中央教育科学研究所专家推荐

素质教育与能力培养丛书

新概念学材

系列

新概念数学

（高中第一册）

■ 素质教育与能力培养研究组

高材生 Gaocaisheng

高能 Gaoneng

高分 Gaofen

中国人民大学出版社

XIN GAI NIAN XUE CAI XI LIE

- 根据教学大纲编写
- 适用于全国各个地区
- 不受不同版本教材的限制

责任编辑：柯 普 陈泽春
封面设计：红十月工作室/郑琪
版式设计：赵星华

新概念数学
（高中第一册）

"新概念学材系列"以中学教学大纲为依据，用发现法介绍教学大纲所规定的知识点，引导学生用自己的头脑去发现知识，形成提出问题和解决问题的能力，锻炼创新能力；与此同时，对要考试的知识加深理解，巩固记忆，促进应用。该系列是进行素质教育与能力培养的新型教材、新型教参、新型教辅。

新概念学材系列

新概念数学（初中第一册）
新概念数学（初中第二册）
新概念数学（初中第三册）
新概念数学（高中第一册）
新概念数学（高中第二册）
新概念数学（高中第三册）
新概念物理（初中第一册）
新概念物理（初中第二册）
新概念物理（高中第一册）
新概念物理（高中第二册）
新概念化学（初中全一册）
新概念化学（高中第一册）
新概念化学（高中第二册）
新概念化学（高中第三册）
新概念生物（高中全一册）

知识网络图系列

高中理科综合：数理化生知识网络图
高中文科综合：语英政史地知识网络图
初中理科综合：数理化生知识网络图
初中文科综合：语英政史地知识网络图
小 学 大 综 合：语数英自然社会知识网络图

能力开发系列

学习的策略：初中通用学习及考试方法
学习的策略：初中各科学习及考试方法
学习的策略：高中通用学习及考试方法
学习的策略：高中各科学习及考试方法
创新的策略：创新通用方法指南
创新的策略：创新能力训练与测验

ISBN 7-300-03797-6

9 787300 037974 >

ISBN 7-300-03797-6/G · 794
定价：17.00元

素质教育与能力培养丛书
新概念学材系列

新概念数学

（高中第一册）

素质教育与能力培养研究组
撰稿人　王庆成　王大辉　张利凯
李　蕊　李金辉　崔现伟　戴先华

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

新概念数学．高中．第一册/素质教育与能力培养研究组编
北京：中国人民大学出版社，2001
（素质教育与能力培养丛书·新概念学材系列）

ISBN 7-300-03797-6/G·794
Ⅰ．新…
Ⅱ．素…
Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 040555 号

素质教育与能力培养丛书
新概念学材系列
新概念数学
（高中第一册）
素质教育与能力培养研究组

出版发行：中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
邮购部：62515351　门市部：62514148
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销：新华书店
印　　刷：三河市实验小学印刷厂

开本：787×1092 毫米 1/16　印张：13
2001 年 7 月第 1 版　2001 年 7 月第 1 次印刷
字数：295 000

定价：17.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

素质教育与能力培养丛书·新概念学材系列

编者的话

根据全国教育工作会议推进素质教育的原则精神以及国务院基础教育工作会议指出的教育发展方向，在总结前一段“减负”和教改经验的同时，在阶段性、区域性实验探索的基础上，我们编写了这套蕴涵创新精神和思路的高效学习用书——《素质教育与能力培养丛书》，从多方面适应了不同类型和不同水平学生的学习需求。

《素质教育与能力培养丛书》分为三个系列，即新概念学材系列、知识网络图系列、能力开发系列。

新概念学材系列包括中学各年级数学、物理、化学、生物四科。具体包括：《新概念数学》共六册，初中一至三册、高中一至三册；《新概念物理》共四册，初中一至二册、高中一至二册；《新概念化学》共四册，初中一册、高中一至三册；《新概念生物》高中一册。

