大專用書

工 程 數 學

編 著 者
黃 俊 銘

興業圖書股份有限公司印行

中華民國六十一年一月十五日一版
中華民國六十三年八月七日校訂二版

工程數學

定價 80

編著者：黃　俊　銘
發行人：王　志　康
內政部登記證內版台業字第一七九四號
出版者：興業圖書股份有限公司
印刷者：永紳印刷廠
台南市忠孝街五九號
發行者：興業圖書股份有限公司
臺南市勝利路一一八號
電話三七三二五三號

目 錄

第一章 微分方程式

1－1 微分方程式之解……………………………………………… 1
1－2 變數之分離……………………………………………… 3
1－3 可積分組合（積分因子）……………………………… 6
1－4 一階線性微分方程式………………………………… 9
1－5 應用……………………………………………………… 11
1－6 較高階之線性微分方程式…………………………… 15
1－7 常係數二次齊次方程式……………………………… 15
1－8 有重根及複數根之轉助方程式……………………… 19
1－9 非齊次方程式之解…………………………………… 22
1－10 應用…………………………………………………… 25
1－11 增量法（數值法）…………………………………… 29
1－12 連續近似值法………………………………………… 34
1－13 拉氏（LAPLACE）變換式…………………………… 38
1－14 用拉氏變換式解微分方程式………………………… 45

第二章 函數之級數展開

2－1 麥克勞林級數（MACLAURIN SERIES）……… 49
2－2 級數之各種運算……………………………………… 53
2－3 應用級數展開式之計算……………………………… 58
2－4 泰勒級數（TAYLOR SERIES）………………… 61
2－5 富利葉級數（FOURIER SERIES）……………… 64

第三章 特殊微分方程式

3～1 冪級數（POWER SERIES）法…………………… 70
3～2 冪級數法之理論基礎………………………………… 73

3－3 李堅達（LEGENDRE）微分方程式
，李堅達多項式…… 75
3－4 貝塞（BESSEL）微分方程式，貝塞函數…… 78
3－5 貝塞函數之級數解…… 79
3－6 貝塞函數之特性…… 82
3－7 第二類貝塞函數…… 82

第四章 向量分析

4－1 數量與向量…… 86
4－2 一向量之分量…… 87
4－3 向量加法，向量以數量乘之…… 90
4－4 數量積（SCALAR PRODUCT或
DOT PRODUCT）…… 93
4－5 向量積（VECTOR PRODUCT）…… 97
4－6 以分量表示向量積…… 99
4－7 數量三重積
（SCALAR TRIPLE PRODUCT）……104
4－8 其他重積……107
4－9 數量場及向量場
（SCALAR FIELD及VECTOR FIELD）… 108
4－10 向量微積分……111
4－11 曲 線……114
4－12 弧 長……117
4－13 切 線……119
4－14 速度及加速度……120
4－15 方向導函數……121
4－16 一向量場之散度……129
4－17 一向量場之旋度……129

第五章 線積分與面積分

5－1 線積分……131

5－2 求線積分之值……132
5－3 二重積分……138
5－4 二重積分轉換成線積分……145
5－5 曲 面……150
5－6 切平面……152
5－7 曲面積分……156
5－8 三重積分及高斯（GAUSS）散度定理……161
5－9 高斯散度定理之應用……165
5－10 史脫克（STOKES）定理……170
5－11 史脫克定理之應用……174
5－12 線積分與路徑無關……175

第六章 矩陣與行列式

6－1 矩 陣……182
6－2 矩陣乘法……187
6－3 行列式之子式及餘因式……191
6－4 分矩陣、階層……192
6－5 n 個未知數之 n 個線性方程式系統，克蘭茂（CRAMER）法則……194
6－6 任意齊次線性系統……196
6－7 非齊次線性方程式系統……200
6－8 反矩陣……203
6－9 愛根值（EIGENVALUE）與愛根向量……207

第七章 複變函數

7－1 複 數……212
7－2 極限，導數，及解析函數……215
7－3 高奇－利曼方程式（CAUCHY－RIEMANN EQUATION），拉普拉斯方程式……219
7－4 有理函數，根……223
7－5 指數函數……226

7－6 三角及超越函數……229
7－7 對數及一般指數函數……233

第八章 複數配合圖形轉換

8－1 複數圖形轉換……237
8－2 配合圖形轉換……240
8－3 線性轉換……244
8－4 特別線性轉換……249
8－5 其他基本函數之轉換……254

第九章 複數積分及級數

9－1 複數之線積分……258
9－2 複數線積分之基本特性……263
9－3 高奇（CAUCHY）積分定理……264
9－4 用非定積分法求線積分……267
9－5 泰勒級數……268

