SPT 高等院校选用教材 非数学专业

# 线性代数与解析几何

王中良 编

科学出版社

高等院校选用教材（非数学专业）

# 线性代数与解析几何

王中良　编

科学出版社

2000

## 内 容 简 介

本书是把线性代数和解析几何这两部分内容合成一门课程的教材，目的在于通过它们之间的联系，使读者更好地掌握代数方法和几何方法，处理科学技术中遇到的各类问题.

全书内容包括：行列式，矩阵和消元法，几何向量及其应用，$n$ 维向量空间，矩阵的相似标准形，二次曲面与二次型，线性空间与线性变换.每章后配有习题，书后附有习题答案.

本书适合于高等工科院校各非数学专业作为教材，亦可供有关人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数与解析几何/王中良编. －北京：科学出版社，2000.8

高等院校选用教材（非数学专业）

ISBN 7-03-008457-8

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材②解析几何－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2 ②O182.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 06563 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 8 月第 一 版 开本：787×960 1/16

2000 年 8 月第一次印刷 印张：16 1/2

印数：1—5 500 字数：295 000

**定价：25.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

# 前　　言

线性代数是在 19 世纪后期发展起来的数学分支，而解析几何的历史则更久远. 由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，而某些非线性问题在一定条件下，可以转化成线性问题，因此线性代数的概念和方法已成为从事自然科学和经济数学工作的不可缺少的工具. 尤其在计算机日益普及的今天，线性代数的地位和作用更显得重要，几何问题更是广泛存在于自然科学、技术科学乃至于日常生活之中，解决这些问题的基本数学工具就是线性代数和解析几何，这使得线性代数和解析几何成为高等学校大部分专业的重要的基础理论课之一.

线性代数所讨论的有限维线性空间是由二维、三维几何空间抽象推广所得到的，它的许多概念和方法具有很强的几何背景. 而解析几何正是用代数方法去研究几何问题. 基于这种考虑，我们把这两部分内容合为一门课程，把代数和几何尽量结合起来，通过矩阵方法来研究和解决线性代数和几何中的一系列基本问题，使之处理得更加简洁明了；另一方面对代数方法的几何背景有更深入的了解. 对一些较抽象的概念通过平面和三维空间中具体例子加以说明，由具体到抽象，由特殊到一般，以利于培养抽象思维和逻辑推理的能力.

全书分为七章，分别为：行列式，矩阵与消元法，几何向量及其应用，$n$ 维向量空间，矩阵的相似标准形，二次曲面与二次型，线性空间和线性变换.

线性代数具有较强的抽象性与逻辑性. 为帮助读者理解和掌握其中的概念、定理以及相互间的关系，书中配置了大量例题，每章末都附有较多的习题，其中一部分是近年来的考研试题. 希望通过这些习题的练习，巩固和掌握所学基本理论与方法，训练解题的方法与技巧，提高数学修养.

在编写过程中，参阅了不少同类书目(书末附有参考书目)，受到不少启发和教益，在此谨向有关作者致以诚挚的谢意. 北京工业大学数学系汪永新副教授审阅了全书，提出了不少宝贵意见并提供了部分习题，在此也一并表示感谢.

本书适合于工科院校财经类、管理类等非数学专业的本科生、大专生使用. 不同专业可因教学内容和时数的相异，选择适当内容进行教学.

由于编者水平所限，书中不妥之处在所难免，诚请读者指正.

编　者

1999 年 12 月

# 目　　录

# 第一章　行列式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学中有广泛的应用，而且在许多理论和实际应用问题中，也发挥着重要作用. 本章从解二元、三元线性方程组出发，给出二阶、三阶行列式的概念，再把它们加以推广，引入 $n$ 阶行列式，并讨论 $n$ 阶行列式的基本性质与计算方法. 最后，我们给出用 $n$ 阶行列式解 $n$ 元线性方程组的克莱姆法则.

## §1.1　二阶行列式与三阶行列式

我们首先来讨论二元线性方程组. 一般的二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

对(1.1.1)进行消元，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

于是，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1.1)有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

为了便于记忆这些解的公式，我们引入二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1.3}$$

其中数 $a_{ij}$ 叫做行列式的元素，其第一个下标 $i$ 表示这个元素位于(1.1.3)式左边行列式记号中的第 $i$ 行，称 $i$ 为行标；其第二个下标 $j$ 表示这个元素位于行列式记号中的第 $j$ 列，称 $j$ 为列标.