所谓“学材”是相对于“教材”而言的。“学材”是以学习者为中心的助学读物，主要用来自学，也可用来教授。新概念学材系列以中学教学大纲为依据，用发现法、探究法、自主学习法介绍教学大纲所规定的学科知识。这是该系列各书区别于一般教材、教参、教辅以及其他课外读物的显著特点和重大优点。

用发现法、探究法、自主学习法介绍教学大纲所规定的学科知识，可以取得培养素质和准备应试的双重好处。

一个好处是培养素质，引导学生用自己的头脑发现知识，逐渐学会探索和研究，掌握思维和认识的方法，形成提出问题和解决问题的能力，锻炼创新能力；在发展理智的同时发展情感，树立怀疑意识和批判态度，构建创新精神和创新个性，提高自主性和独立性。

另一个好处是准备应试，促使学生对要考试的知识充分关注，多侧面、多层次、大视野、大纵深地把握学科知识，从而加深理解，吃得透，化得开，巩固记忆，记得住，想得起，促进应用，用得上，用得活，解题稳、准、快，对付考试得心应手，游刃有余。

书中“动手空间”、“你知道吗”、“想一想”、“考考你”、“思考与实践”、“科学前沿”、“数学家的故事”、“化学史”、“小资料”、“生活小常识”等小栏目，可以锻炼学生的动手能力，开阔视野，拓展思路，把知识、生活、实践联系起来，把科学、技术、社会联系起来。

书中点缀着科技发展史上的真实故事以及日常生活现象，可以极大地调动学生的求知热情和学习兴趣。精心挑选的大量插图，使各书更加形象、生动、轻松、活泼。

该系列各书是体现素质教育要求的助学读物，是新型的“教材”、“教参”、“教辅”，适合广大中学生、教师、家长阅读。

《素质教育与能力培养丛书》以教育部制定的教学大纲为依据，因此适用于全国各个地区，而不受不同版本教材的限制。

目　　录

第一章　集合与逻辑

第一节　引　言

“集合”是数学王国中最抽象的概念之一,因为我们很难给它下一个严密的定义,但从另一个角度来看,“集合”也体现了数学中最直观的事物——一组指定的对象．集合也是“数学大厦”的根基之一,在这一直观概念上构建了极丰富而严密的理论．

用集合解决现实生活中的实际问题是很有效的．请看如下的例子．

如果已知一个班有 30 人,其中 5 人有兄弟,5 人有姐妹,你能判断这个班有多少人是独生子女吗？如果不能判断,你能说出还需哪些条件才能对这一问题做出判断吗?

事实上,如果注意到“有兄弟的人也可能有姐妹”,我们就知道,上面给出的条件不足以判断这个班独生子女的人数．为了解决这个问题,我们还必须知道“有兄弟且有姐妹的同学的人数”. 从逻辑上完全搞清这一问题并非易事,但如果应用集合的知识,我们就能清晰地描述并解决上述问题了．

下面的问题体现了逻辑推理的奇妙．

一位英国探险家到非洲探险．一天夜里,营地失窃．在追捕小偷时抓住了两个嫌疑犯,并且已知两人中有一个是小偷而另外一个则是清白的(有且只有一个是小偷——数学语言). 探险家问其中一个嫌疑犯:“你是小偷吗?”他回答说:“枯姆．”(土语)另一个嫌疑犯会讲英语,解释说:“他说‘不是’.”

请你判断谁是小偷．

首先,让我们假设小偷一定说谎,而清白者一定讲实话．如果第一个回答探险家问题的疑犯是小偷,他将回答“不是”,如果他不是小偷,他更应理直气壮地回答“不是”. 因此,不论第一位疑犯是不是小偷,他都将回答“不是”. 而第二个人的回答说明他自己没有说谎．由此断定,第一个回答探险家问题的嫌疑犯是小偷．

在上面的分析中,我们已在不知不觉中运用了逻辑推理和数学中的一些基本思考方式．本章我们将完整而系统地学习逻辑的初步知识．

第二节　集　合

一、集　合

1. 引入

初中数学中已出现过“集合”一词,比如在学习数的分类时,就用到“正数的集合”、“有

理数集合”等．另外,求解一元一次不等式 $3x+4<1$ 时会得它的“解集” $x<-1$.

