四章 离散模型	83
§ 1 状态转移.....	83
§ 2 马氏链模型.....	86
§ 3 合作对策模型.....	100
§ 4 团体决策.....	107

§ 5 冲量过程.....	124
§ 6 层次分析.....	132
习题.....	148
第五章 稳定性模型.....	153
§ 1 经济学中的“蛛网模型”——市场稳定.....	153
§ 2 捕鱼的稳定与优化问题.....	157
§ 3 军备竞赛.....	160
§ 4 生物的竞争和排斥.....	165
§ 5 弱肉强食模型.....	170
习题.....	176
第六章 人口模型.....	178
§ 1 指数模型和 Logistic 模型.....	179
§ 2 随机模型.....	182
§ 3 按年龄分布的女性模型.....	187
§ 4 预测和控制模型.....	193
习题.....	199
第七章 交通模型.....	202
§ 1 交通流模型.....	202
§ 2 最大熵原理和交通量分布模型.....	223
§ 3 超饱和和交通网络控制模型.....	231
习题.....	235
第八章 其它模型.....	237
§ 1 肿瘤的生长和对放射线的反应.....	237
§ 2 战争模型.....	243
§ 3 香烟过瘾嘴的作用.....	251
§ 4 生产与贮存的最优控制及国民收入的最优增长.....	258
习题.....	264
参考文献.....	266

第一章 建立数学模型

数学模型是今天科学技术工作者常常谈论的名词。炼钢厂的工程师们希望有一个炼钢过程的数学模型，以实现计算机自动控制；气象工作者要根据关于气压、雨量、风速……的数学模型，来预报天气；从事城市规划工作的专家们更需要建立一个包括人口、交通、能源、污染……大系统的数学模型，为领导者作出城市发展规模的决策提供科学根据。模型是相对于我们生活的现实而言的。数学模型与现实世界的关系如何，怎样建立数学模型，数学模型如何分类，这一章要通过两个例子回答这些问题。

§1 现实世界与数学模型

你喜欢参观展览会吗？让我们一起去看看丰富多彩的科技展览吧！

走过展览大厅，一件件精心制作的展品便映入眼帘：雄伟壮观的水电站模型，耸立在发射架上的人造卫星模型，……如果你想知道核电站如何运转，那么就请听手持原子结构模型的讲解员所做的有趣介绍吧，展厅四周的墙壁上挂满了照片和图表：日新月异的都市高层建筑的彩色巨照，石油工业迅猛发展的数字和图表，和整面墙壁一样大的地图上鲜明地标出了新建的铁路和新辟的航线，……如果你想深入了解现代化钢厂将如何实现全部计算机控制，那不妨去看一部科技幻灯片，那里有控制过程的框图，有炼钢过程的原料和时间的计算公式，甚至也有一段管理生产的计算机程序。

在两小时的参观中，我们从现实生活进入了另一个世界，仿佛一会儿乘坐卫星飞上太空，一会儿变作孙猴钻入原子内部，一会儿又跟随生产过程的框图、公式和程序去探索计算机控制的奥妙。从开阔眼界、丰富知识的角度看，这恐怕不是仅仅置身现实世界中两天、二十天所能做到的。这种奇妙的作用要归功于你看到的实物模型、照片、图表、地图、公式、程序……，它们统统称作“模型”。

实物模型、玩具、照片等把现实物体的尺寸加以改变，看起来逼真，称形象模型。地图、电路图等在一定假设下用形象鲜明、便于处理的一系列符号代表现实物体的特征，称模拟模型。而图表、公式、程序等则用字母、数字或其它数学符号，以及由它们组成的数学式子、图形等来描述客观事物的特征及其内在联系，这就是我们要研究的数学模型。模拟模型和数学模型都是现实世界的抽象。如果说，形象模型不过是现实世界的放大和缩小，在某种程度上只起着便于观察、研究作用的话，那么抽象模型，特别是数学模型，则是现实世界简化的、然而是本质的描述，在人类历史的长河中，它对生产力的发展起着无法估量的作用。今天，没有数学模型，许多基本的生产活动便无法进行，更不要说计算机的应用了。

