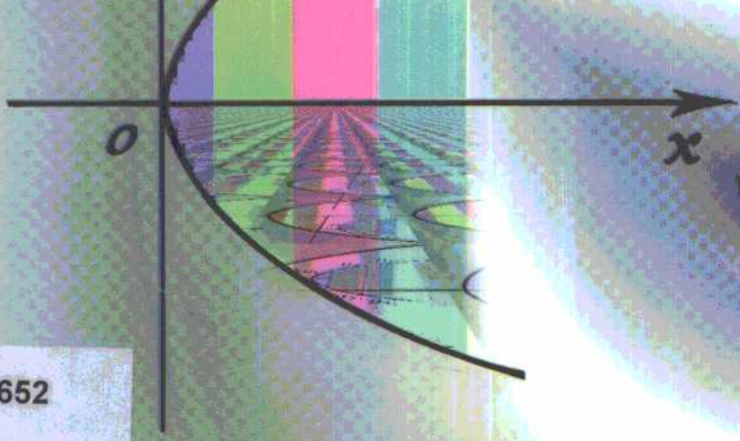
根据最新高中教材编写

课堂教学设计丛书

GAOZHONG
PINGMIAN JIEXI JIHE JIAOAN

高中平面解析几何教案

主编 明知白 蒋佩锦



北京师范大学出版社

课堂教学设计丛书

高中平面解析几何教案

主　编　明知白
　　　　蒋佩锦

北京师范大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高中平面解析几何教案/明知白,蒋佩锦主编.
-北京:北京师范大学出版社,1999.9
(课堂教学设计丛书)
ISBN 7-303-00032-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.①明…　②蒋…　Ⅲ.①解析几何课-中学-教案(教育)Ⅳ.G633.652

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 35595 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:787mm×1 092mm　1/16　印张:10　字数:248 千字
1999 年 9 月第 1 版　1999 年 9 月第 1 次印刷
印数:1～31 000　　定价:15.00 元

前　言

《课堂教学设计丛书》(高中数学)是为高中青年教师课堂教学服务的,它是依据现行人教版高中课本的内容编写的,分高中代数上册、立体几何、高中代数下册、解析几何四本书,都依课本章节顺序编写,但不是每一课时都配有相应的教案,而是选择其中一部分编写相应的教案.每一份教案大体分四个部分:教学目的、教学重点和难点、教学过程设计、课堂教学设计说明.由于作者众多,风格不一,因此写作时不过分强调一致.

在编写这套书时,我们力求遵循以下原则:把先进的教育思想、灵活的教学方法和高中数学的学科特点结合起来.具体地说,它包含:

(1)把活动过程反映出来,突出主体参与;

(2)把知识系统反映出来,突出知识结构与认知结构的和谐统一;

(3)把知识规律反映出来,突出数学思想方法的运用;

(4)把教育现代的要求反映出来,适当运用现代化的教学手段.

由于本套书的作者众多,其中一部分是青年教师,因此在贯彻上述四条原则时,水准高低不齐.又由于写作任务繁重,作者写作时间与主编统稿时间过紧,这套书还有不少问题,恳请各地教师把在使用过程中的意见和问题反映给我们,以便今后修订时改正.

主　编

1999 年 4 月

第一章　直　　线

两点间距离

教学目标

1. 使学生理解并掌握平面上任意两点间的距离公式.

2. 使学生初步了解解析法证明.

3. ①　教学中渗透由特殊到一般，再由一般到特殊的思想.

②　“数”和“形”结合转化思想.

③　鉴赏公式蕴含的数学美.

教学重点与难点

重点　猜测两点间的距离公式.

难点　理解公式证明分成两种情况.

教学过程

师：上节我们学习了有向线段，现在有问题是：如果 A、B 是 x 轴上两点，C、D 是 y 轴上两点，它们坐标分别是 x_A、x_B、y_C、y_D，那么 $|AB|$、$|CD|$ 又怎样求？

生：$|AB|=|x_B-x_A|$，$|CD|=|y_C-y_D|$.

师：现在再请同学们解如下两题.

①　求 B（3，4）到原点的距离.

②　设 A（x_1，y_1）；B（x_2，y_2），求 $|AB|$.

生：B 到原点距离是 5.

