内外-Σ群与极小非Σ群

陈重穆　编著

国家自然科学基金资助项目

西南师范大学出版社

1988年·北碚

内 容 提 要

最小反例方法是近几十年有限群论发展起来的一种研究方法，它在有限群的局部理论中表现得很充分。内、外-Σ群与极小非Σ群就是极小反例的一种具体表现。它既是群论的独立研究对象又是研究群论的一种有效工具。本书除阐述这方面的一般理论外还对常见的群论性质Σ，具体地研究了内、外-Σ群与极小非Σ群的性质。

本书搜集了国内外在这方面的结果，特别是国内数学工作者的结果并着重阐明如何用之于群论的研究，富有启发性。

本书是为研究生教学用而编写的，也可供有关数学工作者的参考。

内外-Σ群与极小非Σ群
陈重穆 编著

西南师范大学出版社出版
（重庆 北碚）
新华书店重庆发行所经销
达县新华印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张：4.5 插页：2 字数：110千
1988年12月第一版 1988年12月第一次印刷
印数：1—2,500

ISBN 7-5621-0138-8/0·9

定价：2.30元

前　　言

这本小册子是为代数研究生专题讨论所写的材料。本书主要阐述内、外-Σ群与极小非Σ群，即极小反例。内、外-Σ群作为群论独立的研究对象是饶有兴趣的一个部分；作为论证和研究的方法对有限群论更具有重大的意义。从本世纪初开始，不少作者对某些“Σ”得出了内、外-Σ群的性质，如Miller，Щмидт，Ito等，并用内、外-Σ群来论证Σ群的充分条件，如Doerk等。本书特别强调后一点，并具体阐明，明确了这一点后所产生的有力的作用。

本书除阐述内、外-Σ群，极小非Σ群的一般理论外，对常见的群论性质Σ具体地研究了内、外-Σ群与极小非Σ群的性质。

本书搜集了国内外在这方面的主要结果，特别是国内数学工作者的结果。由于有些工作正待发表 这些结果都不写出证明。在此对这些结果的作者表示感谢。第一次发表在本书的作者的结果用*号标出。

段学复教授，严栋开教授对本书提出过许多宝贵意见，作者谨致深切的谢意。

仓促成章，水平有限，疏漏错误在所难免，望海内贤达不吝指正

作　　者

一九八七年十一月

目　录

第一章　幂　零　群

§1·1　　内-幂零群的性质

关于内-幂零群，Шмидт[1]于1924年首先获得结果，继由Iwasawa[1]及Гольфанд[1]等人把内-幂零群的研究又推进了一步．现将内-幂零群的性质论述于下．

定理1.1　设G为内-幂零群．于是

1）　G的阶为$p^\alpha q^\beta$，其中p，q为相异素数．

2）　G有正规Sylow子群，设为q-Sylow子群Q，此时G的p-Sylow子群P循环．设$P=\langle a\rangle$，则$\Phi(P)=\langle a^p\rangle$含在G的中心$Z(G)$内．

