中央教育科学研究所
创新教育研究与实验项目

武汉大学出版社
WUHAN DAXUE CHUBANSHE

21世纪
中小学生创新能力的
培养与开发丛书

中学版

总主编 谢贤扬

数学创造性学习训练

主编 刘凯年

中央教育科学研究所创新教育研究与实验项目

21世纪中小学生创新能力的培养与开发丛书(中学版)

总主编　谢贤扬

数学创造性学习训练

主　　编　刘凯年

副 主 编　曾家骏　黄梦熊

撰 稿 人　(以姓氏笔画为序)

方　明　刘凯年　邓礼威

李　铁　金　雷　郭功兵

黄梦熊　童明国　曾家骏

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学创造性学习训练/刘凯年主编.—武汉：武汉大学出版社，2001.7
(21世纪中小学生创新能力的培养与开发丛书：中学版/谢贤扬总主编)
ISBN 7-307-03212-0

Ⅰ.数…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学课—中学—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第026990号

责任编辑：卜芳钦　　责任校对：刘　欣　　版式设计：支　笛

出版：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
发行：新华书店湖北发行所
印刷：湖北省荆州市今印集团有限责任公司
开本：850×1168　1/32　印张：10　字数：255千字　插页：2
版次：2001年7月第1版　　2001年7月第1次印刷
ISBN 7-307-03212-0/G·550　　定价：14.00元

搞好创新教育，为培养跨世纪人才多做贡献。

阎立钦

二000.五.二十

2000 年 5 月 20 日，中央教育科学研究所所长、“创新教育研究与实验”全国课题协作组组长阎立钦教授赴成都作学术报告，他认真听取了创新教育研究与实验课题西南师大实验协作区的同志的工作汇报，对实验区的工作提出了殷切期望，并题辞勉励大家一定要将课题搞出成果。

前　言

当今世界，数学学习在人才培养中的重要作用，已毋庸置疑．但如何才能真正学好数学，学会“数学的思维”，这是每一个学生和数学教师都在关心和思考的问题．为什么有的人可以学有所成，在数学领域里乐而忘返，自由地翱翔；而有的人视数学为畏途，扣不开数学王国的大门？这里的一个重要原因就在于青少年时代的思维是否受到了良好的创造性学习的训练．

21世纪需要有创造能力的人才，而创造能力的核心是创造性思维．数学教育的功能，说到底应当是训练人的头脑，提高人的素质，使学生具有较强的创造性思维活动能力．数学是锻炼思维的体操．本书在这一思想指导下，应用了丰富多彩的数学背景材料，对学生进行创造性思维能力的训练．作为一本数学创造性学习的辅助读物，全书注重数学问题的趣味性，故事化，行文生动活泼，深入浅出，避免了枯燥说教的“冷面孔”．采用这种编写形式，旨在使青少年朋友们在轻松愉快的阅读中受到数学思想的启迪，引发青少年朋友们的思考，从而在潜移默化中提高创造性思维能力，收到课堂数学教学难以收到的效果．

刘凯年

重庆师范学院教授、硕士生导师，课程与教学论教研室主任，中国数学奥林匹克高级教练，全国初中数学联赛组委会委员，重庆市数学学会理事，重庆市数学会普委会副主任，重庆市数学奥林匹克总教练，重庆市教育学会中学数学专业委员会常务理事。项目《奥林匹克数学的课程建设与教学改革》获1997年全国普通高校教学成果四川省二等奖；所指导的学生何旭华在第三十七届国际数学奥林匹克竞赛中获得金牌；1999年获曾宪梓教育基金会高等师范院校优秀教师奖。主要著述有《竞赛数学解题思想研究》、《奥林匹克数学教程》、《几何变换》、《也谈Fermat-Steiner问题》、《圆周上有理点的分布》等。