师：你是怎么得出来的？

生：我是通过观察图形，发现一个 Rt$\triangle BMO$，应用勾股定理得到的.（注：为②猜想打基础.）

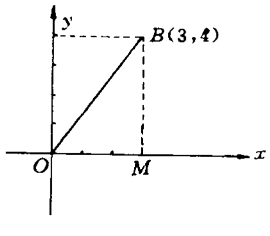


图 1-1

师：请同学们猜猜②题的结果？

生：甲：$|AB|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}+\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2}$.

乙：$|AB|=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$.

丙：$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

丁：

⋮

师：哪个公式对呢？或问甲、乙、丙…怎么猜出来的.

生甲：利用①题求出 A 点到原点距离加上 B 点到原点距离.

(其他学生讨论反向原点 O 在 P_1、P_2 直线上吗？引导讨论达到认同 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，根据第①题构造 Rt△的想法，把②题也构成 Rt△.)

师：我们来欣赏和考验它的正确性.

① 按距离要求它大于等于零，是这样吗？

生：是.

② $|AB|=|BA|$. 公式满足吗？

生：满足.

师：用猜出公式检验①题.

生：$|BO|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}=5$.

师：当 AB 平行于 x 轴或平行于 y 轴，公式还适用吗？

生：当 AB 平行于 x 轴，则 $y_1=y_2$. 所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=|x_1-x_2|$. 同理当 AB 平行于 y 轴，则 $x_1=x_2$. 所以 $|AB|=\sqrt{(y_1-y_2)^2}=|y_1-y_2|$，是适用的.

师：这就增强了我们猜想公式的信心. 那么我们应该对公式从理论上加以证明. 应该怎么办？

生：证明时要构造 Rt△.

师：总能构造 Rt△吗？

生：当 AB 平行于 x 轴或 AB 平行于 y 轴时不行.

师：那么 AB 不平行于 x 轴或 y 轴任意两点总能构造 Rt△吗？

生：可以.

师：好！要求我们证明时分两种情况：① 两点连线平行 x 轴或 y 轴时；② 两点连线不平行于 x 轴或 y 轴. 下面，我们来求平面上任意两点间的距离.(教师在黑板上画图，学生完成证明过程.)

生：在直角坐标系中，已知两点 P_1 (x_1, y_2)、P_2 (x_2, y_2) 如图：从 P_1、P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1、P_1N_1 和 P_2M_2、P_2N_2，垂足分别为 $M_1(x_1,0)$、$N_2(0,y_1)$、$M_2(x_2,0)$、N_2 $(0, y_2)$，其中直线 P_1N_1 和 P_2M_2 相交于点 Q.

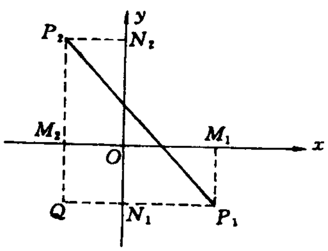


图 1-2

在 Rt△P_1QP_2 中，

$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2$. 因为 $|P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|$，$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|$，所以 $|P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$.

由此得到两点 P_1 (x_1, y_1)、P_2 (x_2, y_2) 的距离公式：

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

师：同学们已知道两点的距离公式，请大家回忆一下我们怎样知道的.(回忆过程)

① 我们先计算在 x 轴和 y 轴两点间的距离. ② 又问了 B (3.4) 到原点的距离，发现了 Rt△. ③ 猜想了任意两点距离公式. ④ 最后求平面上任意两点间的距离公式. 这种由特殊到一般，由特殊猜测任意的思维方式是数学发现公式或定理到推导公式、证明定理经常应用的方法. 同学们在做数学题可以采用！下面对两点间的距离公式应该进一步理解和鉴赏它.

① 距离这个量是非负数，那么$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$是非负数吗？答案是肯定的.

② 再看看公式变换一下结构：$|P_1P_2| \overset{?}{=} |P_2P_1|$. $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \overset{?}{=} \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$是恒等吗？结构对称吗？答案也是肯定的.

③ 从公式$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，没有涉及长度单位，那么对任何长度单位都适用吗？答案也是肯定的，说明公式应用的广泛性.

