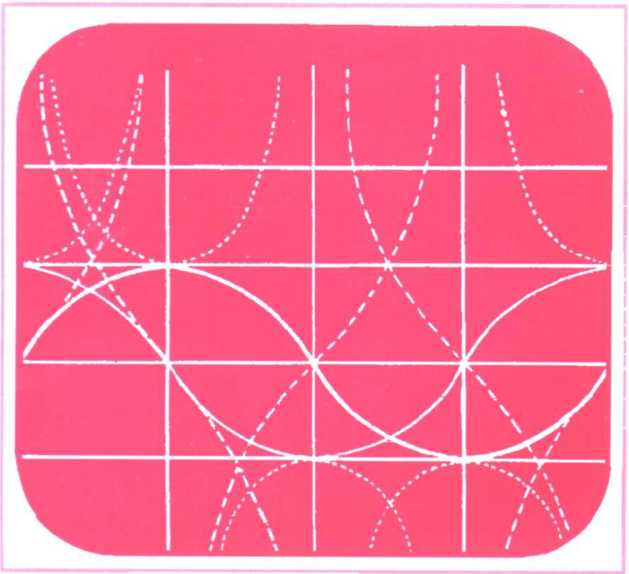

单 墫 著

集合及其子集

上海教育出版社

集合及其子集

单　壿著

上海教育出版社

图书在版编目（C I P）数据

集合及其子集 / 单墫著．—上海：上海教育出版社，2001.6

ISBN 7-5320-7482-X

Ⅰ.集… Ⅱ.单… Ⅲ.集论 Ⅳ.0144

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第034491号

集合及其子集

单 墫 著

上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

（上海永福路 123 号　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　上海市委党校印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.5 字数 138,000

2001 年 7 月第 1 版　2001 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—5,150 本

ISBN 7-5320-7482-X/G·7638 定价：7.20 元

序

集论，是全部数学的基础.

数学大师 Cantor，建立了基数、序型等重要概念，将研究从有限集推进到无限集，创立了集论这一数学分支.

近三十年来，随着组合数学的蓬勃发展，关于有限集及其子集族，又有很多的研究，得出很多重要而且优美的结果.

但是，国内至今尚未见到专门介绍集论的通俗读物，希望这本小书能起抛砖引玉的作用.

感谢王文才先生与叶中豪先生，没有他们的鼓励与支持，这本小书是不可能问世的.

单 墫

目　录

第一章　集　　合

1.1　集　　合

具有某种性质的事物，它们的全体称为一个集合. 这些事物称为这个集合的元素.

集合简称为集. 元素简称为元.

例如，某一学校的学生组成一个集合. 某国的官员组成一个集合. 地球上的老鼠组成一个集合等等.

正整数（自然数）组成一个集合，通常记为 $\mathbf{N}$.

整数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{Z}$.

有理数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{Q}$.

实数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{R}$.

复数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{C}$.

平面上的点组成一个集合，通常称为平面点集.

集合 A 中的元素，如果有无限多个，那么 A 称为无限集；如果 A 中的元素仅有有限多个，那么 A 称为有限集.

用 $|A|$ 表示 A 的元数（即元素的个数）. 对于无限集，$|A| = \infty$（无穷大）.

不含任何元素的集合，称为空集. 通常记为 $\varnothing$. 显然，$|A| = 0$ 是 $A = \varnothing$ 的充分必要条件.

1.2 从属关系

如果事物 a 是集合 A 的元素，那么就说“a 属于 A”或“a 在A 中”，并记为

$$a \in A.$$

如果 a 不是 A 的元素，那么就说“a 不属于 A”，并记为

$$a \notin A\text{（也有些书上写成 } a \overline{\in} A\text{）}.$$

在 A 为有限集时，我们常常将 A 的元素全部列举出来，例如

$$A = \{1, 2, 3\},$$

表示 A 是三元集（三个元素的集合），它的元素是 1，2，3（即 $1 \in A$，$2 \in A$，$3 \in A$）. 又如

$$B = \{a, b, c, d\},$$

表示 B 是四元集，它的元素是 a，b，c，d.