然而,集合这一概念却是数学上的原始概念之一,即不能用别的概念导出它的．它像几何学中的“点”、“直线”那样,只能用一组公理去刻画．现在,我们给出一个朴素的说法如下：

“在一定范围内指定的个体事物的全体,当将它们看做一个整体时,我们把这个整体称为一个集合,其中每个个体事物叫做该集合的元素．”

下面举几个集合的例子：

【例1】 2,4,7,9,10 五个自然数构成的集.

【例2】 A,B,C 三个字母构成的集.

【例3】 0与1之间的全体实数.

【例4】 全体中国人.

【例5】 中国的省．

我们注意到,在上面集合的例子中,一个集合中的所有元素是互不相同的．即集合中的元素没有重复,或者也可以认为,任何两个相同的元素在同一集合时,只能算做此集合的一个元素,这就是集合元素的互异性．另外,对上面的集合我们能清楚明确地判定某元素是否在这个集合中(属于此集合).例如对集合“全体中国人”,那么只要某人的国籍是中国,那么他(她)就在这个集合内．但“全体高个子中国人”是否组成一个集合呢?面对一位身高 1.75 m 和一位身高 1.80 m 的两个中国人,你可能会说身高 1.75 m 者不是“全体高个子中国人”中的一员;但面对身高分别是 1.75 m 和 1.60 m 的两位中国人,你却有理由认为身高 1.75 m 者是“全体高个子中国人”中的一员．从上面的分析中,我们发现“全体高个子中国人”中的元素不具有确定性,或者说其中的个体不具备指定性,不符合集合的定义,因此它不能构成一个集合．

综上,一个集合应具备如下属性：

(1)*集合中的元素是互异的*；

(2)*集合中的元素必须是确定的*．

集合常用大写英文字母表示,集合中的元素常用小写英文(或拉丁)字母表示．如 a 是集合 A 的元素,称“a 属于 A”,记为 $a\in A$；如 a 不是集合 A 的元素,称“a 不属于 A”,记为 $a\notin A$(或 $a \,\overline{\in}\, A$)．

下面是一些常用数集及其记法：

“全体自然数组成的集合”通常简称自然数集,记为 $\mathbf{N}$;

“全体整数的集合”通常简称整数集,记为 $\mathbf{Z}$;

“全体有理数的集合”通常简称有理数集,记为 $\mathbf{Q}$;

“全体实数的集合”通常简称实数集,记为 $\mathbf{R}$.

另外,常以 $\mathbf{Z}^+$ 表示“正整数集”,$\mathbf{R}^+$ 表示“正实数集”.

【问题1】 $\mathbf{Z}^+$ 与 $\mathbf{N}$ 有何关系?

2. 表示方法

通常一个具体集合 A 可以通过列举其元素 $a,b,c,\cdots$ 来表示,并记为 $A=\{a,b,c,\cdots\}$. 这种集合表示法称为列举法．

如例 1 中集合可表示为$\{2,4,7,9,10\}$. 而自然数集则可表示为 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$. 但例 3 中的集合就不能再用列举法来表示了(**问题 2:** 为什么?),但我们可将它记为{0,1之间的全体实数}或{大于 0 且小于 1 的实数},显然这种表示方法与列举法不同,我们称之为描述法:

通过某集合中的各元素必须且只须满足的条件"P"来表示该集合,并记为:

$$A=\{x\mid x\text{ 满足条件 }P\}(\text{或 }A=\{x:x\text{ s.t. }P\})$$[①]

因此,例 3 中的集合可表示为$\{x\mid 0<x<1$ 且 x 是实数$\}$或$\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<1\}$或$\{x\mid 0<x<1,x\in\mathbf{R}\}$.

【例 6】 请分别用列举法和描述法表示集合.

(1)集合 A 是所有大于 0 且小于 10 的奇数组成的集合.

列举法:$A=\{1,3,5,7,9\}$

描述法:$A=\{x\mid 0<x<10$ 且 x 是奇数$\}$

(2)集合 A 是方程 $x^2-1=0$ 的解集.