④ 当P_1、P_2点同时平移时，不论P_1P_2落在什么位置，$|P_1P_2|$有变化吗？答案也是肯定的，又说明了公式的任意性.

⑤ 对于这个公式的重要性：公式是解析几何的基础知识，基本公式. 它对以后继续学习研究解析几何问题有着广泛的用途，在以后学习任何曲线问题时都会用到它，在解决实际问题时也会经常用到，在今后的学习中会体会到这一点.

现在我们再看一个例子：在一个圆上，有A、B、C、D 4个点，你怎样证明：

$|AO|=|BO|=|CO|=|DO|=R$呢？

引导学生利用三角解决.

设A (x_0, y_0)，$\angle AOM=\theta$.

所以 $\begin{cases} x=|OA|\cdot\cos\theta, \\ y=|OA|\cdot\sin\theta. \end{cases}$

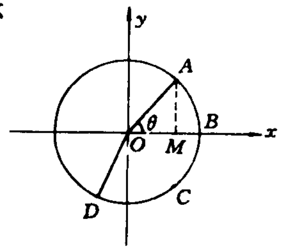


图 1-3

所以 $|AO|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{|OA|^2\cos^2\theta+|OA|^2\sin^2\theta}=\sqrt{|OA|^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\sqrt{|OA|^2}=|OA|=R$. 今天我们学习了平面上两点间的距离.（教师在黑板上写上课题：两点间的距离.）

练习：求下列坐标下的两点间的距离？

(1) $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $A\left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$、$B$ $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

(3) 有一线段的长度是13，它的一个端点是A $(-4, 8)$，另一个端点是B的纵坐标3，求这个端点的横坐标？并画出这个点.

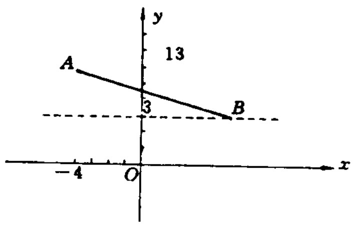


图 1-4

练习方式：(1)(2)学生下面做，教师叫一个或二个学生板书后，再纠正错误. 或叫学生口述，教师板演，规范书写格式. 而对于(3)应让学生先画图，再解.

解：设B $(x, 3)$，根据$|AB|=13$，

即：$(x+4)^2+(3-8)^2=13^2$，

$x^2+8x-128=0$，

解之：$x_1=8$或$x_2=-16$.

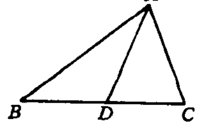


图 1-5

学生先找点，有可能找不全，丢掉点，而用代数解比较全面. 也可以引至到A $(-4, 8)$点距离等于13的点的轨迹（或集合）是以A点为圆心13为半径的圆上与$y=3$的交点，应交出两个点.

师：两点间的距离公式能起到证明两条线段相等作用吗？我们看下面一题.

例 1 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，求证：$|AB|^2+|AC|^2=2(|AD|^2+|DC|^2)$.

师：我们先作一个三角形 ABC，AD 是 BC 边上的中线。再想如何证明：$|AB|^2+|AC|^2=2(|AD|^2+|DC|^2)$.

生：必须把$\triangle ADC$ 放在直角坐标系内，利用距离公式.

师：如何放呢？下面可以画画坐标系.

生：在下面画，教师下面巡视，最后归纳成以下几种.

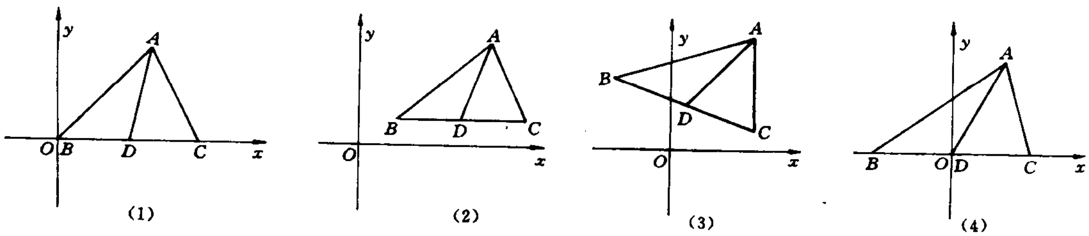


图 1-6

师：$\triangle ABC$ 在坐标系中大致有以上 4 种，都能达到证明结论. 请同学观察哪种放法比较简捷呢？

生：(1)（4）的放法比较好，其中（4）种最好.