数学模型是运用数学的语言和工具，对部分现实世界的信息（现象、数据……）加以翻译、归纳的产物，它源于现实，又高于现实。数学模型经过演绎、推断，给出数学上的分析、预报、决策或控制，再经过解释，回到现实世界。最后，这些分析、预报、决策或控制必须经受实际的检验，完成实践——理论——实践这一循环（如图 1-1 所示）。如果检验的结果是正确或基本正确的，就可以用来指导实际，否则，要重新考虑翻译、归纳的过程，修改数学模型。

本书的重点是讨论如何建立数学模型，但是，科学技术发展到今天，尚不能给出若干条普遍适用的建立数学模型的准则和技巧。有人说，建立数学模型目前与其说是一门技术，不如说是一种艺

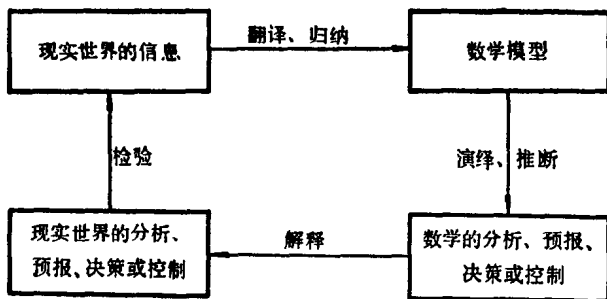


图 1-1 现实世界与数学模型的关系

术。艺术在某种意义上是无法归纳成几条准则或方法的。一名出色的演员需要大量的观摩和前辈的指点，更需要亲身的实践。类似地，掌握建立数学模型这种艺术，一要大量阅读、思考别人做过的模型，二要亲自动手，认真做几个实际题目。后者是更为重要的方面。本书就是试图通过大量例子，让大家看看别人是如何做的，以丰富自己的想象力。

在这一节的最后，也许应该给数学模型下一个定义，尽管许多作者并没有统一的意见。所谓数学模型，是指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制。以下，数学模型就简称模型了。

§ 2 两个例子 万有引力定律和传染病数学模型

一、万有引力定律

万有引力定律的发现是牛顿(1642—1727)在力学上的重大贡献之一。牛顿在研究力学的过程中发明了微积分，又成功地在开普勒三定律的基础上运用微积分推导了万有引力定律。这一创造

性的成就可以看作是历史上最著名的数学模型之一。

历史背景 十五世纪下半叶开始，商品经济的繁荣促进了航海业的发展，哥伦布、麦哲伦……扬帆远航，在强大的社会需要的推动下，天文观测的精确程度不断提高。在大量实际观测数据面前，一直处于天文学统治地位的“地心说”开始动摇了。

哥白尼(1473—1543)在天文观测的基础上，冲破宗教统治和“地心说”的束缚，提出了“日心说”，这是天文学乃至整个科学的一大革命。但是由于历史条件和科学水平的限制，哥白尼的理论还有不少缺陷，譬如，他认为行星绕太阳的运行轨道是圆形的。

第谷·布拉赫(1546—1601)观测行星运动，积累了二十年的资料。开普勒(1571—1630)作为他的助手，运用数学工具分析研究这些资料，发现火星的实际位置与按哥白尼理论计算的位置相差8弧分。在深入分析的基础上，他于1609年归纳出所谓开普勒第一定律：各颗行星分别在不同的椭圆轨道上绕太阳运行，太阳位于这些椭圆的一个焦点上；及开普勒第二定律：单位时间内，太阳-行星向径扫过的面积是常数(对一颗行星而言)。为了寻求行星运动周期与轨道尺寸的关系，他将当时已发现的六大行星的运行周期和椭圆轨道的长半轴列成表格(如表1-1)，反复研究，终于总结

表 1-1 行星运行周期与椭圆轨道长半轴的关系
(以地球的周期和长半轴为度量单位)