列举法:$A=\{1,-1\}$

描述法:$A=\{x\mid x^2-1=0\}$

(3)集合 A 是大于 10 的自然数组成的集合.

列举法:$A=\{11,12,13,\cdots\}$

描述法:$A=\{x\mid x>10$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$

或 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x>10\}$

(4)集合 A 是 20 世纪地球上身高超过 10m 的人组成的集合.(已知在过去的 20 世纪地球上没有出现过身高超过 10m 的人)

描述法:$A=\{$地球上的人并且他(她)们的身高超过 10m$\}$

列举法:$A=\phi$(没有元素)

在例 6 中,(1)和(2)中集合的元素个数都是有限的,而(3)中的集合却有无穷多个元素.一般地,我们称含有有限个元素的集合为有限集,含有无限个元素的集合为无限集.

【问题 3】 $A=\{$全体有限集组成的集合$\}$是否是集合?

在例 6(4)中,集合 A 中没有元素,我们一般把不含任何元素的集合叫做空集,记为 ϕ.

【问题 4】 你还能创造出其他的集合表示法吗? 如果你有其他的表示法,请说出这种表示法的好处.

3. 答问

【答问 1】 $\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$

$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$

即 $\mathbf{N}^*$ 中的元素与 $\mathbf{N}$ 中的元素不完全相同.

【答问 2】 按集合中元素的个数,可将集合分为两类——有限集与无限集.

如通常所认为的那样,有限集的典型特性应该是具有一个标志其元素个数的数(其实是自然数).而要确定有限集中元素的个数,只需(而且还是可行的)一个一个地来

① s.t. 是英文 satisfy(满足)的缩写.

"数".这等同于把集合中各元素按任一方式编号：$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_k, \cdots, a_n\}$，其中 $i\neq k$ 时，a_i 和 a_k 是不同的元素．这样就把 A 与自然数的某一截断 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 一对一地对应起来了，最后对应的一个自然数 n 显然就是 A 的元素的"个数".由此得出结论：如果两个集合元素个数相同，那么这两个集合的元素可以彼此一对一地对应起来（称一一对应）．我们作个比喻，在一个教室内，如果每个人都有一个座位，而且每个座位上都有一个人（这样就排除了有人没有座位或有空座的情况），那么我们根本不用一个一个地去"数"，便立刻知道教室中人数和座位数是相同的．

上述讨论虽然只适用于有限集，但其中函数的"一一对应"的思想却可以推广到无限集．

再如，虽然 $\mathbf{N}^*$ 是无限集，但其中元素可以由小到大没有遗漏地数下去：

$$1,2,3,\cdots,n,n+1,n+2,\cdots$$

在数学上称 $\mathbf{N}^*$ 为"可数集".但集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|0<x<1\}$ 却没有上述性质，因为对任何 $a_1\in A, a_2\in A$，只要 $a_1\neq a_2$ 则一定存在 a_3 且 $a_1<a_3<a_2$，当然，$a_3\in A$，故集合 A 是"不可数"的，因此 A 不可以用列举的方法表示．

事实上，在近代数学中，已有相当完整的理论专门讨论集合元素"个数"的问题．

【答问 3】 集合 A 具备指定性和互异性，因此 A 是一个集合．

【答问 4】 瑞士数学家 Euler（欧拉）给了这个问题一个绝好的回答，因为他首创了用图形表示集合．19 世纪末，英国逻辑学家 Venn（文恩）重新采用了这种方法，把一个集合画成一条封闭曲线．

例如，对 $A=\{1,2,4,5\}$

$B=\{1,2,3,7\}$ 文恩将其表示为图 1－1.

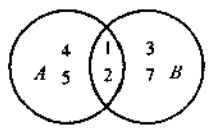

图 1－1

你是否注意到了这种表示法的好处？——使两个（或多个）集合之间的关系一目了然．这种图称为欧拉图（或文恩图）.