师：好，哪种放法最不好？

生：(3) 种放法最不好.

师：为什么？说说理由？(讨论)

生：(3) A、B、C 坐标均不一样，字母太多，且 D 点坐标不知如何求？(未学中点坐标公式.)

(2) 种 B、C 两点纵坐标一样. (1) 种 B 点与原点重合 B (0, 0)，D、C 坐标纵坐标为零，比较好，计算较简便. (4) 种方法是 B、D、C 在 x 轴上，纵坐标均为零，且 B、C 对称，横坐标互为相反数.

师：好，我们就选（4）种方法证明. 再问一下 A 点放在 y 轴上不更好吗？

生：把 A 点放在 y 轴上，三角形是特殊的等腰三角形，失去一般性.

证明：取线段所在的直线为 x 轴，点 D 为原点 (O)，建立直角坐标系，设点 A 的坐标为 (b, c)，点 C 的坐标为 $(a, 0)$，则点 B 的坐标为 $(-a, 0)$，可得：$|AB|^2=(a+b)^2+c^2$，$|AC|^2=(a-b)^2+c^2$，$|AD|^2=b^2+c^2$，$|OC|^2=a^2$.

所以 $|AB|^2+|AC|^2=2(a^2+b^2+c^2)$,

$|AO|^2+|OC|^2=a^2+b^2+c^2$.

所以 $|AB|^2+|AC|^2=2(|AD|^2+|DC|^2)$.

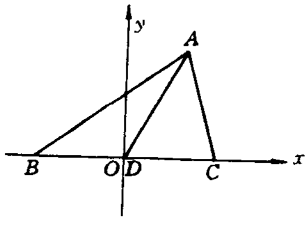


图 1-7

例 2 对任意实数 x_1, x_2, y_1, y_2 下面的不等式成立：$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

师：这样的代数不等式通常怎样证？

生：从现在学习代数不等式的知识来看有比较法.

师：是这样，随着学习的深入，代数不等式还有综合法、分析法、放缩法、数学归纳法、

反证法、判别式法、图象法等.

师：按距离公式，3 个根式各像什么？

生：距离公式.

师：涉及到哪几个点？

生：涉及 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、$(0, 0)$.

师：画图看看，怎样证？

生：设 $O(0, 0)$、$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，且 O、A、B 构成一个三角形.

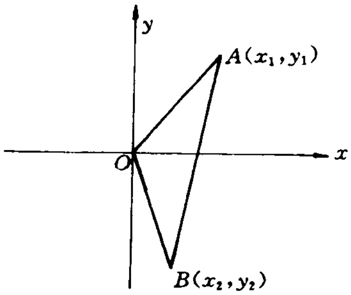


图 1-8

因为 $|OA|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，$|OB|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，又因为 $|AB|<|OA|+|OB|$（三角形两边之和大于第三边），

因为 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

师：等式如何取得？

生：当 O、A、B 共线且 O 在 AB 之间时：则 $|AB|=|OA|+|OB|$.

师：当 O、A、B 3 点共线，O 在 AB 之外时，又怎么样？

生：这时 $|AB|<|OA|+|OB|$.

师：总之，$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$. 这道题实际上是距离公式的逆用. 我们在解数学问题时经常强调“形”到“数”转化，而这道题以形解数. 从例 1 来看是用代数方法解决几何问题，起名叫做解析法，而例 2 是形解数. 这些都是“数”和“形”相互转化. 今后我们由它在方程中的应用、在函数最值中应用、在证明恒等式中应用、在三角方面的应用，可以看出两点间的距离公式在解决数学问题中的广泛性. 它的关键是转化为 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 的形式，并且要对有关的数或形进行几何解释，利用数形结合的数学思想，借助于图形的有关性质得出问题的解或结论.

练习：试证直角三角形斜边中线等于斜边一半.（学生自己完成）

小结：1. 学习了两点间的距离公式.