3）　设N是真含在Q内的G的极大正规子群，则$|Q:N|=q^b$，其中b为q（mod P)的指数，且N之元与a可换．

*4）　设$c\in Q$．于是，c是Q的一个生成元的充分必要条件是c与a不可换．

*5）　若c为Q的一个生成元，则$[c,a]=c^{-1}c^a$也是Q的生成元．

*6）　设c为Q的一个生成元。于是

$$Q=\langle a,c^a,\ \cdots,\ c^{a^{p-2}},\ c^{a^{p-1}}\rangle$$

从而由5)得

$$Q=\langle[c,a],[c,a]^a,\ \cdots,\ [c,a]^{a^{p-1}}\rangle$$

7）　若Q为Abel，则Q为初等Abel．

8） $N=\Phi(Q)=Q'$，其中$\Phi(Q)$为Q的Frattini子群，Q'为Q的导群．

9） 若Q不是Abel群，则N为初等Abel群，且$N=Z(Q)$．当$q\neq 2$时，Q的方指数（exponent）为q；当$q=2$时，Q的方指数为4．

10） $Z(G)=\Phi(G)=\Phi(P)\times\Phi(Q)$．

证 先证G为可解．对G的阶用归纳．令P_1为G之任一异于1的p-子群．研讨$N_G(P_1)$．若有$N_G(P_1)=G$，即$P_1\triangle G$，则当G/P_1为幂零时，G为可解．G/P_1不为幂零，则为内-幂零，由归纳为可解．从而G亦可解．设对所有p-子群$P_1\neq 1$，均有$N_G(P_1)<G$，则$N_G(P_1)$为幂零，$N_G(P_1)$有正规p-补．于是由Frobenius定理（书[H] Ⅳ．定理5.8），G有正规p-补M，$M\lhd G$，M为幂零．因此G可解．

1） 由可解群的Sylow定理（[H]，Ⅵ．定理1.8）G有任意阶的Hall-子群H（所谓Hall子群H，即H的阶与H的指数$|G:H|$互素）．令H为任-（p，q）-Hall子群．若$H<G$，则H为幂零．由q的任意性，得知对任意q，$N_G(P)$中包含G的q-Sylow子群．于是$N_G(p)=G$，$P\lhd G$．再由P的任意性，得G为幂零，矛盾．这就证明了G的阶为$p^\alpha q^\beta$．

2） 因G可解，G有指数为素数，设为p，的极大正规子群H，H为幂零有正规q-sylow子群Q，Q也是G的q-Sylow子群．Q为H的特征子群，因之为G的正规子群．

若G的p-Sylow子群P不循环，则

$$P=\langle a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r\rangle,$$

a_i的阶均小于$|P|=p^\alpha$。于是$\langle a_i\rangle Q<G$，

$$\langle a_i\rangle Q=\langle a_i\rangle\times Q,\quad i=1,2,\cdots,r$$

因此，$PQ=P\times Q$，矛盾.

由$\langle a^p\rangle$是P的真子群，故$\langle a^p\rangle Q=\langle a^p\rangle\times Q$，而$G=\langle a\rangle Q$,所以$\langle a^p\rangle\leqslant Z(G)$.

3) 由于$\langle a\rangle N<G$，$\langle a\rangle N=\langle a\rangle\times N$，故a与N之元可换.设$H=\langle a^p\rangle\times N$.研讨$\overline{G}=G/H=\overline{P}\ \overline{Q}$，其中$\overline{P}\simeq P/\langle a^p\rangle$为p阶群，$\overline{Q}\simeq Q/N$.现证G仍为内-幂零群.若不然，则有$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab\in H$，$b\in Q$.于是$b^{-1}ab\in\langle a\rangle N=\langle a\rangle\times N$.所以$b^{-1}ab\in\langle a\rangle$，从而$a^{-1}b^{-1}ab\in\langle a\rangle$.由Q为正规，故$[a,b]\in Q$.因此$[a,b]\in P\cap Q=1$，即对每$b\in Q$，均有$[a,b]=1$，矛盾于G不为幂零.

由N的极大性，得$\overline{Q}$为$\overline{G}$的极小正规子群.$\overline{Q}$为$|Q:N|=q^b$阶初等Abel群.$\overline{Q}$是q元域F_q上的$\overline{P}$不可约模.设$\overline{P}=\langle\overline{a}\rangle$.关于表示模$\overline{Q}$,$\overline{a}$表为$F_q$上的b级矩阵A.由于$C_G(\overline{Q})=\overline{Q}$，表示是忠实的，故$A^p=I$.因此A的最小多项式$m(x)$应为$x^p-1$的因子.因此$m(x)$无重根，且A的特征根均为$F_q$的一个有限扩域$F_{q^n}$内的p次单位根.于是A在$F_{q^n}$上可对角化.如果$f(x)$在$F_q$上不可约,$f(x)=f_1(x)\cdots f_r(x)$, $r>1$，其中$f_i(x)$为F_q上不可约多项式，$f_i(x)$应无重根，是以任意以$f_i(x)$为特征多项式的F_q上方阵A_i，在F_{q^n}上均有

$$A_i\sim\begin{pmatrix}\lambda_1^{(i)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{s_1}^{(i)}\end{pmatrix}$$