"直观是照亮认识途径的光辉．"这是著名教育家苏霍姆林斯基的一句名言．数学上的直观，往往有助于人们对抽象概念的理解．而文恩图在这一点上就做得极好．

4. 思维认知

当伽利略从比萨斜塔上抛下的两个铁球同时落地时，世界为之震惊，震惊于人类自身思维上的局限——往往用一些惯用的，但偏离正确的思维模式来思考并得出结论．

下面的例子是一个简单但反映我们思维局限的极好例子．

某校某年级有四个班．甲、乙两位教师各教两个班．甲教 1、2 班；乙教 3、4 班．1、2、3、4 班各班人数依次为 50、50、60、40，期末考试及格率依次是：84%、42%、80%、40%，见下表 1－1.

表 1－1

	1	3	2	4
甲	84%		42%	
乙		80%		40%

校长看后大为恼火，把教师乙批评了一顿．不料教师乙申辩说，该表扬的应该是他！校长非常奇怪，拿出笔认真算了一下，果真乙所教的学生及格率比甲所教的高．请大家自己算一算．

思维的局限是潜移默化、逐渐形成的，几乎没有人能完全超越它，但只要我们注意到了自身思维的缺陷，有意识地去跨越这种局限，就有可能逐步建立更加正确的思维方式．

【思考与实践】

1. 指出下列描述中哪些是集合，哪些不是集合．如果是集合，指出哪些是有限集，哪些是无限集．

(1)你的全体家庭成员；

(2)冬季的月份；

(3)联合国所有会员国；

(4)某一指定时刻，身高超过 1.50 m 的所有中国人；

(5)英文字母表中不常用的字母；

(6)平面内到一个定点 O 的距离等于定长 $l(l>0)$的所有的点 P；

(7)世界上的大河．

2. 把下列集合用另外的方法表示出来：

(1)$\{x \mid x^2=4, x\in \mathbf{R}\}$　　(2)$\{x \mid x=\frac{1}{2}x, x\in \mathbf{R}\}$

(3)$\{x \mid x=x+\frac{1}{2}, x\in \mathbf{R}\}$　　(4)$\{x \mid 2<x<5, x\in \mathbf{Z}\}$

(5)$\{x \mid x^2+x-1=0, x\in \mathbf{R}\}$　　(6)$\{2,4,6,8\}$

(7)$\{1,5\}$.

3. 用欧拉图表示下列集合(将每小题中的集合画在一起)：

(1)$\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{R},\mathbf{Z}^-$；

(2)$A=\{1,2,3,4,5\}$，　$B=\{1,2\}$，　$C=\{2,4\}$.

【答案与提示】

1.(1)有限集；(2)有限集；(3)有限集；(4)有限集；(5)不是集合；(6)无限集；(7)不是集合．

2. (1)$\{2,-2\}$　　(2)$\{0\}$

(3)空集 ϕ　　(4)$\{3,4\}$

(5)$\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$　　(6)$\{x \mid x=2k, k=1,2,3,4\}$

(7)$\{x \mid (x-1)(x-5)=0, x\in \mathbf{R}\}$

3. 如图 1－2、图 1－3 所示．

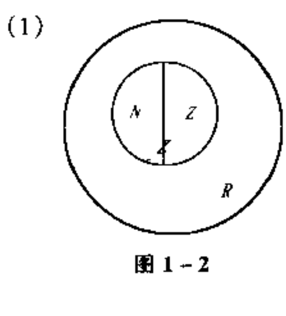

图 1－2

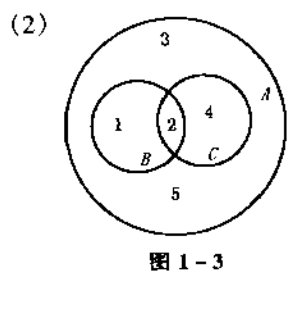

图 1－3

二、子集与集合的运算

1. 子集

观察如下的集合并给出它们之间的关系.