2. 解析法证明几何问题，建立坐标系的原则又是什么呢？在不失一般性的前提下：(1) 设点尽可能出现对称点. (2) 尽可能的把点放在坐标轴上，这样，点的坐标会出现有的坐标为零，优化计算.

3. 学习中运用特殊到一般，再由一般到特殊的思想. 还有“数”“形”结合的数学思想.

补充作业：

1. 若 B、C、D 在数轴上的坐标是 a，$2a$，$3a$ $(a>0)$，那么求出数轴上适合 $|OA|^2+|AB|^2+|AC|^2+|AD|^2=5a^2$ 的点 A 的坐标.（答案 $\frac{3}{2}a$）

2. 在 x 轴上求一点 P，使 P 点到 $A(-4, 3)$ 和 $B(2, 6)$ 两点的距离相等.（答案 $x=\frac{3}{4}$）

3. 判断三点 $A(3, 1)$、$B(-2, 9)$、$C(8, 11)$ 是否共线？（答案不共线）

4. 已知三点 $A(3, 2)$、$B(0, 5)$、$C(4, 6)$，则 $\triangle ABC$ 的形状是什么？（答案 B）

（A）直角三角形. （B）等边三角形.

（C）等腰三角形.　　　　　　　　（D）等腰直角三角形.

5. 试证矩形的对角线相等.

设计说明

距离概念，在日常生活中时刻遇到，学生在初中平面几何中已经学习了两点间的距离、点到直线的距离、两条平行线间的距离概念. 到高一立体几何中又学习了异面直线距离、点到平面的距离、两个平面间的距离等. 其基础是两点间的距离，许多距离的计算都转化为两点间的距离. 在平面直角坐标系中任意两点间的距离是解析几何重要的基本概念和公式. 到复平面内又出现两点间距离，它为以后学习圆锥曲线，动点到定点的距离，动点到定直线的距离打下基础，为探求圆锥曲线方程打下基础. 例如：圆的概念是动点到定点的距离等于定长的点的集合. 椭圆的概念是动点到两个定点距离和等于常数的点的集合. 双曲线的概念以及抛物线的概念都涉及到距离的概念. 另外，可以看出两点间距离公式为解决代数、三角和几何问题起到了重要作用，所以学习掌握运用两点间的距离公式的重要性是显而易见的.

解析几何是通过代数运算来研究几何图形的形状、大小和位置关系的，因此，在学习解析几何时应充分利用“数形”结合的数学思想和方法.

1. 关于本节课的宏观想法

从本节课的内容，即平面内两点间的距离公式及应用公式解题，来了解解析法证明. 初步会用解析法证明简单的几何题. 因而确定的教学目标是从教材的性质确定本节课是概念及公式的推导课. 而重点是掌握两点间的距离公式，所以采用了“归纳—演译”，渗透由特殊到一般，再由一般到特殊的方法. 同时充分利用了数形转化，以形促数、以数找形的数学思想和方法.

确定导入课是在上节有向线段的长度基础上提出一个问题，即 A、B 是 x 轴上两点，C、D 是 y 轴上两点，求 $|AB|$ 及 $|CD|$？再引出一个特殊点 B（3，4）到原点距离，让学生观察图形发现 Rt△，利用勾股定理解决，为猜想两点间的距离公式和推导打下基础. 再提出任意两点 A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2），如何求 $|AB|$. 让学生猜想，引导到正确公式中来. 应该在猜想的教学环节上下功夫. 在猜出公式后及时引导学生欣赏和考验它的正确性. 由此说明公式普遍性及特殊性都适用，才称其为公式. 在经过严格的理论推导出公式才能成为真理. 更深一层引导同学理解和鉴赏公式. 让学生在学数学时更重要的是学会数学思维方法，在得到公式时不要到此而止，还要进一步理解它，鉴赏它，使学生体会到数学的美. 解析法证明为几何证明又开辟了新的途径是本节的难点，特别是如何建立坐标系，比较它优劣，在小结中总结出建立坐标系的一般原则，使学生初步了解解析法证明. 对于例 2 代数不等式的证明，其目的是以形解数，如果利用代数中的比较法、综合法、逆证法等都是不能很快解决的，但这个题要根据所授学生的实际决定取舍.