因此，在F_{q^n}上有

$$\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda_1^{(1)} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{s_1}^{(1)} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_1^{(r)} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_{s_r}^{(r)}\end{pmatrix}\sim A$$

后一相似关系来自诸λ为$f(x)$的全部根，又A可对角化.由诸A_i及

A均为F_q上方阵，故在F_q上

$$A\sim\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_r\end{pmatrix}$$

矛盾于A为不可约表示，故f(x)在F_q上不可约。因此f(x)无重根，$f(x)=m(x)$为x^p-1的因子。

设$\omega\in F_{q^n}$为f(x)的一根，$f(\omega)=O$。于是ω共轭元的个数一致于f(x)的次数b。设ξ为F_{q^n}的一个生成元。于是$\xi\to\xi^q$生成F_{q^n}的自同构群。在此自同构下，$\omega\to\omega^q$。由于$A^p=I$，故$\omega^p=1$。由此ω的全部共转为

ω^{q^0}，ω^{q^1}，…，$\omega^{q^{c-1}}$

其中c为q(mod p)的指数。所以b＝c。3)得证

4) 当Q为初等Abel q-群时，Q可视为F_q-P模。含在Q内的G的正规子群亦为F_q-P模。由完全可约性定理，$Q=Q_1\times Q_2$，其中Q_2也是F_q-P模，即Q_2也是G的正规子群。若$Q_1<Q$，则PQ_1，PQ_2都是G的真子群而为幂零，从而PQ＝G亦为幂零矛盾。这就证明了下述结论。

若Q为初等Abel q-群，则Q为极小正规子群，即此时N＝1。

由于$\Phi(Q)$是Q的特征子群，$\Phi(Q)\lhd G$。显然$\overline{G}=G/\Phi(G)$仍为内-幂零群，其q-Sylow子群$\overline{Q}$为初等Abel q-群应为$\overline{G}$的极小正规子群。因此得证$\Phi(Q)=N$。

设c为Q的任一元。若c与a可换，则$\langle c,\Phi(Q)\rangle$之元均与a可换。故$\langle c,\Phi(Q)\rangle\lhd G$，且为Q的真子群。由N的极大性，得$c\in N=\Phi(Q)$，矛盾。

若c与a不可换，则由3)，$c\overline{\in}N=\Phi(Q)$。因此c为Q的一个生成元。

5) 若$[c,a]=c^{-1}c^a$不是Q的一个生成元，则由4)，它与a可

换。

$$a\cdot c^{-1}c^{a}=c^{-1}c^{a}\cdot a$$

$$\therefore\quad ac^{-1}a^{-1}c=c^{-1}a^{-1}ca$$

故$c^{-1}a^{-1}c$与a可换．于是两个p元应生成一个含$\langle a\rangle$的p-群．从而$c^{-1}a^{-1}c\in\langle a\rangle$，$c^{-1}a^{-1}c=a^{r}$．所以

$$c^{-1}a^{-1}ca=a^{r+1}\in P\cap Q=1,$$

即得a与c可换，这与c是生成元矛盾．

6） 由于$Q_1=\langle c,c^{a},\cdots,c^{a^{p-1}}\rangle$在P的变形下不变，故$PQ_1$成群．若$Q_1<Q$，则$PQ_1=P\times Q_1$．于是c与a可换，矛盾于c是Q的生成元．