创造性思维训练

创造性阅读训练

作文创造力训练

语文创造性听说训练

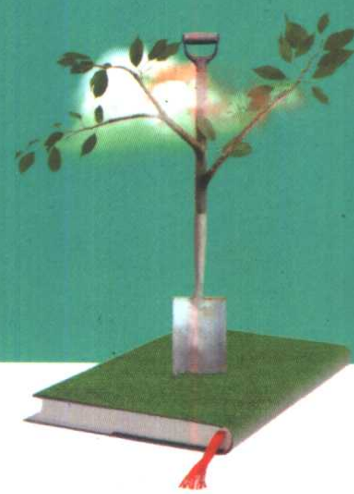
英语创造性听·说·读·写训练

数学创造性学习训练

物理创造性学习训练

化学创造性学习训练

活动课创造性学习训练



责任编辑 卜芳钦 责任校对 刘 欣

版式设计 支 笛 装帧设计 马重慧

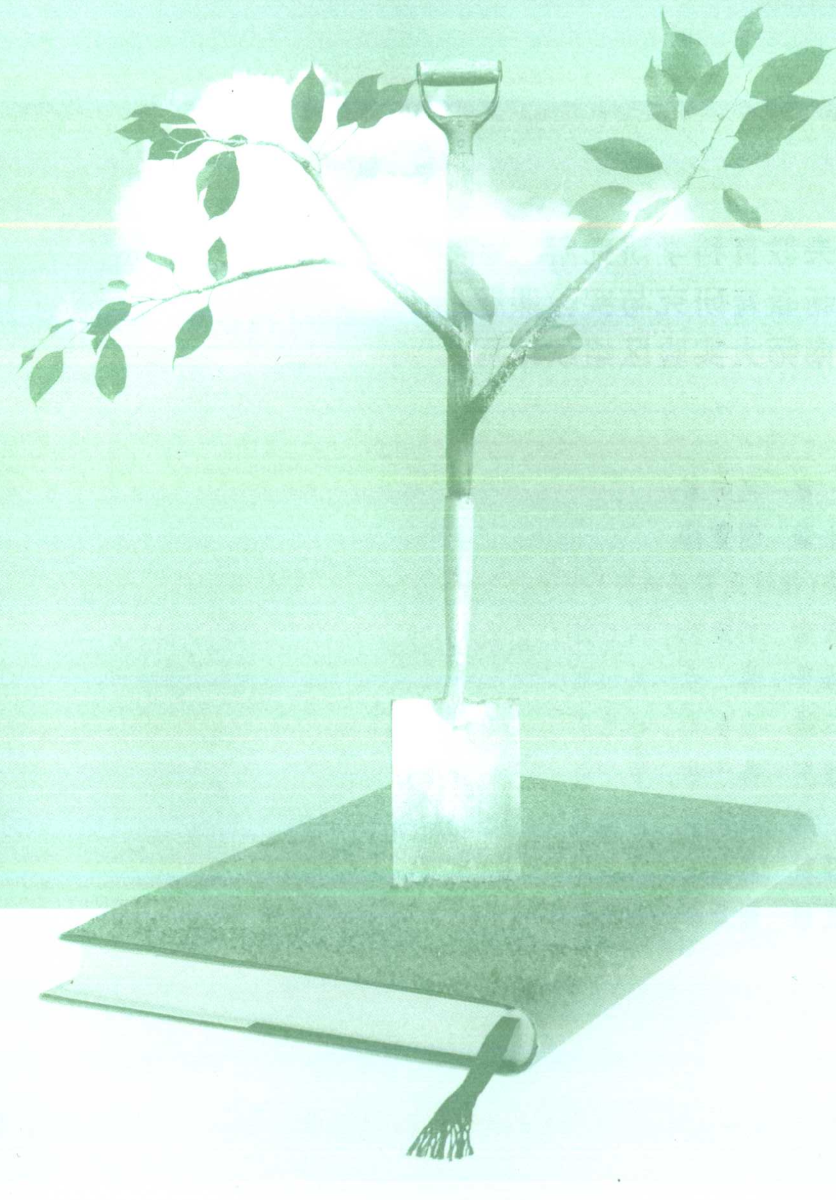
21世纪中小学生创新能力的培养与开发丛书
（中学版）

中央教育科学研究所
创新教育研究与实验课题
西南师大实验区组织编写

主　审　何向东
总主编　谢贤扬
编委(按姓氏笔画排列)：
刘庆生　刘凯年　向启林
许维平　肖　力　吴小丽
吴万瑜　张发光　杜重庆
李维庆　陈于林　罗　振
周　鹏　周清荃　周德富
高泽新　郭世艾　黄新生
蒋克钊　谢贤扬　童明常