行星	周期 T	长半轴 a	T^2	a^3
水星	0.241	0.387	0.058	0.058
金星	0.615	0.723	0.378	0.378
地球	1.000	1.000	1.000	1.000
火星	1.881	1.524	3.54	3.54
木星	11.862	5.203	140.7	140.85
土星	29.457	9.539	867.7	867.98

出第三定律：行星运行周期的平方与其椭圆轨道长半轴的三次方成正比。

牛顿认为一切运动都有其力学原因，开普勒三定律的背后必定有某个力学规律在起作用。他要构造一个模型加以解释。终于，他以微积分（当时称流数法）为工具，在开普勒三定律和牛顿力学第二定律的基础上，演绎出所谓万有引力定律。这一定律成功地定量解释了许多自然现象，也为其后一系列的观测和实验数据所证实，成为物理学中的一个基本定律。

万有引力定律的建立^①

以太阳为原点建立极坐标系 (r, θ) ，向径 r 表示行星位置，如图 1-2 所示。

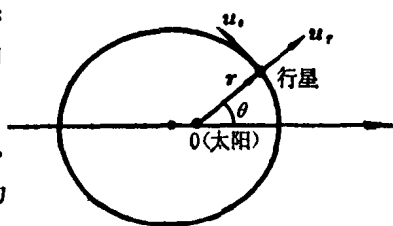


图 1-2 极坐标系中的行星运行轨道

将开普勒三定律作为假设 I、II、III，牛顿力学第二定律作为假设 IV，它们可以表示为：

I) 轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (1)$$

其中
$$p = \frac{b^2}{a}, \quad b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (2)$$

a 为长半轴， b 为短半轴， e 为离心率。

II)
$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = A \quad (3)$$

A 是单位时间内向径 r 扫过的面积，对某一颗行星而言， A 是常数。 $\dot{\theta}$ 表示 θ 对时间 t 的导数。

III)
$$T^2 = k a^3 \quad (4)$$

^① 这个推导过程是在牛顿的方法的基础上改写的。

T 是行星运行周期, k 是绝对常数.

$$\text{IV) } f \propto \ddot{r} \quad (5)$$

这表示太阳和行星间的作用力 f 与加速度 \ddot{r} 的方向一致, 与 \ddot{r} 的大小成正比.

下面要从这四条假设出发, 推导出万有引力定律: 太阳与行星间作用力的方向是太阳和行星连线方向, 指向太阳; 大小与太阳-行星间距离的平方成反比. 比例系数是绝对常数.

首先, 基向量选为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\theta = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \end{cases} \quad (6)$$

如图 1-2 所示, 于是 \mathbf{r} 可表示为

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \quad (7)$$

因为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_r = -\sin\theta \cdot \dot{\theta} \mathbf{i} + \cos\theta \cdot \dot{\theta} \mathbf{j} = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta = -\cos\theta \cdot \dot{\theta} \mathbf{i} - \sin\theta \cdot \dot{\theta} \mathbf{j} = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r \end{cases} \quad (8)$$

由(7)和(8)可以得到行星运动的速度和加速度:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \quad (9)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \quad (10)$$

根据(3)式,

$$\dot{\theta} = \frac{2A}{r^2} \quad (11)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-4A\dot{r}}{r^3} \quad (12)$$

由(11)和(12)可知(10)右端第二项 $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$, 于是(10)式为

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r \quad (13)$$

根据(1)和(11)两式, 可以算出

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{r^2}{p} e \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ &= \frac{2A}{p} e \sin \theta\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{2A}{p} e \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ &= \frac{4A^2}{r^3} \left(1 - \frac{r}{p}\right)\end{aligned}\quad (15)$$

将(11)和(15)代入(13)式可得

$$\ddot{r} = -\frac{4A^2}{pr^2} \mathbf{u}_r \quad (16)$$

将得到的(16)式与(5)、(7)相比较可知,太阳对行星的作用力 f 的方向与向径 r 方向正好相反,即 f 在太阳-行星的连线方向,指向太阳; f 的大小与太阳-行星间距离的平方成反比。