7） 设Q为Abel，于是，由$c^{q}\in\Phi(Q)$与a可换，得

$$[c,a]^{q}=(c^{-1}c^{a})^{q}=(c^{q})^{-1}(c^{q})^{a}=(c^{q})^{-1}c^{q}=1$$

因此，由6)，Q由q阶元所生成．所以Q为初等Abel q-群．

8） 在4)中已证得$N=\Phi(Q)$，令$\overline{G}=G/Q'$．显然$\overline{G}$仍为内-幂零群，其q-Sylow子群$\overline{Q}=Q/Q'$为Abel群．由7)，$\overline{Q}$为初等Abel，从而$Q'\geqslant\Phi(Q)$．但熟知$Q'\leqslant\Phi(Q)$，所以$\Phi(Q)=Q'$．

9） 当Q不是Abel群时，$Z(Q)$是Q的特征子群，$Z(Q)\Delta G$．因此，$Z(Q)\leqslant N=\Phi(Q)=Q'$．现证$N\leqslant Z(Q)$．

对任$c\in Q$，$d\in N$有$c^{-1}dc\in N$．N之元与a可换，所以

$$c^{-1}dc=a^{-1}(c^{-1}dc)a=(a^{-1}ca)^{-1}d(a^{-1}ca)$$

$$\therefore\quad a^{-1}ca\cdot c^{-1}\in c_{Q}(N)$$

由于$[c^{-1},a]$是Q的生成元，易得$c_Q(N)=Q$．所以$N\leqslant Z(Q)$，而得$N=Z(Q)=\Phi(Q)=Q'$．

对任c，$d\in Q$，因为$c^{q}\in\Phi(Q)=Z(Q)$，又$[c,d]\in Q'=Z(Q)$，所以由换位公式（[H]，Ⅲ．引理1.2）

$$1=[c,d^{q}]=[c,d]^{q}$$

于是Abel群$Z(Q)=Q'$由q阶元所生成。因此N为初等Abel q-群。

由于Q是非Abel群时，其类为2，故对任意$c,d\in Q$，均有

$$(cd)^n=c^nd^n[d,\ c]^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

当q为奇时，得$(cd)^q=c^qd^q$；当$q=2$，得$(cd)^4=c^4d^4$。

由6)，当c为Q的一生成元时，

$$Q=\langle c^{-1}c^a,\ (c^{-1})^a c^{a^2},\ \cdots,\ (c^{-1})^{a^{p-2}}c^{a^{p-1}}\rangle.$$

于是Q可由$c^{-1}c^a$形之元生成。取$n=q$或4，得

$$(c^{-1}c^a)^n=(c^{-1})^n(c^a)^n=c^{-n}(c^n)^a=c^{-n}c^n=1$$

由此便得Q的异于1的元的阶为q或4。当Q不可换时，Q异于1的元的阶不能都为2，故此时其方指数为4。

10) 因为上已证，$\Phi(P)$，$\Phi(Q)$均为G的正规子群。由书[H]，Ⅲ.引理3.3 a)，得$\Phi(P)\times\Phi(Q)\leqslant\Phi(G)$。另方面，显然有$G/\Phi(P)\times\Phi(Q)$的Frattini子群为1，故$\Phi(G)\leqslant\Phi(P)\times\Phi(Q)$，即得$\Phi(G)=\Phi(P)\times\Phi(Q)$。

至于$Z(G)=\Phi(G)$较为明显 □

定义1.1 q-Sylow子群正规的内-幂零群叫做q-基本群。

q-基本群的构造，特别是它的q-Sylow子群的构造是值得进一步研究的问题。

关于2-基本群，张继平，张来武[1]得出如下结果

引理1.1 设群$H=PQ$，其中$P\trianglerighteq H$，P是H的2-Sylow子群，且P是特殊2-群；$Q=\langle a\rangle$是奇素数q阶子群。Q平凡作用于P'，不可约作用于P/P'。若$\Omega_1(P)=P'$，则P是2^{3k}阶群，且对每$g\in P-P'$，均存在含g的P的2^{2k}阶子群B，使$P=BB^a$，$\Phi(B)=\Phi(P)=\Omega_1(P)$，$B'=1$。进之，如果q是Mersenne素数，则$|H|=2^3\cdot 3$，P为四元数群，且$H/\Phi(H)\cong A_4$。 □

