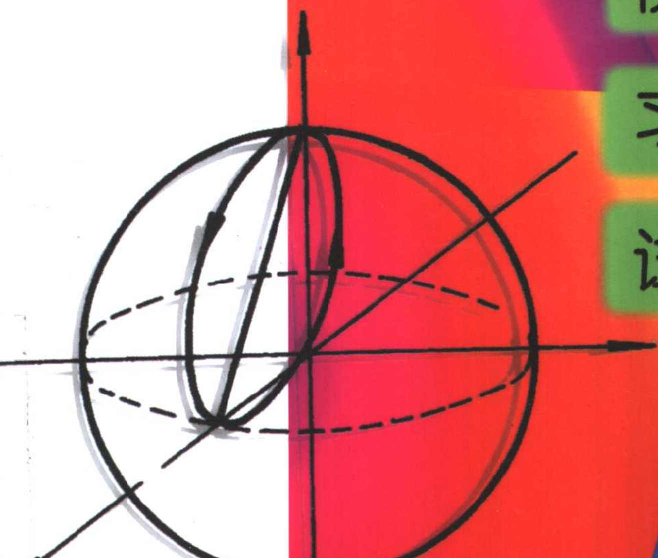
高等数学（同济新版）

精讲精练

罗利民 主编

要点精讲
例题精析
习题精选
试题精练



华南理工大学出版社

高等数学（同济新版）精讲精练

罗利民　主编

華南理工大學出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(同济新版)精讲精练/罗利民主编.—广州:华南理工大学出版社,2001.9

ISBN 7-5623-1728-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.罗…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 046068 号

总 发 行：华南理工大学出版社
(广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640)
发行电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑：王魁葵　欧建岸
印 刷 者：江门日报印刷厂印装
开　　本：850×1168　1/32　**印张**：13.75　**字数**：350 千
版　　次：2001 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1—5000 册
定　　价：22.00 元

内 容 简 介

本书是学习高等数学的教学辅导书，结合同济大学最新版《高等数学》编写。全书共十二章，内容包括一元函数微积分学、空间解析几何、多元函数微积分学、级数与微分方程。每一章分为基本内容、问题与题解两部分。题目类型包括是非题、选择题、计算题、证明题与应用题。解题详细，方法多样，便于自学。全书分为四个单元(三章为一单元)，每一单元后面配有三套试题及其解答与评分标准。在书末附有第一、二学期期末高等数学试题及1999年、2000年全国硕士研究生入学考试数学(一)试卷和参考答案。

本书可作为理工科大学生学习高等数学的辅导书，也可作为自学高等数学者的参考书。

前　言

为了帮助大学生复习高等数学，提高解题能力，我们根据国家教育部高教司制定的高等学校工科本科基础课教学基本要求及同济大学最新版《高等数学》编写本书。

本书包括一元函数微积分学、空间解析几何、多元函数微积分学、级数与微分方程的基本内容及大量的例题、习题。题目类型多，解题详细，方法多样，便于自学。全书分为四个单元（三章为一个单元），每一单元后面配有三套试题及其解答与评分标准，在书末附有第一、二学期期末高等数学试题及其解答。学生进行阶段复习后，可选做这些试题，自己评卷，自己评分，检查学习效果。为了让大学生了解全国硕士研究生入学考试数学试卷的类型、内容和试卷结构，在书末另附有1999年与2000年全国硕士研究生入学考试数学（一）试卷与参考答案。

参加编写本书的有：陈永明（第一、二章），李秀玲（第三章），王卫宏（第四章），王琦（第七、十章），方波漪（第八、九章），杜桂莲（第十一章），罗利民（五、六、十二章）。