第十章 賸餘積分法

10－1 零……270
10－2 賸 餘……273
10－3 賸餘定理……277
10－4 求實數積分之值……278

第一章 微分方程式

1.微分方程式之解

自然界中，所有之物理現象，都依物理定律而變化。微分方程式之目的，就是提供研究自然現象變化及分析工程問題之有力工具。由微分方程式之定義—凡含有未知函數的導數或微分之方程式，皆稱爲微分方程式，若微分方程式中含有兩個或多個自變數及其偏導數或偏微分，則稱該微分方程式爲偏微分方程式，否則稱爲常微分方程式：

例題1. 方程式 $(dy/dx)+x=y$ 爲一階一次微分方程式。（此即指無一次以上之更高導數，及僅出現一次冪。）

例題2。 方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^4-y=6$$

爲二階一次微分方程式。亦即，所出現之最高階導數爲二階，且該最高階導數只有一次冪。因一階導數之四次冪並不影響其次數。

一微分方程式之解，即爲滿足微分方程式之各變數間之關係式。亦即，將此關係式代入原微分方程式後，可化成一恒等關係。如所含之獨立任意常數之數目等於微分方程式之階數時，稱爲該方程式之通解。當通解中之獨立任意常數，至少有一個被指定爲定值時，其解稱爲一特解。

例題3. 任何未被指定爲定數之獨立任意常數，其同類項必須組合成一獨立之任意常數。例如 $c_1x+c_2+c_3x$ 僅有二個獨立常數，因式中二個 x 項，可用一獨立任意常數組合而成之故，即 c_2+c_4x 其中 c_4 爲 c_1+c_3 之等效式。

例題4. 方程式 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ 爲下列微分方程式之通解。

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2y$$

為二階一次微分方程式，代表其解之方程式內有二個獨立任意常數。方程式 $y=4e^{-x}$ 為一特解。此一特解，係當通解為滿足某項已知條件時，所得 $c_1=4$ 及 $c_2=0$ 之結果。將原式取二階導數並代入微分方程式，則該微分方程式可簡化成一恒等關係式。

例題5. 證明 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 為微分方程式 $(d^2y/dx^2)+y=0$ 之通解。

函數及其二階導數為

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x\ ,\quad y'=c_1\cos x-c_2\sin x\ ,$$

及

$$y''=-c_1\sin x-c_2\cos x\ .$$

將上式代入微分方程式內，即得：

$$(-c_1\sin x-c_2\cos x)+(c_1\sin x+c_2\cos x)=0\ ,$$

或 $0=0$

習　題

證明每一方程式為所示微分方程式之一解，並指出所示微分方程式之階數及次數：

1. $\dfrac{dy}{dx}=1\ ,\quad y=x+3$
2. $\dfrac{dy}{dx}-3=2x\ ,\quad y=x^2+3x$
3. $xy'=2y\ ,\quad y=cx^2$
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0\ ,\quad y=3\cos 2x$
5. $y''-4y'+4y=e^{2x}\ ,\quad y=e^{2x}\left(c_1+c_2x+\dfrac{x^2}{2}\right)$
6. $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{d^2y}{dx^2}\ ,\quad y=c_1+c_2x+c_3e^x$

7. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=0$，$y=c_1\ln x+c_2$

8. $y''+9y=4\cos x$，$2y=\cos x$

9. $x^2y'+y^2=0$，$xy=cx+cy$

10. $xy'-3y=x^2$，$y=cx^3-x^2$

11. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+4\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}=0$，$y=c_1+c_2e^{-2x}+xe^{-2x}$

12. $(x+y)-xy'=0$，$y=x\ln x-cx$

2.變數之分離

首先要解答的微分方程式，爲一階與一次型式。解答此等方程式，有數種方法，本節及以下兩節，將討論其中一二種。第一種方法爲分離變數法。由次及級之定義，一階及一次微分方程式，含有對其一次冪之一一次導數。亦卽，可書爲$dy/dx=f(x,y)$。此型方程式，常以其微分式形式表之。