在上述记号中，花括号内写出的元素应当互不相同，即每个元素恰出现一次. 至于元素出现的顺序，不必考虑. 我们认为

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\},$$
$$\{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}$$

都是同一个集.

仅含一个元素的集称为单元素集，例如

$$A = \{5\}.$$

对于元数较多的集合或者无穷集，常常采用下面的记号. 例如

$$A = \{a \mid a \text{ 为正偶数}\},$$

表示 A 是正偶数组成的集. 又如

$$B=\{(x, y) \mid x, y \text{ 均为整数}\},$$

表示 B 是平面上整点(格点)的集合.

在上述记法中,括号里写一个代表元素,在竖线后面写明它所具有的性质.

在同时讨论几个集合时,下面的从属关系表是很有用的:

表 1.2.1

集合\元素	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
A_1	1	0	1	$\cdots$	1	0
A_2	1	1	0	$\cdots$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	1	1	1	$\cdots$	1	0

表的 m 行(最上面一行除外)表示 m 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$; 表的 n 列(最左面一列除外)表示 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

若 $a_i \in A_j (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$, 则在 a_i 所在列与 A_j 所在行的交叉处写上 1. 若 $a_i \notin A_j$, 则写上 0. 例如表 1.2.1 中,

$$a_1 \in A_1, a_1 \in A_2, \cdots, a_1 \in A_m,$$

$$a_2 \notin A_1, a_2 \in A_2, a_3 \notin A_2, \cdots, a_n \notin A_1.$$

还可看出

$$A_1=\{a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}\},$$

$$A_2=\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\},$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_n=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}\}.$$

当然，也可以用行表示元素，列表示集合，这没有实质性的不同.

1.3 包　　含

如果集合 A 的元素都在集合 B 中，那么 A 称为 B 的子集，并记为

$$A \subseteq B\ (\text{或 } B \supseteq A),$$

读做 B 包含 A 或 A 包含于 B 中.

显然有 $A \subseteq A$，即每个集合都是它自身的子集.

如果 $A \subseteq B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么称 A 为 B 的真子集，并记为

$$A \subset B\ (\text{或 } B \supset A)$$

(也有些书上用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集，而用 $A \subsetneq B$ 表示 A 是 B 的真子集)，读做 B 真包含 A 或 A 真包含于 B 中. 例如

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C},$$

即自然数集是整数集的真子集，整数集是有理数集的真子集，有理数集是实数集的真子集，实数集是复数集的真子集.

如果 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$，那么 A 的元素都是 B 的元素，B 的元素也都是 A 的元素. 因此 A，B 是同一个集合，即 $A = B$.

约定空集 $\varnothing$ 为每一个集合的子集.

并不是任意两个集合之间都有包含关系. 例如

$$A = \{1, 2\},\ B = \{4, 5, 6\},$$

则 A 不是 B 的子集，B 也不是 A 的子集.

显然,当 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ 时, $A \subseteq C$, 即$\subseteq$关系具有传递性.

综上所述,$\subseteq$关系具有:

(i) 反身性,即 $A \subseteq A$;

(ii) 传递性,即 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ 推出 $A \subseteq C$;

(iii) $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ 推出 $A = B$.

我们称这样的关系为半序关系(或偏序关系).

1.4 并 与 交

给定两个集合 A, B. 称集合

$$C = \{c \mid c \text{属于} A \text{或} B\}$$

为 A, B 的并集(简称为并),记为 $A \cup B$. 例如,

(i) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$, 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(ii) 若 A 是猫的集合,B 是黑猫的集合,则 $A \cup B = A$ (因为黑猫是猫). 一般地,若

$$A \supseteq B,$$

则

$$A \cup B = A.$$

反之亦真.