2. 教学微观想法

两点间的距离公式的导出以及它的应用解题，从问题的提出开始，尽可能地让学生参与知识的产生及形成过程，充分发挥学生的主体作用，要全方位、分层次参与任何问题结论的得出都由学生自己完成，教师只起到点拨作用. 在有可能的情况下可以用电脑提高动画效果. 例：A、B 平行移动，解析几何证明坐标系的选择、代数不等式中三角形的变化等. 这样，学生真正参与概念的建立、公式推导探索过程，从而体会获取知识的乐趣，成为“生产”知识的主人.

3. 教学情境设计的想法

以提出问题导入新课，每个问题又尽可能地让学生动脑、动手、动口，去发现、去猜想、去在理论上推导，所有的机会都给学生，同时又及时小结数学思想和方法，思维策略，以及相互转化，都会极大地调动学生学习的积极性．另外，又因为每个学生实际情况有差异，学生参与要分层次进行．

对课内练习及课外作业要求来讲，教学任务要保底但不封顶，所以要结合自己学生的实际情况，有选择去练习，以达到掌握本节课内容的主要目标．本节课主要掌握两点间距离公式及应用．在应用涉及到其他知识，例如三角知识，或数字带根号的等，首先要保底，不要理它，但基础好的学生也可以增加涉及其他知识范围．例如在例 2 代数不等式中，教案教师问了这样的代数不等式怎样证？是从代数角度考虑如何证它．但学生没有学习到代数不等式这章，则可以改变问法．

（北京市新源里中学　谭志敏）

线段的定比分点

教学目标

1．学生通过学习、研究，弄清定比、定比分点的意义，特别是分点的位置与 λ 的对应关系．

2．培养学生掌握转化、联想和类比等重要数学思想方法，提高学生研究问题的能力．

教学重点与难点

线段定比分点公式的猜想、鉴赏及其应用是教学重点，正确理解线段定比分点中定比 λ 与分点位置的对应是教学难点．

教学过程

师：请说出：1．有向线段、有向线段的长度、有向线段数量的意义．并举例说明以上三者的表示方法；2．说出有线段数量公式；3．平行线分线段成比例定理．

生：（略）．

师：在有向直线 l 上任取一点 P，把 l 上的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$，怎样表示这两条有向线段的比？怎样表示这两条有向线段长度的比？又怎样表示这两条有向线段数量的比？

生：$\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$、$\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}$、$\dfrac{P_1P}{PP_2}$ 分别表示这两条有向线段的比、长度比和数量比．

师：请同学们一定要分析清这三者之间的区别与联系．下面我们学习：

1．线段定比分点（板书）这一重要概念．

（用投影片打出）

“有向直线 l 上的一点 P，把 l 上的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$．$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 数量的比叫做点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比，通常用字母 λ 来表示这个比值，

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$$

点 P 点做 P_1P_2 的定比分点．”

师：在 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$ 中，它是以线段 P_1 为起点，分点 P 为终点的有向线段的数量 P_1P 与以分点 P 为起点，线段的终点 P_2 为终点的有向线段 PP_2 数量之比，为了记忆，我们把它写成 $\lambda=$

$\dfrac{\text{起}\rightarrow\text{分}}{\text{分}\rightarrow\text{终}}$，这个顺序不能颠倒.

2. 内分点和外分点（板书）

师：下面我们来分析定比分点 P 的位置，与之对应的比 λ 与实数 R 之间的一一对应关系. 请看下图：

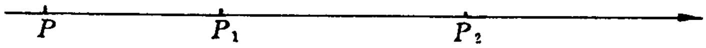


图 1-9

当 P 从左向右运动至 P_1 点，请同学们猜测 λ 值的变化情况.

生：此时 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$，因为$\overrightarrow{P_1P}$与$\overrightarrow{PP_2}$方向相反，因此 λ 应是负值. 又因为 $|P_1P|<|PP_2|$ 所以 $-1<\lambda<0$，当 P 与 P_1 点重合时，由于 $P_1P=0$ 所以 $\lambda=0$.

师：很好，如果 P 点继续向右作靠近 P_2 点的运动. 此时可在 P_1P_2 上，我们把 P 叫做$\overline{P_1P_2}$的内分点. 这样 λ 值怎样随着 P 的变化而变化呢？

生：由于$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$方向相同. λ 是正值，并且$|P_1P|$逐渐增大，$|PP_2|$逐渐减小. 因此 λ 可取一切实数值.