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \tag{1}$$

此處$M(x,y)$及$N(x,y)$可代表常數，x或y之函數。

爲求出一形式爲(1)之方程式之解，須予以積分。不過，若$M(x,y)$爲x及y之函數，便無法將此項積分。祇是在$M(x,y)$僅爲x之一函數時，才能積分。同理，第二項祇在$N(x,y)$僅爲y之一函數時，才能積分。若可能，先用代數方法將方程(1)重寫如下式

$$A(x)\,dx+B(y)\,dy=0 \tag{2}$$

此處$A(x)$僅爲x之一函數，及$B(y)$僅爲y之一函數，然後將每一項積分之，并將積分常數相加，以求出其解。甚多基本微分方程式，適用於此型解。

例題 1. 試解微分方程式 $dx - 4xy^3 dy = 0$，

先需自 dy 之係數中消去 x，及使 dx 係數中不含任何 y 之因數，可將方程式之每一項除以 x，所得新方程式為 $(dx/x) - 4y^3 dy = 0$ 現在可以對每一項分別積分。積分演算後，所得 $\ln x - y^4 = c$，為所欲求之解。c 為積分常數，成為解之任一常數。

例題 2. 試解微分方程式 $xydx + (x^2+1)dy = 0$

解：為將每一項積分，需將每一項除以 $y(x^2+1)$ 可得

$$\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{dy}{y} = 0$$

積分後，可得 $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln y = c$，為所欲求之解。如利用對數性質，可使此解之形式更為簡潔。若將積分常數書為 $\ln c_1$，而非 c，可得 $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln y = \ln c_1$。亦即 $(x^2+1)y^2 = c_1^2$。此解形式更為緊湊，較合一般需要。

例題 3. 試解微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2+4}$$

解：變數分離後，原方程式可寫成：

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2+4}$$

積分後得

$$\ln y = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{c}{2}, \quad \text{或 } 2\ln y = \tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

如選擇 $\ln 1/c$ 作為積分常數（左邊），則其解更簡潔。

亦即　$2\ln cy=\tan^{-1}(x/2)$

例題4.　解出方程式$3x^2y^2dx+y^2dx+dy=0$，其邊界條件爲

$$y=1 \quad 時 \quad x=2.$$

解：除以y^2及組合各項，可得$(3x^2+1)dx+(dy/y^2)=0$積分後，結果爲$x^3+x-(1/y)=c$　。因已知$y=1$時$x=2$，故可據而計算出該積分常數之値，即$8+2-1=c$，或$c=9$。於是其解可書爲

$$x^3+x-\frac{1}{y}=9，或\quad yx^3+yx=1+9y.$$

例題5.　若例題2之涌解，其邊界條件爲

$$x=0 \quad 時 \quad y=e，試求其特解$$

解：於例題2之通解，代入邊界條件得

$$\frac{1}{2}\ln(0+1)+\ln e=c\quad,或\frac{1}{2}\ln 1+1=c\quad,$$

所以　$c=1$

故其特解爲

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln y=1\ ,\quad \ln(x^2+1)+2\ln y=2\ ,$$

$$\ln y^2(x^2+1)=2 \quad 或 \quad y^2(x^2+1)=e^2$$

若應用例題2之通解另一形式，可得$(0+1)e^2=c_1{}^2$，或$c_1{}^2=e^2$，其特解爲仍$y^2(x^2+1)=e^2$。由此，可見常數之選擇不會影響最後結果。

習　題

解出已知微分方程式：

1.　$y^2dx+dy=0$　　2.　$(x^3+x^2)dx+(x+1)y\,dy=0$

3.　$x^2dx+(x^3+5)dy=0$　　4.　$y\,dx+x\,dy=0$

5. $e^{x+y}\,dx+dy=0$　　6. $\sin x\sec y\,dx-dy=0$
7. $yx^2\,dx-y\,dx=x^2\,dy$
8. $2y(x^3+1)\,dy+3x^2(y^2-1)\,dx=0$
9. $y\sqrt{1-x^2}\,dy+2\,dx=0$
10. $e^{\sin x}\,dx+\sec x\,dy=0$
11. $\sqrt{1+4x^2}\,dy-y^3x\,dx=0$
12. $y^2\,dx-x^2\,dy=0$
13. $\dfrac{dy}{dx}+yx^2=0$，　$y=1$　時　$x=0$
14. $y'=\sec y$，　$y=0$　時　$x=0$
15. $y'=(1-y)\cos x$，　$y=0$　時　$x=\pi/6$
16. $2y\cos y\,dy-\sin y\,dy=y\sin y\,dx$，　$y=\pi/2$　時　$x=0$

3.可積分組合（積分因子）

很多微分方程式，不能用分離變數法解出。但可利用基本微分式之某些組合，作爲一單位，放在一起積分以解之。下列微分式，提供可能產生之若干此等組合。

$$d(xy)=x\,dy+y\,dx, \tag{3}$$
$$d(x^2+y^2)=2(x\,dx+y\,dy) \tag{4}$$
$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}, \tag{5}$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}. \tag{6}$$