本引理中之群记为D_{2q}。

§1·2 幂零群的某些充分条件

应用内-幂零群的性质及定理0.1可较简地证明和导出幂零群的某些充分条件．今例示数则如下．

定理1.2A（[Z]，p.451，定理1） 对群G中任二元x，y，均存在n，使$[x,\underbrace{y,\cdots,y}_{n}]=1$，则G为幂零群．

证 条件显然是子群闭的。设PQ为$p^\alpha q^\beta$阶q-基本群，$P=\langle a\rangle$，c为Q的一生成元，则由定理1.1,5)，$[c,a]=c^{-1}c^a$亦为Q的一生成元．因此对任何正整数n，$[c,\underbrace{a,\cdots,a}_{n}]$仍为Q的生成元，不得为1，故内-幂零群不满足本定理的条件，由定理0.1，G为幂零群．□

由本证知，定理假设条件还可削弱为：对G中任二相异素数幂阶元x，y有$[x,\underbrace{y,\cdots,y}_{n}]=1$进之有

*__定理1.2B__ 对群G中任二元x,y，其中y为素数幂阶，x为素数阶或2^2阶且与|y|互素，均有n，使$[x,\underbrace{y,\cdots,y}_{n}]=1$，则G为幂零群．□

*__定理1.3__（Ito定理推广，参见[W]，25页定理6.6）若群G的素数阶群及2^2阶循环群均在Z(G)中，则G为幂零群．

证 此为定理1.2B的特例 □

定理1.4（[Z]，572页，定理3） 所有$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$阶群G均为幂零群的充分及必要条件是，对任意i,j，$j\neq i$均有

$$p_i \nmid \prod_{\beta_j=1}^{\alpha_j} (p_j^{\beta_j}-1).$$

证 先证充分性，条件是子群闭的，由定理1.1.3），内-幂零群不满足条件，故n阶群悉为幂零群。

设有某$p_i \mid p_j^{\beta_j}-1$，$0<\beta_j\leqslant\alpha_j$。令Q为$p_j^{\beta_j}$阶初等Abel群。Q的自同构群的阶为$p_j^{\alpha_j(\alpha_j-1)/2}\prod_{k=1}^{\alpha_j}(p_j^k-1)$，故Q必有$p_i$阶自同构$\tau$，考虑所有形为

$$a\tau^x,\ a\in Q,\ 0\leqslant x<p_i$$

之元的集R，并规定

$$a\tau^x \cdot b\tau^y = ab^{\tau x}\tau^{x+y},$$

其中$b^{\tau x}$为b在τ^x下之象。容易验证R为$p_ip_j^{\alpha_j}$阶群，即Q由$\langle\tau\rangle$的半直积。R显然不是幂零群。再令K为任一$n/p_ip_j^{\alpha_j}$阶群，于是$R\times K$为一n阶群，它不是幂零群。

§1·3 极小非幂零群

由定理0.5知，极小非幂零群是Frattini子群为1的内幂零群。由定理1.1.10），得极小非幂零群为pq^b阶内-幂零群，它的q-Sylow子群为q^b阶初等Abel群。

定理1.5 极小非幂零群为pq^b阶q-基本群，其定义关系如次：

$$a^p=c_1{}^q=c_2{}^q=\cdots=c_b{}^q=1,\ c_ic_j=c_jc_i,\ i,j=1,2,\cdots,b.$$
$$c_i{}^a=c_{i+1},\ i=1,2,\cdots,b-1;\ c_b{}^a=c_1{}^{d_1}c_2{}^{d_2}\cdots c_b{}^{d_b}$$