由于编者水平有限，书中难免有错误与不妥之处，希望读者提出批评指正。

编　者

2001年6月

目　　录

第1章　函数与极限

§1.1　基本内容

一、函数概念

对于函数概念要注意以下几点：

(1)函数概念的本质特征是确定函数的两个要素：定义域和对应法则。定义域是自变量和因变量能相互联系构成函数关系的条件，无此条件，函数就没意义。对应法则是正确理解函数概念的关键。函数关系不同于一般的依赖关系，"y 是 x 的函数"并不意味着 y 随 x 的变化而变化。函数关系也不同于因果关系。例如一昼夜的气温变化与时间变化是函数关系，但时间变化并不是气温变化的实际原因。$y=f(x)$中的"f"表示从 x 到 y 的对应法则，"f"是一个记号，不是一个数，不能把 $f(x)$看作 f 乘以 x。如果函数是用公式给出的，则"f"表示公式里的全部运算。

(2)函数与函数表达式不同。函数表达式是表示函数的一种形式，表示函数还可以用其他的形式，不要以为函数就是式子。

(3)$f(x)$与 $f(a)$是有区别的。$f(x)$是函数的记号，$f(a)$是函数值的记号，是 $f(x)$当 $x=a$ 时的函数值。

(4)两个函数，当其定义域相同，对应法则一样时，此二函数才是相同的。

二、函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性

对函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性的学习应注意以下几点：

(1)并不是函数都具有这些特性，而是在研究函数时，常要研究函数是否具有这些特性。

(2)函数是否“有界”或“单调”，与所论区间有关系。

(3)具有奇、偶性的函数，其定义域是关于原点对称的。如果 $f(x)$是奇函数，则 $f(0)=0$。存在着既是奇函数，又是偶函数的函数，例 $f(x)=0$。$f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$是否为奇函数的有效方法。

(4)周期函数的周期通常是指其最小正周期，但不是任何周期函数都有最小正周期。

三、关于复合函数

要注意的是，函数的复合是有条件的，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数。一个函数是否为复合函数与该函数的对应法则的表示方法有关。例如，$y=1$ 和 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 的对应法则相同，但对应法则的表示方法是不同的，前者不是复合函数，而后者可看成是由 $y=u^2+v^2$，$u=\sin x$，$v=\cos x$ 复合而成的复合函数。

四、分段函数

分段函数往往不是初等函数，因为它没有用一个式子来表示。但不能说分段函数都不是初等函数，例如：$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 是分段函数，但也是初等函数，因为它可以用一个数学式子 $y=\sqrt{x^2}$ 表示。

五、简单的经济函数

在生产和经营活动中,成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数,记为 $c(x)$;总收入函数,记为 $R(x)$;总利润函数,记为 $L(x)$。一般说来,

$$c(x)=\text{固定成本}+\text{可变成本}$$
$$R(x)=px$$
$$L(x)=R(x)-c(x)$$

其中,p 为产品的销售单价;x 为销量。商品的市场需求量 Q_d 和市场供给量 Q_s 相对商品价格 p 的函数关系,分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$和供给函数 $f_s(p)$。

六、关于极限概念

(1)如果 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称数列 x_n 当 $n\to\infty$时以 a 为极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

(2)如果 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时以 A 为极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

类似地,如果 $\forall \varepsilon>0$, $\exists X=X(\varepsilon)>0$,当$|x|>X$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时以 A 为极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

应当注意,数列 $x_n=f(n)$的极限与函数 $y=f(x)$的极限是有区别的,它们的区别在于:数列 $x_n=f(n)$的自变量 n 的变化过程是间断的(只取正整数),且只有一个过程:$n\to\infty$(即 $n\to+\infty$);而函数 $y=f(x)$的自变量的变化过程是连续的,变化过程有:$x\to x_0$, $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$。

数列 $x_n=f(n)$的极限与函数 $y=f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限

又有一定的联系：当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 必定存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，但当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 却可以存在。

七、左右极限

当 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 存在时，分别称 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 和 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限和右极限，它们统称为单侧极限。

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是左、右极限 $f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$ 都存在，且 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$。