21世纪中小学生创新能力的培养与开发丛书

总主编 谢贤扬



目 录

前 言 …… 1

1 时钟上的数学 …… 1
2 地毯的面积 …… 6
3 揭穿“转摊”的骗术 …… 9
4 聪明的乌鸦 …… 13
5 这些角的和是多少度 …… 15
6 引进字母，好处多多 …… 23
7 用几何方法可求出哪些锐角的三角函数值 …… 32
8 补形——添加辅助线的又一种思路 …… 38
9 纸片的几何 …… 48
10 谈谈构造数学模型 …… 60
11 探索一个特殊四边形的性质 …… 73
12 奇妙的黄金数 …… 79
13 对应与计数 …… 87
14 从相反的方面去思考问题 …… 96
15 一道竞赛题的多种解法 …… 104
16 突破思维定势 跳出思维樊笼 …… 107
17 类比与抽象 …… 113
18 什么是构造法 …… 119
19 判别式的应用知多少 …… 129

20 “鸭蛋”的脾气你真的摸透了吗…… 134
21 就简避繁，均值换元…… 138
22 猫捉老鼠…… 142
23 选择最佳方案最少要多少次…… 145
24 平均数未必能反映事物的全部特征…… 148
25 画圈，帮你解题…… 151
26 难以置信的推测…… 156
27 阿里兹追龟…… 159
28 分牛析疑…… 166
29 倒过来考虑怎么样…… 171
30 七座桥的故事…… 174
31 不用直角尺能画直角吗…… 177
32 从“焦点访谈”播出时间谈起…… 180
33 一个新平方差公式及其应用…… 185
34 名题奇解与创新思维…… 191
35 勾股定理的幻想与勾股数的联想…… 201
36 足球中的数学…… 206
37 从平面到空间…… 215
38 克服思维惰性　突破思维定势…… 218
39 一元二次方程会有三个根吗…… 222
40 “$a+b\neq 0$”真的没用吗…… 224
41 用“换元”解一元二次方程…… 226
42 由韦达定理巧解“看错数”问题…… 229
43 “最短距离”问题趣谈…… 231
44 爷爷和孙子的年龄各是多少…… 235
45 构造图形在解题中的应用…… 237
46 没有大胆的猜想，就做不出伟大的发现…… 240
47 不等之中求相等…… 245

48　从结论入手……………………………………………… 249
49　一道几何题的代数解法………………………………… 256
50　“妙解”几例…………………………………………… 258
51　均衡对称代数式的有趣解法…………………………… 261
52　平面几何与“运动”…………………………………… 263
53　怎样看“视角”最大…………………………………… 267
54　奇妙的奇数和偶数……………………………………… 270
55　谁的证法好……………………………………………… 273
56　$\sqrt{(2x^2+3)^2}$是有理式，还是无理式 ……………………… 275
57　直觉并不一定都可靠…………………………………… 277
58　发散性思维在解题中的运用…………………………… 280

1 时钟上的数学

我们每个同学家里都有大大小小的钟．每个钟都有时针、分针、秒针，时时刻刻可以听到它们不停的“滴答、滴答”走动的声音．当然它们的走动有快有慢，秒针最快，分针其次，时针最慢．不知你注意到它们之间的一些数学问题没有？

为了使问题简便起见，我们假设所讨论的时钟只有时针和分针．

比如，在一天之内时针和分针可以重合多少次？每次发生在什么时候？什么时候两针之间互相垂直？什么时候两针在一条直线上？如果时针与分针交换，它还能表示某一时刻的时间吗？如果钟走得不准，如何用它来判断手表走得准不准……下面我们一起来探讨这些问题．

第一个问题，什么时候时针可以和分针重合？这种情况，一昼夜会发生多少次？

为此，首先要找一个量来表示它们转动的快慢．用什么呢？当然是单位时间内它们转动的角度了．分针是每小时（60 分钟）转一圈，即 360°，那么分针的速度应是每分钟 6°．时针需 12 小时即 720 分钟才转 360°，故它的速度应是每分钟$\frac{1}{2}$度．现在我们可以按平常的直线运动中的追击问题来进行处理．