其中$f(x)=x^b-d_bx^{b-1}-\cdots-d_2x-d_1$为$F_q$上的一个b次不可约多项式，且为$x^p-1$的因子。b是q(modp)的指数，$b\mid p-1$。

证 令$P=\langle a\rangle$，Q分别为极小非幂零群的p-Sylow及q-Sylow子群．于是Q为一个不可约的F_q-P模，且忠实地表示P．因此适当选择Q的基元可使a的表示矩阵为有理标准形

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_b \end{pmatrix}$$

由此便得如定理所述的定义关系．由于Q为不可约表示模，故A的特征多项式

$$f(x)=x^b-d_bx^{b-1}-\cdots-d_2x-d_1$$

在F_q上不可约，从而$f(x)$也是A的最小多项式．再因$A^p=I$，故$f(x)\mid x^p-1$．

反之，设G满足本定理的定义关系．由$f(x)$是x^p-1的因子可得$A^p=I$，由此，按

$c_b^a=c_1^{d_1}c_2^{d_2}\cdots c_b^{d_b}$可得，$c_i^{a^p}=c_i$，$i=1,2,\cdots,b$

故诸c_i独立，而生成一个q^b阶初等Abel群Q．再由$f(x)$不可约，Q为G的极小正规子群．由此即得G为pq^b阶q-基本群，它是极小非幂零群． □

§1·4 Wielandt定理与PycakoB定理

定理1.6（Wielandt[1]） 若H是G的幂零π-Hall子群，则G的任何π-子群K均共轭地含在H内．特别，G的π-Hall子群彼此共轭．

证 对K的阶用归纳．令L为K的任一真子群．由归纳L共轭

地含在H内，故L为幂零．若K为幂零，则K有正规Sylow子群．若K不为幂零，则K为内-幂零群亦有正规Sylow子群．令Q为K的正规q-Sylow子群．由Sylow定理，Q共轭地含在H的q-Sylow子群内，不失一般性可设$Q\leqslant H$，研讨$N_G(Q)$．K及H的q-补，K_1及H_1均含在$N_G(Q)$内．用归纳于K_1得K_1共轭地含于H_1内，于是在$N_G(Q)$内有元x，使$K_1^x\leqslant H_1$．因$Q^x=Q$，故$K^x=(QK_1)^x=QK_1^x\leqslant H$． □

下例示明，对H作一定要求是必要的．

PSL(2,11)阶为$2^2\cdot3\cdot5\cdot11$，它的2-Sylow子群的正规化子是{2,3}-Hall子群，且同构于A_4；3-Sylow子群的正规化子亦为{2,3}-Hall子群，且为亚循环群具有正规6阶循环子群．

应用Wielandt定理的证明方法，Русаков得出

定理1.7 Русаков[1] 令H为G的π-Hall子群．如果H的每Sylow子群循环，则G的任一π-子群均共轭地含在H内．

证 对K之阶用归纳．由Sylow定理，K的每Sylow子群也循环，故K为Sylow塔群．令q为$|K|$的最大素因子。于是K的q-Sylow子群$Q_1\lhd K$．令H_1为H的Hall子群，它的阶所含素因子H阶中素因子不超过q的全部素因子，不失一般性可设$Q_1\leqslant H_1$．研讨$N_G(Q_1)$，K的q-补K_1及H_1的q-补H_2均含在$N_G(Q_1)$内，用归纳于K_1，得在$N_G(Q_1)$内，K_1共轭地含于H_2内，从而K共轭地含于H_1内，当然在H内． □