(iii) 若 A 是正实数的集合,B 是负实数的集合,则 $A \cup B$ 是非零实数的集合.

显然 $A \cup B \supseteq A$, $A \cup B \supseteq B$, 并且

$$A \cup B = B \cup A.$$

类似地，可以定义多个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集：

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\ &= \{a \mid a \text{ 至少属于一个 } A_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.\end{aligned}$$

例如对(iii)中的 A, B，有

$$A \cup B \cup \{0\} = \mathbf{R}.$$

对于给定的两个集合 A, B，称集合

$$C = \{c \mid c \text{ 同时属于 } A,\ B\}$$

为 A, B 的交集（简称为交），记为 $A \cap B$. 例如，

(i) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$，则

$$A \cap B = \{1, 4\}.$$

(ii) 若 A 是猫的集合，B 是白猫的集合，则 $A \cap B = B$. 一般地，若

$$A \supseteq B,$$

则

$$A \cap B = B.$$

反之亦真.

(iii) 若 A 是正实数的集合，B 是负实数的集合，则 $A \cap B = \varnothing$.

显然 $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$，并且

$$A \cap B = B \cap A.$$

交集符号可以省去，例如 $A \cap B$ 常写成 AB.

类似地，可以定义多个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$= \{a \mid a \text{ 属于每一个 } A_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

显然 $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup A = A \cap A = A$.

1.5 差 与 补

给定两个集合 A, B. 称集合

$$C = \{c \mid c \in A \text{ 并且 } c \notin B\}$$

为 A 减 B,记为 $A - B$. 例如,

(i) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$, 则

$$A - B = \{2, 3\}.$$

(ii) 若 A 是猫的集合,B 是黑猫的集合,则 $A - B$ 为不是黑色的猫的集合.

(iii) 若 A 是正实数的集合,B 是负实数的集合,则 $A - B = A$.

注意差不具有对称性,即一般说来 $A - B$ 与 $B - A$ 是不相同的. 例如上面的三个例子,在(i)中, $B - A = \{5, 6\}$. 在(ii)中, $B - A = \varnothing$. 在(iii)中, $B - A = B$.

为了方便,常常将一个集合作为全集合,它由一切事物(或我们所考虑的一切事物)组成. 例如,考虑平面上的点集时,可以将平面点集(即平面上所有点组成的点集)作为全集. 考虑实数时,可将 **R** 作为全集,而考虑复数时,应将 **C** 作为全集.

全集通常用 I 表示.

对任一集 A,称 $I - A$ 为 A 的补集,并用 A'表示. 显然

$$A \cap A' = \varnothing,\ A \cup A' = I.$$

A'由不属于 A 的元素组成,因此

$$(A')' = A,$$

即补集的补集是原集.所以 A 与 A' 互为补集.显然 $\varnothing' = I$, $I' = \varnothing$.

由定义, $A - B = A \cap B'$.

1.6 Venn 图

利用圆(这里指圆盘)来表示集合的 Venn 图,是帮助理解集合之间关系的直观工具.

例如,图 1.6.1 中,两个圆分别表示集合 A 与 B,阴影部分表示 $A \cup B$. 图 1.6.2 中的阴影部分表示 $A \cap B$. 图1.6.3, 1.6.4 中的阴影部分分别表示 $A-B$ 与 $B-A$. 图 1.6.5 表示