为了完成万有引力定律的推导,只需进一步证明(16)式中的比例系数 A^2/p 是绝对常数(A 和 p 都不是绝对常数,它们的数值取决于所讨论的是哪一颗行星)。

根据 A 和(2)式中 a, b 的定义,任一行星的运行周期 T 满足:

$$TA = \pi ab \quad (17)$$

由(2)、(4)和(17)式不难得到

$$\begin{aligned}\frac{A^2}{p} &= \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2 p} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{ka^3} \cdot \frac{a}{b^2} \\ &= \frac{\pi^2}{k}\end{aligned}\quad (18)$$

π 和 k 皆为绝对常数,这就说明引力的比例系数对“万物”是同一个常数,从而得到了著名的万有引力定律。

通过万有引力定律的推导过程可以看出,在正确的假设的基础上,运用数学的演绎方法建立模型,对自然科学的发展能够发挥多么巨大的作用。

二、传染病模型

本世纪初，瘟疫还经常在世界的某些地区流行。被传染的人数与哪些因素有关？如何预报传染病高潮的到来？为什么同一地区一种传染病每次流行时，被传染的人数大致不变？科学家们试图建立一个模型描述传染病的蔓延过程，以便对这些问题做出回答。
[1][2]①

这里不是从医学的角度探讨每一种瘟疫的传染机理，而是一般地讨论传染病的蔓延过程。这个问题与自然科学领域中一些已经有确定规律的问题不同。我们不可能立即对它做出恰当的假设，建立完善的模型。所以我们的方法是，先做出最简单的假设，看看会得到什么结果，然后针对其不合理或不完善处，逐步修改和增加假设，得到比较满意的模型。下面分三步讨论这个问题。

模型 I

假设：病人(带菌者)通过接触(空气、食物、……)将病菌传播给健康者。单位时间内一个病人能传染的人数是常数 k_0 。

记时刻 t 的病人人数为 $i(t)$ ，由假设可知

$$i(t + \Delta t) - i(t) = k_0 i(t) \Delta t$$

即
$$\frac{di}{dt} = k_0 i(t) \quad (19)$$

设开始时有 i_0 个病人

$$i \Big|_{t=0} = i_0 \quad (20)$$

方程(19)在初始条件(20)下的解为

$$i(t) = i_0 e^{k_0 t} \quad (21)$$

这个结果表明，病人人数将按指数规律无限增加，与实际情况明显地不相符合。事实上，一个地区的总人数大致可视为常数(不

① 见参考文献[1][2]，下同。

病-
-的
-的

考虑瘟疫流行时期出生和迁移的人数),而在瘟疫流行期间,一个病人单位时间能传染的人数 k_0 则是在改变的. 在传染病流行的初期, k_0 较大,随着病人的增多,健康者减少,被传染机会也将减少,于是 k_0 变小. 所以应该对本模型的假设进行修改. 我们进一步讨论下面的模型.

模型 II

记时刻 t 的健康者人数为 $s(t)$, 当总人数不变时, k_0 应该随着 $s(t)$ 的减少而变小.

假设:

I) 总人数为常数 n , 且

$$i(t) + s(t) = n \quad (22)$$

II) 单位时间内一个病人能传染的人数与当时健康者人数成正比, 比例系数为 k . k 称传染系数.

根据假设 II), 方程 (19) 中的 k_0 应易为 $ks(t)$,

即
$$\frac{di}{dt} = ks(t) \cdot i(t) \quad (23)$$

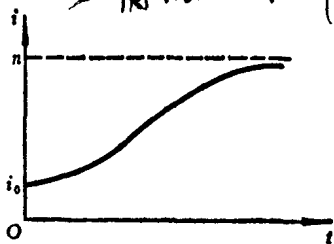
以 (22) 式代入,

$$\frac{di}{dt} = ki(n-i) \quad (24)$$

→ 用 math 软件求

初始条件仍用 (20) 式, 用分离变量法不难求出方程 (24) 满足条件 (20) 的解为

$$i(t) = \frac{n}{1 + \left(\frac{n}{i_0} - 1\right)e^{-knt}} \quad (25)$$



$t \sim i(t)$ 曲线表示在图 1-3 中. 图 1 3 模型 II 中病人人数 $i(t)$ 的曲线

根据 (25) 式, $i(t)$ 单调增加, 并且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $i(t) \rightarrow n$, 这意味着所有的人最终都要被传染. 事实上, 由于被传染的病人或者

经治愈后而免疫,或者死亡,所以病人人数最终应趋于零. 我们将在模型 III 中考虑这个因素.