统一这两个定理是人们感兴趣的问题，其次"存在性"的研讨也自然提出，即G含幂零π-Hall子群，是否G的任意子群均有π-Hall子群存在？

第二章 Abel 群

§2·1 内-Abel群

设G为内-Abel群，当G为幂零时，设$G=P_1\times P_2\times\cdots\times P_r$。若$r>1$，则因每$P_i$为Abel群，G为Abel群，矛盾。因此G为P-群。内-Abel p-群在下面讨论。当G不为幂零时，G为内-幂零群。由定理1.1,G是q-Sylow子群为初等Abel群的q-基本群，由定理1.5之证，即得

定理2.1 非幂零的内-Abel群是$p^\alpha q^b$阶基本群，其定义关系如次：

$$a^{p^\alpha}=c_1{}^q=c_2{}^q=\cdots=c_b{}^q=1,\quad c_ic_j=c_jc_i,\quad i,j=1,2,\cdots,b$$

$$c_i{}^a=c_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,b-1;\quad c^a{}_b=c_1{}^{d_1}c_2{}^{d_2}\cdots c_b{}^{d_b}$$

其中$f(x)=x^b-d_bx^{b-1}-\cdots-d_2x-d_1$在$F_q$上不可约，且为$x^p-1$的因子。

□

现研讨内-Abel p-群。

定理2.2 下面三个命题是等价的

1） p-群G是内-Abel群。

2） p-群G由二元生成，且其导群G'的阶为p，从而G'在中心Z(G)内。

3） P-群G的阶为p^n，中心Z(G)的阶为p^{n-2}，且$Z(G)=\Phi(G)$。

证 “1)⇒2)”．由定理0.7，得G由二元生成。设G的阶为

p^n. G必有不同的p^{n-1}阶子群，否则G将为循环群，而与G不是Abel群矛盾。根据假设这些p^{n-1}阶子群都是Abel群，其中某两个的交必含在中心$Z(G)$内，且有阶p^{n-2}。由G不是Abel群，$Z(G)$恰有阶p^{n-2}。令A为G的一个p^{n-1}阶子群，则A是极大Abel正规子群。$A/Z(G)$的阶为p。于是由定理（段学复[1]，）$A/Z(G)$同构于G的导群G'，故G'的阶为p。

“2)⇒3)”．由G'的阶为p，故$G'\leqslant Z(G)$．设$G=\langle a,b\rangle$，于是$[a,b]=c$是G'的生成元．因此

$$ab^p=b^pac^p=b^pa,$$

从而$G^p\leqslant Z(G)$，所以$G^p\bigcup G'=\Phi(G)\leqslant Z(G)$．因G为二元生成，故$\Phi(G)$为$p^{n-2}$阶，从而$Z(G)$的阶至少为$p^{n-2}$．由$G'\neq 1$，G不是Abel群，故$Z(G)$的阶为$p^{n-2}$，且$Z(G)=\Phi(G)$．

“3)⇒1)”．由$Z(G)=\Phi(G)$，得G的每一极大子群均含$Z(G)$，又$Z(G)$的阶为p^{n-2}，故每极大子群均为Abel．又因$Z(G)=\Phi(G)<G$，G不是Abel群，所以G是内-Abel群． □

定理2.3 （参见R'edei[1]） 内-Abel p-群有下述三型：

（Ⅰ） 四元数群 $G=\langle a,b\rangle$

$a^4=1$，$b^2=a^2$，$ba=a^{-1}b$。

（Ⅱ） $G=\langle a,b\rangle$

$a^{p^\alpha}=b^{p^\beta}=c^p=1$，$ba=abc$，$ca=ac$，$cb=bc$。

（Ⅲ） $G=\langle a,b\rangle$

$a^{p^\alpha}=b^{p^\beta}=1$，$ba=a^{1+p^{\alpha-1}}b$，$\alpha\geqslant 2$．

当$p=2$时，（Ⅲ）中$\alpha=\beta=1$的群与（Ⅲ）中$\alpha=2,\beta=1$的群重合而同为8阶二面体群D_8．

证 设G为内-Abel p-群，则由定理2.2，G为二元所生成：$G=\langle a,b\rangle$。令a，b的换位