$A=\{1,2\}$

$B=\{3,4\}$

$C=\{1,2,3,4\}$

$D=\{x \mid x^2-1=0\}$

$E=\{-1,1\}$

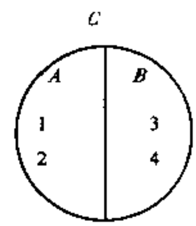

图 1-4

在图 1-4 所示的欧拉图中可以看出,集合 A(或 B)中的元素都属于集合 C. 集合 D 与 E 是同一个集合的两种表述,在数学上,我们把集合间的关系总结如下:

对两个集合 A 与 B,如果 A 的每一个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subseteq B$(读作"A 包含于 B");或称"B 包含 A",记为 $B\supseteq A$. 例如:$\{1,2\}\subsetneq\{1,2,3\}$.

当集合 A 不包含于集合 B,或集合 B 不包含集合 A 时,则记作 $A\not\subseteq B$(或 $B\not\supseteq A$). 例如:$E=\{-1,1\}\not\subseteq C$.

另外规定,空集是任何集合的子集,也就是说,对任何一个集合 A,有 $\phi\subseteq A$.

通过上面的讨论,我们知道 $D=\{x \mid x^2-1=0\}\subseteq E=\{-1,1\}$ 并且 $E\subseteq D$. 而事实上 D,E 是同一个集合 . 一般地,对两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素也都是集合 A 的元素 .(即:$A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$)我们就称集合 A 等于集合 B,记作:$A=B$

在上面对集合相等的定义中我们知道 $A\subseteq A$,而这显然与 $\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$ 略有不同 . 由此我们给出"真正的子集"的概念 . 对于两个集合 A 与 B,如果 $A\subseteq B$ 并且 $A\neq B$,我们就说集合 A 是集合 B 的真子集,记作:$A\subset B$(或 $B\supset A$ 或 $A\subsetneq B$ 或 $B\supsetneq A$).

显然,空集是任何非空集合的真子集 .

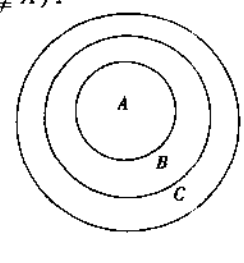

图 1-5

对于集合 A,B,C,如果:$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,则可知 $A\subseteq C$.
这一关系在(图 1-5)中是一目了然的 .

事实上,设 x 是 A 的任意一个元素(任何一个 $x\in A$),因为 $A\subseteq B$,由"$\subseteq$"的定义可知 $x\in B$,又因为 $B\subseteq C$,所以 $x\in C$,从而由"$\subseteq$"的定义可知 $A\subseteq C$.

同样可知:如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$,那么 $A\subset C$.

【例 1】 写出 $A=\{1,2,3\}$ 的所有子集,并指出哪些是真子集 .

解: A 的所有子集是:$\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}$.

其中,除 $\{1,2,3\}$ 外都是 A 的真子集 .

【问题 1】 $n\in\mathbf{N}^*$,集合 $A=\{x \mid x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\leqslant n\}$ 有多少个子集?

【例 2】 请写出图 1-6 中集合 A,B,C,D 的包含关系 .

解：　$B\subset A$　$C\subset A$　$D\subset A$　$D\subset C$

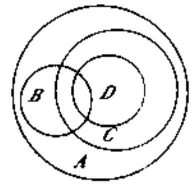

图 1-6

2. 集合的运算

集合 $A=\{1,2\}$ 与 $B=\{3,4\}$ 都是 $C=\{1,2,3,4\}$ 的真子集．直观上,集合 A 中的元素"加上"集合 B 中的元素就组成了集合 C. 这一点启发我们用类似数的运算来揭示集合间更为深刻的关系．

数学上,从给定的一些集合出发,我们可以通过所谓"集合的运算"做出一些新的集合,其中最常用的运算有"并"、"交"、"减"三种．

(1)设 A,B 是任意两个集合,C 是一切或属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合,则称 C 为 A 与 B 的和集(或并集),简称和或并．记为:$A\cup B$(读作"A 并 B"),即 $C=A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.图 1-7 是 $A\cup B$ 的示意图．