师：在点 P 与 P_2 重合时，显然此时$|PP_2|=0$. λ 值怎样呢？

生：应该不存在.

师：下面观察当 P 点继续向右移动的情况，λ 值怎样变化.

生：λ 应是负值，并且$|P_1P|>|PP_2|$，因此 λ 值总大于负 1，即 $\lambda>-1$.

师：观察以上情况，λ 能否是-1 的值.

生：（议论后得出）$\lambda=-1$ 不可能成立.

师：我们把 λ 的变化情况总结为下表：

分点的位置	内分点	外分点		分点与一端点重合	
	P 在 P_1P_2 上	P 在 P_1P_2 的延长线上	P 在 P_2P_1 的延长线上	P 与 P_1 重合	P 与 P_2 重合
图示	P_1 P P_2	P_1 P_2 P	P P_1 P_2	(P) P_1 P_2	(P) P_1 P_2
$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$	$\lambda>0$	$\lambda<-1$	$-1<\lambda<0$	$\lambda=0$	λ 不存在

点 P 在 P_1P_2 外，我们把点 P 叫做$\overline{P_1P_2}$的外分点，也就是说在直线 P_1P_2 上的任意一点，使得 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$与实数（不含$-1$）形成一种对应关系，这样，定比分点实质上起到了使有向线段数量比"代数化"的作用.

由于点 P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比与它们所在的直线 l 的方向无关，为简便起见，在以后谈到点 P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比时，一般不提它所在的有向直线的方向.

师：点 P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比和点 P 分$\overline{P_2P_1}$所成的比是否相同？这两者之间有什么关系？

生：（经讨论后）因为有向线段数是与方向长度有关，P 分 P_2P_1，P_2 是起点，P_1 是终点，因此 P 分 P_2P_1 的比是$\dfrac{P_2P}{PP_1}$，并且有：

$$\frac{P_1P}{PP_2}\cdot\frac{P_2P}{PP_1}=1.$$

3. 定比分点坐标公式（板书）

师：下面我们研究这个问题，设在数轴上，P_1 和 P_2 两点坐标分别为 2 和 7，点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 3，求分点 P 的坐标．设 P 的坐标为 x，怎样求 x 呢？

生：因为 λ 的大小是由 P 点所在位置决定的，所以由 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$ 关系式把它们分别代数化可得一个关于 x 的方程：

$$3=\frac{x-2}{7-x}.$$

师：这个方程把 x 解出来，先暂时不做数的运算：

$$x=\frac{2+3\times 7}{1+3}.$$

这个式子中 x 是分点坐标，2 是起点坐标，7 是终点坐标，λ 是定比分点，你能猜想分点坐标的一般形式吗？

生：如果在数轴上，P_1，P_2 点的坐标分别是 x_1，x_2，点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成比为 λ，可以由上面方法求得 $x=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda}$．对吗？

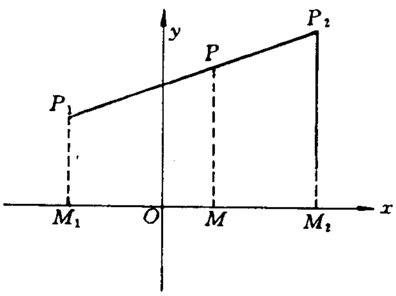


图 1-10

师：很好．如果 $\overline{P_1P_2}$ 是斜线段，设 $\overline{P_1P_2}$ 两个端点分别是 P_1 (x_1, y_1) 和 P_2 (x_2, y_2)，点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ $(\lambda\neq-1)$．(图 1-10)，求 P 点的坐标 (x, y) 的计算公式．大家能否根据 $\lambda\neq-1$ 猜想一下公式应是什么结构．

生：分母应有 $1+\lambda$ 的特征．

师：很好，怎样求出 (x, y) 的计算公式呢？

生：（经过讨论思维后）是否根据 P_1P_2 在数轴上的情况，我们联想到将 $\overline{P_1P_2}$ 投影到 x 轴上去，再根据平行线分线段成比例定理就可以解决了．