利用二阶行列式，式(1.1.2)的分子可分别表示为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}.$$

于是,关于线性方程组(1.1.1)的解的结论可以叙述为:

如果线性方程组(1.1.1)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组(1.1.1)有唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2)$是把系数行列式 $D$ 中第 $j$ 列换成方程组(1.1.1)等号右边的常数列 $b_1$、$b_2$ 后所得到的二阶行列式.

**例 1.1.1** 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$$

**解** 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解.又

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 21.$$

故方程组的唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-14}{-7} = 2, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{21}{-7} = -3.$$

对于含有三个方程的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

用消元法解(1.1.4),可得出与二元线性方程组(1.1.1)相类似的结果.这里不再重复过程,只给出结论.前提是引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.1.5}$$

于是,关于线性方程组(1.1.4)的解的结论为:如果线性方程组(1.1.4)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组(1.1.4)有唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中 $D_j(j=1, 2, 3)$是把系数行列式 $D$ 中第$j$ 列换成常数列$b_1$, $b_2$, $b_3$ 后所得到的三阶行列式.

**例 1.1.2** 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

**解** 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times(-1)\times(-1)+1\times1\times3+2\times2\times(-2) - 1\times1\times(-2)-1\times2\times(-1)-2\times(-1)\times3$$

$$=6\neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}5&1&2\\7&-1&1\\4&-2&-1\end{vmatrix}=6,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&5&2\\2&7&1\\3&4&-1\end{vmatrix}=-12,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&5\\2&-1&7\\3&-2&4\end{vmatrix}=18,$$

故方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{6}{6}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-12}{6}=-2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{18}{6}=3.$$

从上面例题可以看到,利用二阶、三阶行列式求解系数行列式不为零的二元、三元线性方程组是比较方便的. 但在实际应用中,遇到的方程组的未知元常常是多于三个,而且在某些理论研究上也需要讨论 $n$ 个未知元的线性方程组的求解问题. 这样,我们要把二阶、三阶行列式加以推广,引入 $n$ 阶行列式的概念.

## §1.2　排　　列

作为定义 $n$ 阶行列式的准备,本节介绍排列及其性质.

**定义 1.2.1**　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 $n$ 元排列.

例如,4213 是一个 4 元排列,24135 是一个 5 元排列. 又如,123,132,213,231,312,321 是全部的 6 个 3 元排列.

不难知道,$n$ 元排列总共有 $n!$ 个. 今后一般的 $n$ 元排列常记作 $j_1j_2\cdots j_n$. 对于 $n$ 元排列 $12\cdots n$, 它具有自然顺序,即在这个排列中的任何两个数,小的数总排在大的数的前面,称它为自然序排列. 而在其它 $n$ 元排列中,会出现与自然顺序相反的情况,我们引入下述概念:

**定义 1.2.2**　一个排列中,如果一个大的数排在一个小的数的前面,就称这一对数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. 逆序数是偶数的排列称为偶排列,逆序数是奇数的排列称为奇排列.

例如,在 4 元排列 4213 中,共有 21,41,42,43 这 4 个逆序. 故 $\tau(4213)=$

4,即 4213 是偶排列.

在 5 元排列 31254 中,共有 31,32,54 这 3 个逆序.故 $\tau(31254)=3$,即 31254 是奇排列.

又因 $\tau(12\cdots n)=0$,故 $n$ 元自然序排列是偶排列.

下面,通过两个例题,介绍一个求排列逆序数的方法.

**例 1.2.1** 求 5 元排列 53142 的逆序数.

**解** 在 1 之前有两个数,记下 2,然后划掉 1;再看 2,在 2 之前有三个数,记下 3,然后划掉 3;再看 3,在 3 之前有一个数,记下 1,然后划掉 3;再看 4,在 4 之前有一个数,记下 1,然后划掉 4;最后剩下 5,没有逆序.把记下的这些数相加即为所求逆序数.即

$$\tau(53142)=2+3+1+1=7.$$

**例 1.2.2** 求 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

**解**
$$\begin{aligned}\tau(n(n-1)\cdots 21)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

所以,当 $n=4m$ 或 $n=4m+1$ 时,$n(n-1)\cdots 21$ 是偶排列.

当 $n=4m+2$ 或 $n=4m+3$ 时,$n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列.

把一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列.这样的一个变换称为对换.

例如,5 元排列 31254 经过 1,5 这两个数的对换,就变成排列 35214,容易计算 $\tau(35214)=6$.说明奇排列 31254 经过一次对换后变成偶排列 35214.