先从一个具体问题谈起，比如，5 点钟过后又经 x 分钟两针重合的问题．从 12 点钟时的刻度算起（称标准位置），这时分针

转过了 $6x$ 度，而时针转过的度数是 $5\times30+x\times\frac{1}{2}$. 二者重合时，应有 $6x=150+\frac{1}{2}x$，$\therefore\frac{11}{2}x=150$，即 $x=\frac{300}{11}\approx27.27$（分），故 5 点 27.27 分时，两针重合. 一般地，在 m 点 x 分时若两针重合（$0\leqslant m\leqslant11$，m 是整数，$0\leqslant x<60$），应有 $6x=m\times30+\frac{1}{2}x$. 解得 $x=\frac{60}{11}m$，即 m 小时又 $\frac{60}{11}m$ 分时两针重合（$m=0$，1，2，…，11）. 当 $m=11$ 时，$\frac{60}{11}m=60$，即 11 点钟过后两针重合的时间实际上是 12 点. 显然零时零分时两针也重合. 故在一昼夜即从零点开始，到夜晚 12 点（包括早上零点，但不包括第二天零点），时针与分针重合的次数是 $2\times11=22$ 次.

第二个问题，什么时候时针与分针互相垂直，这种情况一昼夜发生多少次？

设在 m 点 x 分（$0\leqslant m\leqslant11$，m 为整数，$0\leqslant x<60$）时两针互相垂直，即它们转动的角度相差 90° 或 270°. 在 $m=0$，1，2 时，$\because m\times30<90$，分针与时针垂直，分针转动的角度总比时针转动的角度大，$\therefore$应有 $6x-\left(30m+\frac{1}{2}x\right)=90$ 或 $6x-\left(30m+\frac{1}{2}x\right)=270$. 解得 $x=\frac{2}{11}(90+30m)$ 或 $x=\frac{2}{11}(270+30m)$. 例如，$m=1$ 时代入即为 1 点 21.82 分或 1 点 54.55 分. 类似地，在 $m=9$，10，11 时，$\because m\times30\geqslant270$，二针垂直，时针转角应比分针转角大，$\therefore$应有 $\left(30m+\frac{1}{2}x\right)-6x=90$ 或 270.

解出 $x=\frac{2}{11}(30m-90)$ 或 $\frac{2}{11}(30m-270)$.

例如 $m=10$ 时，$x=38.18$ 或 5.45，即在 10 点 38.18 分或 10 点 5.45 分时两针互相垂直.

在 $m=3$，4，…，8 时，$\because 90^\circ \leqslant 30m < 270^\circ$，可能时针在前，也可能分针在前．要使两针夹角为 90°，应有

$$\left|6x-\left(30m+\frac{1}{2}x\right)\right|=90，即 6x-30m-\frac{1}{2}x=\pm 90.$$

可解出 $x=\frac{2}{11}(30m\pm 90)$．例如，$m=7$ 时，$x=54.55$ 或 21.82，即 7 点 54.55 分或 7 点 21.82 分时两针互相垂直．

但在 $m=2$ 时，解出 $x=\frac{300}{11}$ 或 $x=60$；$m=3$ 时，解出 $x=\frac{360}{11}$ 或 $x=0$．后者是同一个时刻．类似地，在 $m=9$ 时，解出 $x=\frac{360}{11}$ 或 $x=0$；而 $m=8$ 时，解出 $x=\frac{300}{11}$ 或 $x=60$．后者也同是一个时刻．这说明，从 0～1，1～2，4～5，5～6，6～7，7～8，10～11，11～12（点钟）之间，两针都有两次互相垂直的机会．但在 2～4 或 8～10（点钟）之间都有三次互相垂直．那么在 0～12 点钟之间两针互相垂直了 $8\times 2+2\times 3=22$ 次，一昼夜两针共有 44 次互相垂直．

第三个问题，什么时候两针成一直线？

类似上面的思路，设在 m 点 x 分时，两针互为反向延长线，则应有 $6x-\left(30m+\frac{1}{2}x\right)=180$ 或者 $6x-\left(30m+\frac{1}{2}x\right)=-180$．为什么 180 前面有时取正，有时取负呢？这是因为在 $0\leqslant m\leqslant 5$ 时，两针要成一直线，分针必须转动角度更大，应属于前一情形．而在 $6\leqslant m\leqslant 11$ 时，应属于后一情形．即

$$x=\begin{cases}\frac{2}{11}(30m+180)，0\leqslant m\leqslant 5,\\ \frac{2}{11}(30m-180)，6\leqslant m\leqslant 11.\end{cases}$$

例如，在 4 点 54.55 分、1 点 27.27 分等等，两针共线．注意 $m=5$ 时，$x=60$，而 $m=6$ 时，$x=0$，二者是同一时刻．故

实际上在 0～12 时之间两针共线有 11 次，一昼夜共 22 次.