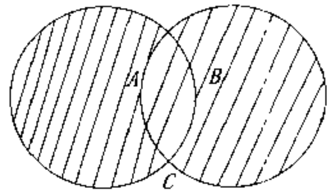

图 1-7

由并的定义可知,对任何集合 A 有:$A\cup A=A$　$A\cup\phi=A$

并集的概念可以推广到任意多个集合的情形．设 $n\in\mathbf{N}^*$,集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并定义为:由一切或属于 A_1 或属于 A_2 或…或属于 A_n 的元素组成的集合,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,即

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid x\in A_1 \text{ 或 } x\in A_2 \text{ 或}\cdots x\in A_n\}$$

【例 3】　$A=\{1,2\},B=\{2,3\},C=\{5,6\}$,求 $A\cup B\cup C$.

解：　$A\cup B\cup C=\{1,2,3,5,6\}$

对上面的例子,可做如下考虑:

①令 $D=A\cup B=\{1,2,3\}$

而　$D\cup C=\{1,2,3,5,6\}$

因此　$A\cup B\cup C=D\cup C$

即　$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C$

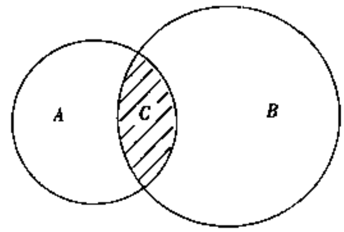

图 1-8

②令 $E=B\cup C=\{2,3,5,6\}$

而　$A\cup E=\{1,2,3,5,6\}$

因此　$A\cup B\cup C=A\cup E$

即　$A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)$

③令 $F=A\cup C=\{1,2,5,6\}$

而　$F\cup B=\{1,2,3,5,6\}$

故　$A\cup B\cup C=F\cup B$

即　$A\cup B\cup C=(A\cup C)\cup B$

④对任何两个集合 A,B,有 $A\cup B=B\cup A$.

通过对例 3 的分析,我们猜测集合的并(多个)可能满足结合律和交换律．这一点是我们从一个题目中总结出来的,而发现问题是解决问题的一半．事实上,根据定义,可以很容易地证明这一猜想的正确性,请同学自己给出证明．

【例 4】　$A_i=\{i\},i=1,2,\cdots,n,n\in\mathbf{N}^*$

则　$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n=\{1,2,\cdots,n\}$.

我们把 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n$ 定义为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,上面的表达(即:把 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 定义为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$)可简写为:$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. 故例 4 答案可写为:$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\{1,2,\cdots,n\}$.

(2)设 A,B 是任意两个集合,由一切既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合 C,称为 A 和 B 的积集(或交集),简称积(或交),记为:$C=A\cap B$(读作"A 交 B"),即:

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$. 上页图 1-8 给出了交集的示意.

同样,交集的概念也可以推广到多个集合的情形.

【问题 2】 你能给出多个集合的交集的定义吗?

【例 5】 $A=\{$全体等腰三角形$\}$,

$B=\{$全体直角三角形$\}$,求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{$全体等腰三角形$\}\cap\{$全体直角三角形$\}$

$=\{$全体等腰直角三角形$\}$

【例 6】 $D=\{$直角坐标系 xOy 内的点$\}$

$A=\{(x,y)\in D\mid 1\leqslant x\leqslant 2,1\leqslant y\leqslant 2\}$,

$B=\{(x,y)\in D\mid 1.5\leqslant x\leqslant 2.5,0\leqslant y\leqslant 1.5\}$,求 $A\cap B$.

解: 由图 1-9 可知:

$A\cap B=\{(x,y)\in D\mid 1.5\leqslant x\leqslant 2,1\leqslant y\leqslant 1.5\}$.

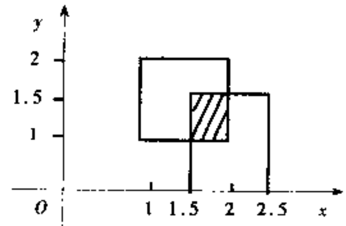

图 1-9

由交集的定义可知,对任何集合 A,B 有:

$A\cap B=B\cap A,A\cap A=A,A\cap\phi=\phi$.