方程(3)提供，若一微分方程式內，產生 $x\,dy+y\,dx$ 之組合，可求出 xy 之函數。方程(4)提供，若產生 $x\,dx+y\,dy$ 組合，可求出 x^2+y^2 之函數。方程(5)及(6)提供，若產生 $x\,dy-y\,dx$ 組合，可求出 y/x 或 x/y 之函數。以下各例說明此等組合之應用。

例題 1.　解出微分方程式 $x\,dy+y\,dx+xy\,dy=0$

解：以xy除各項，得：$\dfrac{x\,dy+y\,dx}{xy}+dy=0$

左邊項為xy之微分式被除以xy。意即其積分值為$\ln xy$。於是可得

$$\ln xy+y=c$$

例題2　試解微分方程式$y\,dx-x\,dy+x\,dx=0$

解：$y\,dx-x\,dy$之組合，提示此方程式可應用公式(5)或(6)。此舉需要以x^2或y^2除全式。若以y^2除之，最後一項不能積分，而以x^2除之，最後一項即可積分。亦即：

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}+\frac{dx}{x}=0$$

第一項之組合，為公式(5)之負值。經積分後得通解為：

$$-(y/x)+\ln x=c$$

例題3.　試解微分方程式$(x^2+y^2+x)\,dx+y\,dy=0$

解：重組此方程式之各項，得：

$$(x^2+y^2)\,dx+(x\,dx+y\,dy)=0$$

以x^2+y^2除之，可得

$$dx+\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=0$$

第二項以2乘之，可化為du/u（此處$u=x^2+y^2$）之形式。經積分後，其通解為：

$$x+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\frac{c}{2}, \quad 或 \quad 2x+\ln(x^2+y^2)=c$$

例題 4. 求出下面微分方程式之特解

$$(x^3+xy^2+2y)dx+(y^3+x^2y+2x)dy=0$$

以滿足 $x=1$ 時 $y=0$ 之邊界條件。

解：重組方程式之各項，可得

$$x(x^2+y^2)dx+y(x^2+y^2)dy+2(y\,dx+x\,dy)=0$$

自首二項之每一項析出因式 (x^2+y^2)，可得

$$(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)+2(y\,dx+x\,dy)=0$$

將 $x\,dx+y\,dy$ 因式以 2 乘之，則首項可以積分。結果爲

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2+2xy+\frac{c}{4}=0, \quad 或 \quad (x^2+y^2)^2+8xy+c=0$$

應用已知條件，可得 $(1+0)^2+0+c=0$，或 $c=-1$

故其特解爲

$$(x^2+y^2)^2+8xy=1$$

此等可積分組合之應用，有賴於對各種積分式形式之正確辨認。有時，需作兩或三次配置，始可達到所要求之積分組合。當然，並非所有微分方程式皆可如此配置，以便各項成爲可積分組合。

習　題

解出已知微分方程式：

1. $x\,dy+y\,dx+x\,dx=0$　　2. $x\,dy-y\,dx+y^2\,dx=0$
3. $y\,dx-x\,dy+x^3\,dx=2\,dx$
4. $x\,dx+(x^2+y^2+y)\,dy=0$
5. $y\,dy-x\,dx+(y^2-x^2)\,dx=0$

6. $x\,dy+y\,dx+4xy^3dy=0$
7. $x^3\,dy+x^2y\,dx+y\,dx-x\,dy=0$
8. $x^3y^4(x\,dy+y\,dx)=dy$
9. $\sqrt{x^2+y^2}\,dx-2y\,dy=2x\,dx$
10. $\sec(xy)\,dx+(x\,dy+y\,dx)=0$

4.一階線性微分方程式

有一種型式之一次一階微分方程式，常能決定其可積分組合者，即爲一次線性微分方程式，其型式爲

$$dy+Py\,dx=Q\,dx, \tag{7}$$

此處 P 及 Q 僅爲 x 之函數，此種型式之微分方程式應用頗爲廣泛。若將方程式(7)兩邊乘以 $e^{\int pdx}$ 即成爲可積分者蓋因左邊變爲 du 形式，此處 $u=ye^{\int pdx}$，此可由求出 $ye^{\int pdx}$ 之微分式示明：

$$d(ye^{\int pdx})=e^{\int pdx}(dy+Py\,dx)$$

因此若每邊乘以 $e^{\int pdx}$，左邊可立即積分爲 $ye^{\int pdx}$，而右邊僅爲 x 之函數，亦可積分，故其解爲

$$ye^{\int pdx}=\int Qe^{\int pdx}dx+c \tag{8}$$

例題1.　試解微分方程式 $dy+(2/x)y\,dx=4x\,dx$.