八、无穷小与无穷大

(1)无穷小是指在自变量的某种趋向下，对应的函数值的变化趋势(趋向于零)，而有界函数是指自变量在某一范围内，对应的函数值的变化情形。如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无穷小，则 $f(x)$ 在点 x_0 附近必定有界，但离点 x_0 远一些的地方是否有界就不能肯定了。

(2)无穷大是指在自变量的某种趋向下，对应的函数值的变化趋势。如果函数 $f(x)$ 是无穷大，则 $f(x)$ 必定无界；但反过来，当 $f(x)$ 无界时，$f(x)$ 可不一定是无穷大。

(3)具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小的和；反过来，如果函数 $f(x)$ 可表示为常数与无穷小之和，则该常数就是这函数的极限。

(4)如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $1/f(x)$ 是无穷小；如果 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $1/f(x)$ 是无穷大。

(5)设 α 和 β 是同一极限过程中的两个无穷小。如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=$

0，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$；如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq0\ (k>0)$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小。

当 $x\to0$ 时，常见的等价无穷小有：

$$\sin x\sim x\qquad \tan x\sim x\qquad \arcsin x\sim x$$
$$\arctan x\sim x\qquad \ln(1+x)\sim x$$
$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\qquad e^x-1\sim x\qquad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$$

(6)设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$（等价无穷小代替定理）。

九、极限存在准则和两个重要极限

(1)两个准则是：夹逼准则和单调有界准则。

(2)两个重要极限：若 α 为某个过程中的无穷小，则

$$①\lim_{某过程}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\qquad ②\lim_{某过程}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

十、极限的一些性质

(1)惟一性　若变量有极限，则极限惟一；

(2)有界性　有极限的变量必有界；

(3)保号性

①某时刻后 $f(x)\geqslant0$（或 $\leqslant0$）$\Rightarrow\lim f(x)\geqslant0$（或 $\leqslant0$）；

②$\lim f(x)>0$（或 <0）$\Rightarrow$ 某时刻以后 $f(x)>0$（或 <0）；

③某时刻以后，$\varphi(x)\geqslant\psi(x)\Rightarrow\lim\varphi(x)\geqslant\lim\psi(x)$。

十一、求函数极限的方法

(1)利用极限定义，验证某常数为已知变量的极限；
(2)利用函数的连续性求极限；
(3)利用极限的四则运算求极限；
(4)利用无穷小的性质求极限；
(5)利用两个重要极限求极限；
(6)利用夹逼准则和单调有界准则求极限。

需要指出的是，今后还会逐渐学习到其他的求极限方法，例如，根据极限的题型，可以选择“罗必塔法则”、“泰勒展开式”、“导数的定义”、“定积分的和式”、“无穷级数收敛的必要条件”等方法求极限。

十二、函数连续性定义有三种说法

(1)设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，如果当自变量的增量(由值 x_0 起)趋于零时，对应的函数值的增量也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 连续；

(2)设 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，当 $x\to x_0$时，函数 $f(x)$的极限存在，且等于 $x=x_0$ 处的函数值，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 连续；

(3)设 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，如果$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称 $y=f(x)$在点 x_0 连续。

由于连续性有上述三种说法，这就带来许多方便，通常可以根据具体情况采用某一种较合适的形式。一般说来，第一种说法多

用于检验函数的连续性；第二种说法多用于讨论间断点；而第三种说法多用于理论上的推导。

十三、函数的间断点及其分类

若函数 $f(x)$在 x_0 点不连续，则称 x_0 是 $f(x)$的间断点。若 $f(x_0-0)$及 $f(x_0+0)$都存在，则称 x_0 为第一类间断点，否则称为第二类间断点。第一类间断点又细分为可去间断点($f(x_0-0)=f(x_0+0)$)及跳跃间断点 ($f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$)。第二类间断点包括无穷间断点 ($f(x_0-0)$及 $f(x_0+0)$中至少有一个为∞)及振荡间断点（在 x_0 处，极限不存在，永远振荡）。