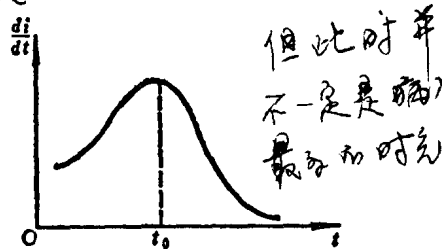
模型 II 在传染病流行的前期还是可以应用的, 传染病学专家用它来预报传染病高潮到来的时刻, 即病人人数增加最快的时刻. 为此, 利用(24)和(25)式求出

$$\frac{di}{dt} = \frac{kn^2 \left(\frac{n}{i_0} - 1 \right) e^{-knt}}{\left[1 + \left(\frac{n}{i_0} - 1 \right) e^{-knt} \right]^2} \quad (26)$$

图 1-4 画出了 $\frac{di}{dt}$ 的大致形状. $\frac{di}{dt}$ 达到最大值的时刻 t_0 即是传染病高潮时刻.

由 $\left. \frac{d^2 i}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0$ 不难得到

$$t_0 = \frac{\ln \left(\frac{n}{i_0} - 1 \right)}{kn} \quad (27)$$



式中传染系数 k 可由经验和统计数据估计.

图 1-4 模型 II 中病人人数增加率 $\frac{di}{dt}$ 的曲线

模型 III

记时刻 t 病愈免疫(包括死亡)的人数为 $r(t)$, 我们关于 $r(t)$ 所能做的既简单又有一定合理性的假设, 恐怕就是“单位时间的治愈率是常数”了. 这样, 这个模型的假设条件为:

I) 总人数为常数 n , 且

$$i(t) + s(t) + r(t) = n \quad (28)$$

II) 同模型 II 的假设 II).

III) 单位时间内病愈免疫的人数与当时的病人人数成正比, 比例系数为 l . l 称恢复系数.

根据假设 III), 有

$$\frac{dr}{dt} = li(t) \quad (29)$$

由于引入了 $r(t)$, 模型 II 的方程 (23) 式应改为

$$\frac{di}{dt} = ks(t) \cdot i(t) - \frac{dr}{dt} \quad (30)$$

表示单位时间内病人人数的增加应等于被传染的人数减去病愈的人数。

从 (28)、(29) 和 (30) 三式中消去 $r(t)$, 得到关于 $i(t)$ 和 $s(t)$ 的微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = ksi - li \\ \frac{ds}{dt} = -ksi \end{cases} \quad (31)$$

设初始条件为

$$\begin{cases} i|_{t=0} = i_0 \\ s|_{t=0} = s_0 = n - i_0 \quad (\text{即 } r|_{t=0} = 0) \end{cases} \quad (32)$$

由于方程组 (31) 难以求得解析解, 我们转到它的相平面上进行讨论。

由 (31) 式可得

$$\frac{di}{ds} = \frac{\rho}{s} - 1 \quad (33)$$

其中 $\rho = \frac{l}{k}$, 称特征指数。对于同一地区, 同一种传染病, ρ 是常数。方程 (33) 在初始条件 (32) 下的解很容易求得 ((32) 等价于 $s = s_0$ 时, $i = n - s_0$), 即

$$i = \rho \ln \frac{s}{s_0} - s + n \quad (34)$$

图 1-5 画出了相平面上过点 (s_0, i_0) 的这条相轨线, 由于 $i(t) \geq 0$, 所以只有实线部分是有意义的. 又因为方程 (31) 表明 $\frac{ds}{dt}$ 始终为负值, 所以图中箭头方向表示 t 增加时 $s(t)$ 和 $i(t)$ 的变化趋势.