解：在此 $P=2/x$ 及 $Q=4x$。

因 $e^{\int pdx}=e^{\int(2/x)dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$ 故左邊積分爲 yx^2，而右邊變爲 $\int 4x(x^2)\,dx$ 。於是

$$yx^2=\int 4x^3\,dx+c\text{，或}\quad yx^2=x^4+c$$

例題2.　解出微分方程式 $dy+y\,dx=x\,dx$。

解：因 $e^{\int P\,dx}=e^{\int dx}=e^x$

故 $ye^x=\int xe^x\,dx+c=e^x(x-1)+c$，或　$y=x-1+ce^{-x}$

例題3.　解出微分方程式 $x \cdot dy - 3y\,dx = x^3 dx$.

解：此一方程式經除以 x 後，可化為方程式(8)之形式，即

$$dy - (3/x)\,y\,dx = x^2\,dx$$

因 $e^{\int p\,dx} = e^{\int(-3/x)\,dx} = e^{-3\ln x} = e^{\ln(x)^{-3}} = x^{-3}$

故

$$yx^{-3} = \int x^2(x^{-3})\,dx = \int x^{-1}\,dx = \ln x + c$$

一較佳形式之答案為　$y = x^3(\ln x + c)$

例題4.　解出微分方程式 $x^2\,dy + 2xy\,dx = \sin x\,dx$

解：先將此方程式書為方程式(8)之形式，即

$$dy + \frac{2}{x}\,y\,dx = \frac{1}{x^2}\sin x\,dx\ ;$$ 於是

$$e^{\int p\,dx} = e^{\int(2/x)\,dx} = x^2$$

然後，此方程式之解為

$$yx^2 = \int \sin x\,dx + c = -\cos x + c\ ,\quad \text{或}\quad yx^2 + \cos x = c$$

習　題

解出已知微分方程式：

1. $dy + y\,dx = e^{-x}\,dx$
2. $x\,dy + 3y\,dx = dx$
3. $dy + y\,dx = e^{-x}\cos x\,dx$
4. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x$
5. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{4x} + 4y$
6. $dy + y\tan x\,dx + \sin x\,dx = 0$
7. $y' + y = 3$
8. $y' = x^2 y + 3x^2$
9. $x\dfrac{dy}{dx} = y + (x^2 - 1)^2$
10. $(1+x^2)\,dy + xy\,dx = x\,dx$

5.應用

以上所討論之一階及一次微分方程式在幾何學以及各種技術科學範疇內，應用甚多，本節中，經由例題及習題說明此等應用之若干種。

例題1.　一與一曲線族之一切曲線成直角相交之曲線，稱為該曲線族之正交定角軌跡（Orthogonal Trajectory）。所謂一曲線族，係指滿足某已知條件之一組規定曲線。試求拋物線$x^2 = cy$之正交定角軌跡方程式。

解：由已知拋物線之方程式，可得導數$dy/dx = 2x/c$。此方程式中所含之常數c，係視拋物線上點(x, y)而定。由拋物線及其導數二者之方程式，消去此常數，可得$dy/dx = 2y/x$。此式為該曲線族任一曲線斜率之一般式。一與此曲線族垂直之曲線，其斜率必等於此式之負倒數，或該正交定角軌跡之斜率，必為

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{OT} = -\frac{x}{2y}$$

解出此微分方程式，可得正交定角軌跡之曲線族為：

$$2y\,dy = -x\,dx\,,\quad y^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{c}{2},\quad 或\quad 2y^2 + x^2 = c$$

於是，正交定角軌跡為一橢圓曲線族。注意圖1內每一拋物線與每一橢圓成直角相交。

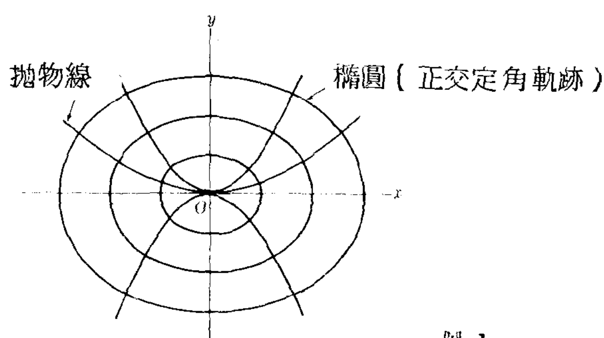

圖 1