一般地,关于对换对排列奇偶性的影响,有下述结论.

**定理 1.2.1** 对换改变排列的奇偶性.即经过一次对换,偶排列变成奇排列,奇排列变成偶排列.

**证** 先证相邻对换的情形.设排列

$$\cdots ij\cdots \tag{1.2.1}$$

经过 $i$, $j$ 对换变成

$$\cdots ji\cdots \tag{1.2.2}$$

这里“…”表示那些不动的数.显然在排列(1.2.1)与(1.2.2)中,这些数之间的逆序的情况是一致的.又 $i$ 或 $j$ 与这些数所构成逆序的情况也是一致的.不同的只是 $i$, $j$ 的次序.如果 $i<j$,那么(1.2.2)比(1.2.1)多一个逆序;如果 $i>j$,那么(1.2.2)比(1.2.1)少一个逆序.因此,排列(1.2.1)与(1.2.2)奇偶性相反.

再证一般对换的情形. 设排列

$$\cdots i k_1 k_2 \cdots k_s j \cdots \tag{1.2.3}$$

经过 $i$, $j$ 对换变成

$$\cdots j k_1 k_2 \cdots k_s i \cdots \tag{1.2.4}$$

显然,这样一个对换可以通过 $2s+1$ 次相邻对换来实现. 由于相邻对换改变排列的奇偶性,又 $2s+1$ 是奇数. 所以排列(1.2.3)与(1.2.4)奇偶性相反.

由定理 1.2.1,很容易得到以下两个推论,证明留给读者.

**推论 1** 在全部 $n$ 元排列中,奇、偶排列各占一半,即都是$\frac{n!}{2}$ 个($n\geqslant 2$).

例如,在全部 6 个 3 元排列中,有 3 个偶排列为:123,231,312;有 3 个奇排列为:132,213,321.

**推论 2** 任意一个 $n$ 元排列与自然序排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

例如,$43215 \xrightarrow{(4,1)} 13245 \xrightarrow{(3,2)} 12345$. 所作对换次数 2 与 $\tau(43215)=6$ 都是偶数.

## §1.3 $n$ 阶行列式

本节从观察和分析二阶、三阶行列式所具有的特点出发,加以推广以引进 $n$ 阶行列式的概念.

我们已知,二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{array}$$

它们都是一些项的代数和. 我们来看一下这些代数和中各项的构成以及各项前所带的正负号的确定有什么规律性. 以三阶行列式为例,不难发现三阶行列式具有如下特点:

三阶行列式是所有取自记号中不同行、不同列的三个元素乘积的代数和;

任意一个乘积项可表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中行标形成一个 3 元自然序排列，列标形成一个 3 元排列 $j_1j_2j_3$. 当 $j_1j_2j_3$ 取遍所有 3 元排列时，恰好得出三阶行列式展开式(1.1.5)中的所有项，共有 $3!=6$ 项；当 $j_1j_2j_3$ 取偶排列时，相应项前面都带正号，当 $j_1j_2j_3$ 取奇排列时，相应项前面都带负号.

根据观察到的这些特点，三阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有 3 元排列求和.

类似地，二阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有 2 元排列求和.

按照上面的分析，我们来定义 $n$ 阶行列式.

**定义 1.3.1**　$n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3.1}$$

是所有取自(1.3.1)中不同行、不同列的 $n$ 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3.2}$$

的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 $n$ 元排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，项(1.3.2)前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，项(1.3.2)前面带负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1.3.3}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 $n$ 元排列求和. 由于 $n$ 元排列共有 $n!$ 个,所以在式(1.3.3)的右边共是 $n!$ 项的代数和. 式(1.3.3)称为 $n$ 阶行列式按行标的完全展开式.

以上定义表明,为计算 $n$ 阶行列式,首先作所有可能的位于不同行、不同列的 $n$ 个元素的乘积,把乘积中元素的顺序按行标的自然顺序排列;然后由列标所构成排列的奇偶性确定每一项前面的正负号;最后计算出代数和的值.

下面来看几个例子.

**例 1.3.1**　计算 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**解**　这个 4 阶行列式,按定义在展开式中应该有 $4! = 24$ 项. 但是由于很多元素为零,因此除去

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

这一项外,其余项全为零,并且这一项的行标为自然顺序,列标排列为 4321,且 $\tau(4321) = 6$,所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 24 = 24.$$

**例 1.3.2**　计算 $n$ 阶上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**解** 上三角行列式是指主对角线(从左上角到右下角的对角线)以下的元素全为零的行列式.在展开式中,项的一般形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由于上三角形状,当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$. 故行列式中可能不为零的元素 $a_{ij_i}$,其下标应有 $i\leqslant j_i$, 即 $1\leqslant j_1$, $2\leqslant j_2$,$\cdots$,$n\leqslant j_n$.