由方程 (33) 可知, 当 $s = \rho$ 时, $\frac{di}{ds} = 0$, i 达到极大值. 由图 1-5 可见, 当 $s_0 > \rho$ 时, 随着 t 的增加, $i(t)$ 上升; 而当 $s_0 \leq \rho$ 时, $i(t)$ 单调下降, 这说明, 仅当传染病开始时健康者人数超过 ρ 的情况下, 传染病才会蔓延. ρ 是一个阈值 (俗称门槛). 通常 i_0 很小, 可近似认为 $s_0 \approx n$, 在总人数 n 不变的情况下, 提高门槛 ρ 的数值, 无疑对制止传染病的蔓延有利.

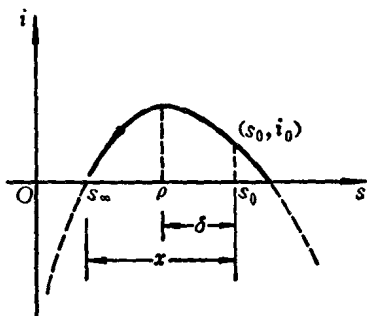


图 1-5 过 (s_0, i_0) 的相轨线及 x 与 s_0, ρ 的关系

而要提高 ρ , 根据 ρ 的定义, 应该使恢复系数 l 增大, 传染系数 k 降低, 这些意味着要提高该地区的医疗水平和卫生保健水平.

以上的分析显然从一个方面说明了模型 III 的正确性. 下面估计在一次传染病的流行过程中, 被传染的总人数. 它可以用 $t = 0$ 时, 健康者人数 s_0 与 $t \rightarrow \infty$ 时健康者人数 s_∞ 之差表示. 这个人数记作 x , 于是

$$x = s_0 - s_\infty \quad (35)$$

在图 1-5 表示的相轨线中, s_∞ 是轨线与 s 轴交点的坐标, 即有 $t \rightarrow \infty$ 时, $i \rightarrow 0$, 从轨线方程 (34) 式可知, s_∞ 应满足

$$\rho \ln \frac{s_\infty}{s_0} - s_\infty + n = 0 \quad (36)$$

将 (35) 代入 (36), 并注意到 $s_0 \approx n$, 则

$$x + \rho \ln\left(1 - \frac{x}{s_0}\right) \approx 0 \quad (37)$$

利用对数函数的台劳展开式（因 $\frac{x}{s_0} < 1$ ），

$$x - \rho\left(\frac{x}{s_0} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{s_0^2} + \dots\right) \approx 0$$

或写作
$$x\left(1 - \frac{\rho}{s_0} - \frac{\rho}{2s_0^2}x\right) \approx 0 \quad (38)$$

可解出
$$x \approx \frac{2s_0(s_0 - \rho)}{\rho} \quad (39)$$

记 $s_0 = \rho + \delta$ ， δ 可视为该地区人口中超过门槛 ρ 的部分。当 $\delta \ll \rho$ 时，(39)式给出

$$x \approx 2\delta \quad (40)$$

这个结果表明，被传染的总人数 x 约是 δ 的两倍。当 ρ 和 n 不变时， x 也不变。当门槛 ρ 提高时， δ 减小， x 随之减小。这就解释了在开始讨论传染病模型时提出的问题。

最后，简单介绍一下用统计数据检验模型 III 的情况。

通常，医院备有每周病愈和死亡人数的统计资料，这个数字相当于模型中的 $\frac{dr}{dt}$ (t 以周为单位)。根据上述模型，可以找出 $\frac{dr}{dt}$ 的近似表达式，与统计资料进行比较。

由方程 (29) 和 (31) 可得

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{s}{\rho}$$

它在初始条件 $s|_{r=0} = s_0$ 下的解为

$$s = s_0 e^{-r/\rho} \quad (41)$$

将 (41) 和 (28) 代入 (29) 式可得

$$\frac{dr}{dt} = l(n - r - s_0 e^{-r/\rho})$$