实际上，上面三个问题是同一类型的问题，即两针成角为 0°，90°，180°的问题，讨论的方法都是一样的. 但具体处理又不完全相同. 类似地，要求时针与分针成某一个指定的不超过 180°的角的问题，都不难解决.

下面看两个不完全相同的问题.

第四个问题，校表问题. 某人购得新手表一只，此表每小时比他家里的挂钟快 30 秒，而挂钟却比标准时间每小时慢 30 秒，即标准时间过了 1 小时，挂钟却只走了 59 分 30 秒.

试问新手表是准确的呢？还是比标准时间快？或比标准时间慢？

这要从它们各自走标准的 1 小时所用时间的比来考虑. 由于手表比挂钟每小时快 30 秒，即挂钟走了 1 小时（它的 1 小时）即 3 600 秒的时候，手表走了 3 630 秒. 因此挂钟走 1 秒时，手表走了$\frac{3\,630}{3\,600}$秒. 另一方面挂钟比标准时间慢 30 秒，即标准时间走了 1 小时即 3 600 秒时，挂钟只走了 3 570 秒，即挂钟走 1 秒时标准钟走了$\frac{3\,600}{3\,570}$秒. 由于$\frac{3\,630}{3\,600}<\frac{3\,600}{3\,570}$ $(3\,600^2>(3\,600+30)(3\,600-30))$，即挂钟在走了它的 1 秒钟时，手表走的时间刻度比标准钟走的时间刻度小. 故手表比标准时间慢.

第五个问题，时针分针对调问题.

在钟表的分针和时针指示某一时刻时，如果将二者对调，即将分针拨到现在时针位置，时针拨到现分针位置，这时一般就不能表示一个时刻了. 例如 3 点钟时，时针指向 3，分针指向 12. 但若将分针指向 3，时针指向 12，就不对劲了，这不能表示一个时刻的时间. 如果两个指针真的处于这个位置，人们只能认为这个钟坏了.

那么有没有这种情况：原来两针的位置以及交换后的位置都

各自表示某一时刻的时间呢？（在两针不重合时，二者各不相同）

我们来讨论这个问题.

设现在的准确时间是 m 点 x 分. 现将时针指向原分针的位置，则时针表示现在的时间是 $\frac{x}{5}$ 点钟. 将分针指向原时针位置，则分针表示现在的时间是某点又 $\left(m+\frac{x}{60}\right)\times 5=5m+\frac{x}{12}$（分），为什么呢？这是因为如果在钟面上一周分为60格，分针每分钟走1格，而时针每小时走5格. 故 x 分钟即 x 格相应为 $\frac{x}{5}$ 小时，而 m 点 x 分即 $m+\frac{x}{60}$ 点钟，对应 $\left(m+\frac{x}{60}\right)\times 5$ 格，即 $5\left(m+\frac{x}{60}\right)$ 分钟.

如果现在两针所处位置确实能表示某一时刻的时间，则时针指向的位置超过某整点刻度的部分与分针表示的数量相符. 例如，现在能表示是 n 点 y 分，应有 $\left(\frac{x}{5}-n\right)\cdot 60=y=5m+\frac{x}{12}$. 这里的 m，$n=0$，1，2，…，11，可解出 $x=\frac{1}{143}(720n+60m)$. 对一个确定的 m（$m=0$，1，…，11），给 n 以0，1，2，…，11等不同的值就可得到一系列的 x 值. 例如，取 $m=5$，$n=8$ 时，解出 $x=42.38$. 即5点42.38分时将两针对调后仍表示一个时刻，这个时刻是8（$n=8$）点28.53分. 这里28.53可由 $5m+\frac{x}{12}=5\times 25+\frac{42.38}{12}$ 得出. 在 $m=5$ 时，n 可取0，1，2，…，11，即有12种情形两针可以对调. 但其中 $m=n=5$ 时实际上是两针重合. 故5点到6点之间都有12个时刻满足本问题开始提出的要求.

上面我们仅举了5个时钟数学的例子，其实类似的问题还有很多. 同学们不妨找一个钟来，做做实验，提出一些新的问题并研究解决呢？