而在所有 $n$ 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,能满足上述关系的只有一个自然序排列 $12\cdots n$. 所以在行列式完全展开式中只有一项

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

可能不为零,这一项的行标与列标均构成自然序排列.从而

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

说明:上三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

作为上三角行列式的特例,对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1d_2\cdots d_n.$$

在行列式的定义中,为了确定每一项的符号,我们把项中 $n$ 个元素按行标自然顺序排列.事实上,数的乘法是可以交换的,因而这 $n$ 个元素的次序可以是任意的.一般地,$n$ 阶行列式的一项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.3.4}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$, $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 $n$ 元排列.我们来证明,项(1.3.4)的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}. \tag{1.3.5}$$

事实上,为了根据定义决定(1.3.4)的符号,就要把这 $n$ 个元素重新排一下,使得它们的行标成自然顺序.也就是排成

$$a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}, \tag{1.3.6}$$

而(1.3.6)的符号是

$$(-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}. \tag{1.3.7}$$

由(1.3.4)变到(1.3.6)可以经过一系列元素的对换来实现.每作一次对换,行标排列与列标排列就同时作一次对换,则行标排列与列标排列的逆序数之和不改变奇偶性.经一次对换如此,经多次对换当然还是如此.于是,经过若干次元素的对换,项(1.3.4)变到(1.3.6)后有

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} &= (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} \\ &= (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}.\end{aligned}$$

这就证明了(1.3.5)与(1.3.7)是一致的.因而我们可以由(1.3.5)来确定项(1.3.4)的符号.

例如,$a_{23}a_{31}a_{14}a_{42}$是4阶行列式展开式中一项,$\tau(2314)=2$,$\tau(3142)=3$,于是这一项的符号应为$(-1)^{2+3}=-1$. 如按行标自然序排列,即 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$,因 $\tau(4312)=5$,因而它的符号也是$(-1)^5=-1$.

按(1.3.5)来决定行列式中每项符号的方法说明,行标与列标的地位是对称的.因而特别地,我们可以把每一项按列标自然顺序排列,于是得到 $n$ 阶行列式定义的另一种表示法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \tag{1.3.8}$$

式(1.3.8)称为 $n$ 阶行列式按列标的完全展开式.

## §1.4 行列式的性质

行列式的计算是一个很重要的问题.但当阶数 $n$ 较大时,直接用定义计

算行列式是很麻烦的.为了简化行列式的计算,我们有必要讨论行列式的性质.当然这些性质不仅仅是为了简化行列式的计算,而且对行列式的理论研究及应用也是很重要的.

在节1.3中,我们已指出行列式中元素的行标与列标的地位是对称的,由此得

**性质1**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.4.1}$$

这就是说,行列互换,行列式的值不变.我们把(1.4.1)右边行列式称为左边行列式的转置行列式.性质1说明任一个行列式与它的转置行列式是相等的.

**证**　在式(1.4.1)右端,元素 $a_{ij}$ 位于第 $j$ 行第 $i$ 列,即 $i$ 是它的列标,$j$ 是它的行标.因之,把右端按列标的完全展开式为

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

这恰是左端按行标的完全展开式.证毕

性质1表明,行列式中行与列的地位是同等的,因之凡是有关行的性质,也适用于列.所以下面我们所谈的行列式的性质大多是对行来说的,对于列也有相同的性质,就不重复了.

在行列式定义中,由于每一项是取自不同行不同列的 $n$ 个元素的乘积,所以对于某一确定的行中 $n$ 个元素(譬如第 $i$ 行 $n$ 个元素 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$)来说,每一项都含有其中的一个且只含有其中一个元素.因此,$n$ 阶行列式的 $n!$ 项可以分成 $n$ 组,第一组的项都含有 $a_{i1}$,第二组的项都含有 $a_{i2}$ 等等.再分别把 $i$ 行的元素提出来,就有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \tag{1.4.2}$$

其中 $A_{ij}$ 代表那些含有 $a_{ij}$ 的项在提出公因子 $a_{ij}$ 之后的代数和.至于 $A_{ij}$ 究竟是