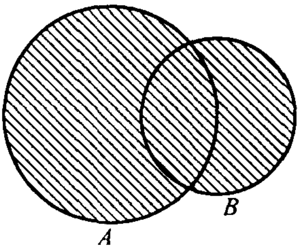

图 1.6.1 $A \cup B$

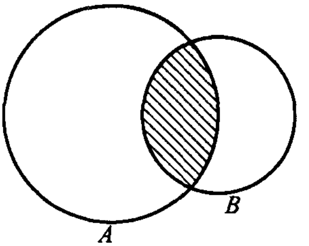

图 1.6.2 $A \cap B$

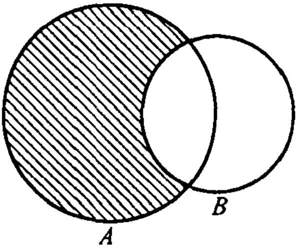

图 1.6.3 $A-B$

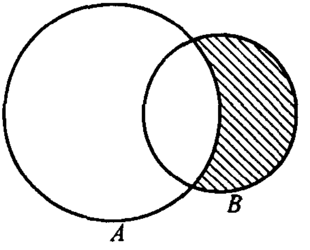

图 1.6.4 $B-A$

$A \subseteq B$. 在图 1.6.6 中，大圆表示全集 I，阴影部分是 A 的补集 A'.

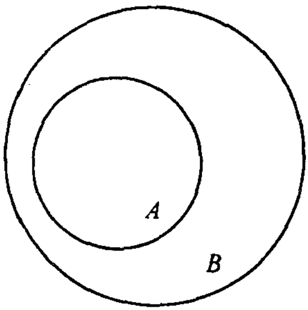

图 1.6.5　$A \subseteq B$

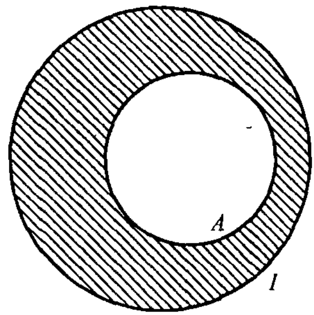

图 1.6.6　A'

将圆改为矩形也无不可，这并不影响问题的实质(谁包含谁).

1.7　有关集合的等式(Ⅰ)

本节讨论一些有关集合的等式.

例 1(De Morgan 公式)　对任意两个集 A, B，均有

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \tag{1}$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'. \tag{2}$$

解　首先证明(1). $A \cup B$ 是在 A 或在 B 中的元素组成的集，因此 $(A \cup B)'$ 由不在 A 也不在 B 中的元素组成. 这也就是 $A' \cap B'$.

如果考虑 Venn 图，那么 $(A \cup B)'$ 与 $A' \cap B'$ 都是图 1.7.1 中的阴影部分(为方便起见，全集 I 用一矩形表示).

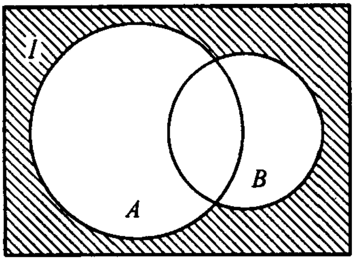

图 1.7.1

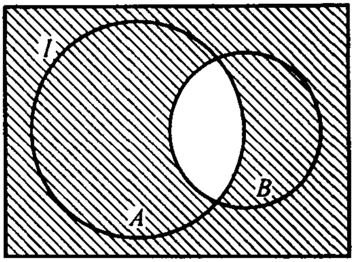

图 1.7.2

同样可证(2). 图 1.7.2 中的阴影部分表示(2)的左边，也表示(2)的右边.

例 2(并与交的结合律)　对任意集合 A, B, C 均有

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \tag{3}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \tag{4}$$

解　只需注意(3)式两边均表示至少属于 A, B, C 之一的那些元素组成的集合. (4)式两边均表示同时属于 A, B, C 的那些元素组成的集合.

(3), (4)也不难用 Venn 图证明.

于是，证明有关集合的等式，已经有两种方法：

(i) 考虑等式两边(或其他有关式子)的意义；

(ii) 利用 Venn 图.

例 3(并与交的分配律)　对于任意集合 A, B, C 均有

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{5}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{6}$$

解　仍可用前面所说的两种方法证明，但这里介绍第三种方法，即