十四、基本初等函数在其定义域上是连续的，初等函数在其定义区间上是连续的

定义区间与定义域有所不同，定义区间是含于定义域内的，是一个区间，定义域不一定是区间。例如，初等函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x+1}+4}$ 的定义域为 $x=-2$ 及$(-1,+\infty)$。$(-1,+\infty)$是 $f(x)$的定义区间，$x=-2$ 是 $f(x)$的定义域内的一个孤立点。$x=-2$ 显然是 $f(x)$的一个间断点。可以说 $f(x)$在它的定义区间$(-1,+\infty)$上连续，但不能说 $f(x)$在它的定义域 $x=-2$ 及$(-1,+\infty)$上是连续的。

十五、闭区间上连续函数的基本性质

主要是最大值最小值定理及介值定理。定理的条件是"$f(x)$在闭区间上连续"。该条件是充分的但不必要。

十六、关于无穷小的运算

无穷小的运算对求极限有着很大的用处。

(1)有限个无穷小的代数和仍为无穷小;

(2)无穷小与有界变量的乘积仍为无穷小。

但是无穷小的除法则成为$\frac{0}{0}$的不定型,没有确定的结果。由$\frac{0}{0}$的极限情况得到无穷小阶的比较。所谓无穷小阶的比较就是各变量在同一过程中趋于零的快慢程度。

十七、关于连续函数的运算

连续函数的运算包括和、差、积、商、复合、取反函数等。它们在一定条件下经过运算都是连续的。有了这些运算可以推得很多函数的连续性。

学习时要注意这些定理成立的条件,特别是复合函数及反函数连续的条件。

§1.2 问题与题解

一、是非题

1. 若 $f(x)$在任一有限区间上皆为有界函数,则 $f(x)$在整个数轴上必为有界函数。 (非)

说明:如 $f(x)=x$,显然在任一有限区间$[a,b]$上有

$$|f(x)|\leqslant\max(|a|,|b|)$$

即 $f(x)$在有限区间$[a,b]$上为有界函数。但不难看出,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是无界的。

2. $f(n)=\sin n$ (n 为自然数)是以 2π 为周期的周期函数。 (非)

说明:因 $f(n)=\sin n$ (n 为自然数)的定义域为整个自然数集合,而 $n+2\pi$ 不是自然数,所以 $f(n+2\pi)$就没有意义,自然也就谈不上与 $f(n)$相等了,故 $f(n)=\sin n$(n 为自然数)不是一个以 2π 为周期的周期函数。

3. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$,数列$\{u_n\}$中仅有有限多项不满足$|u_n-A|<\varepsilon$,则数列必以 A 为极限。 (是)

说明:对任意给定的 $\varepsilon>0$,设$\{u_n\}$中除了 $u_{n_1},u_{n_2},\cdots,u_{n_l}$外,皆有$|u_n-A|<\varepsilon$。

取 $N=n_l$,则当 $n>N$ 时恒有$|u_n-A|<\varepsilon$,故$\{u_n\}$以 A 为极限。

4. 有限个无穷大之和仍为无穷大。 (非)

说明:如当 $x\to0$ 时,$f(x)=2-\dfrac{1}{x}$,$g(x)=x+\dfrac{1}{x}$都是无穷大,但当 $x\to0$ 时,$f(x)+f(x)=2+x$ 显然不是无穷大。

事实上,有限个无穷大的和可能是常数,可能是无穷大,也可能是无穷小,还可能根本就无极限。

5. 分段函数必存在间断点。 (非)

说明:如分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant0\\ x, & x<0\end{cases}$$

在整个实数轴上都连续。

二、选择题

1. 函数 $y=\dfrac{1}{x}\lg\dfrac{1-x}{1+x}$的定义域是(　　)。

(A)$x\neq0$ 及 $x\neq-1$ 　　(B)$x>0$

(C)$0<|x|<1$ 　　(D)$(-1,0)$及$(0,+\infty)$

答:(C)