(3)设 A,B 是两个任意集合,集合 C 是由一切属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合,则称 C 为 A 减 B 所得的差集,记为:$C=A-B$(或 $C=A\setminus B$),即:$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 图 1-10 给出了差集的示意.

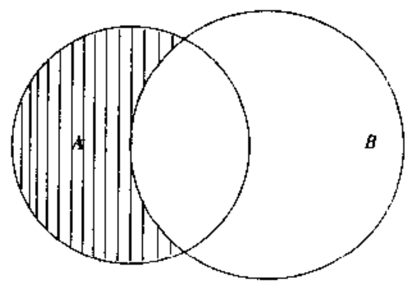

图 1-10

注意:这里并不要求 $A\supset B$.

【问题 3】 是否有:$(A-B)\cup B=A$?

特别地,当 $S\supset A$,称 $S\setminus A$ 所表示的集合(图 1-11)为 A 关于 S 的余集,记为 C_SA(读作"A 关于 S 的余集"). 如果没有必要标出 S,也可简记为 CA.

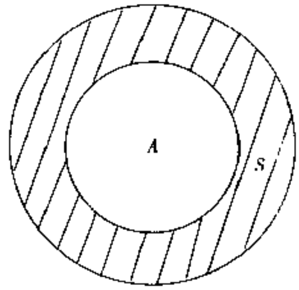

图 1-11

【例 7】 求 C_RQ,C_ZN,C_ZZ^-.

解: $C_RQ=\{$无理数集$\}$.

$C_ZN=\{$非自然数集$\}$

$=\{x\mid x$ 是负整数$\}$.

$C_ZZ^-=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x\notin\mathbf{Z}^-\}$

$=\{x\mid x\in\mathbf{Z}^+\}\cup\{0\}$

$=\{x\mid x\in\mathbf{N}\}$.

下面不加证明地给出几条集合运算规律，

(1)$(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$

(2)$C_s\phi=S$

$C_sS=\phi$

(3)$A\cup C_sS=S$

$A\cap C_sA=\phi$

(4)$C_s(C_sA)=A$

(5)$A\setminus B=A\cap C_sB$

请同学自己给出证明．

【问题4】 在了解了集合的三种基本运算后，你是否想到了这些运算间的复合运算？如果你已在考虑这个问题，你能否给出一些复合运算的规律？例如，$A\cup(B\cap C)\overset{?}{=}(A\cup B)\cap(A\cup C)$或$A\cap(B\cup C)\overset{?}{=}(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

一般地，如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看做一个全集，全集通常用 υ 表示．

3. 答问

【答问1】 首先，让我们按集合 A 的子集元素个数把 A 的子集分类．

第1类：子集的元素个数为0（即为 ϕ）；

第2类：子集的元素个数为1；

第3类：子集的元素个数为2；

⋮

第 $n-1$ 类：子集的元素个数为 $n-2$；

第 n 类：子集的元素个数为 $n-1$；

第 $n+1$ 类：子集的元素个数为 n，即这一类子集元素必须是$\{1,2,3,\cdots,n\}$. 这类子集只有一个且是 A 本身．

要计算 A 的子集总个数，必须知道上面每一类子集的个数．

第1类子集中只有一个即 ϕ；

第2类子集为$\{i\}$，$i=1,2,\cdots,n$，故有 n 个第2类子集；

第3类子集为：

$n-1$ 个	$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\cdots,\{1,n\}$
$n-2$ 个	$\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\cdots,\{2,n\}$
$n-3$ 个	$\{3,4\},\{3,5\},\cdots,\{3,n\}$
$n-4$ 个	$\{4,5\},\cdots,\{4,n\}$
⋮	⋮
1个	$\{n-1,n\}$

以上共为 $n-1$ 行，且表中没有重合的子集，也没有遗漏的子集．因此可以计算第3类子集的个数为：

设 $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=S$

则 $1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=S$