师：这个解题思路很正确，通常将二维问题利用投影法转化为一维问题是研究数学问题的重要方法之一．

过点 P_1、P_2、P 分别作 x 轴的垂线 P_1M_1、P_2M_2、PM，则垂足分别为 M_1 $(x_1, 0)$、M_2 $(x_2, 0)$、M $(x, 0)$，根据平行线分线段成比例定理得 $\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$．

如果点 P 在线段 P_1P_2 上，那么点 M 也在线段 M_1M_2 上；如果点 P 在线段 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上，那么点 M 也在线段 M_1M_2 或 M_2M_1 的延长线上．因此 $\frac{P_1P}{PP_2}$ 与 $\frac{M_1M}{MM_2}$ 的符号相同，所以

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

因为 $M_1M=x-x_1$，

$MM_2=x_2-x$，

所以 $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}$，

即 $(1+\lambda)\ x=x_1+\lambda x_2$，当 $\lambda\neq-1$ 时，

得 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

同理可以求得$\lambda=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$,

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此，当已知两个端点为P_1（x_1，y_1）、P_2（x_2，y_2），点P（x，y）分$\overline{P_1P_2}$所成的比为λ时，点P的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq -1).$$

①每个公式含有5个量可互求；②它是个一次分式，③当点P是线段$\overline{P_1P_2}$的中点时，有$P_1P=PP_2$，即$\lambda=1$，因此线段$\overline{PP_2}$中点P的坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

4. 例题（板书）

例1 点P_1和P_2的坐标分别是（-1，-6）和（3，0），点P的横坐标为$-\dfrac{7}{3}$，求点P分P_1P_2所成的比λ和点P的纵坐标y.

师：根据由投影法得到的关系式. 先求出λ的值，再由定比分点公式，求出P点的纵坐标.（学生自己求解）

解 由λ的定义，可得，

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{-\frac{7}{3}-(-1)}{3-\left(-\frac{7}{3}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-6+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}=-8.$$

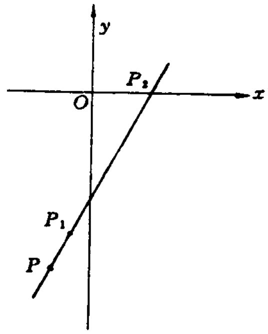


图 1-11

点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比是$-\dfrac{1}{4}$，点P的纵坐标是-8（图1-11）.

例2 已知点A（3，-4）与B（2，-1），延长AB到P，使$|BP|=2|AB|$，求P点坐标（x，y）.

师：因为P_1，P_2和P这3个点的位置已经确定，关键是要在上述3个点中，把哪一个视为分点；其次再定出余下的两个点，哪个是起点，哪个是终点，只有把各个点的位置确定之后，才能按照解题思路、方法和规律得出正确的结果.

生甲：用P分AB，由已知$\lambda=\dfrac{AP}{PB}=-\dfrac{|AP|}{|PB|}$,

$$\lambda=-\frac{3}{2}.$$

所以
$$x=\frac{3+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 2}{1-\frac{3}{2}}=0,$$

$$y=\frac{-4+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-1)}{1-\frac{3}{2}}=5.$$

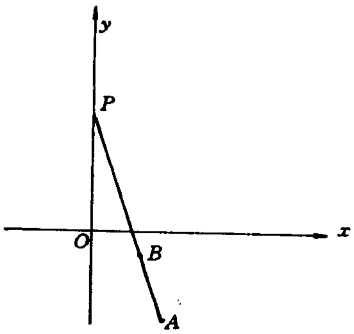


图 1-12

因此 P 点坐标是 $(0, 5)$.

生乙：用 B 分 PA，$\lambda=\frac{PB}{BA}=\frac{2}{1}=2$.

$$2=\frac{x+3\times 2}{1+2},$$

所以　$x=0$,

$$-1=\frac{y+2\cdot(-4)}{1+2},$$

$y=5$.

因此 P 点坐标是 $(0, 5)$.

师：当然还有其它的选择方法，因此我们在解题时可根据题目的要求选择起点、分点、终点，使我们的解题方法快捷简便.

例 3　已知三角形顶点是 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，求△ABC 的重心 G 的坐标（图 1-13).

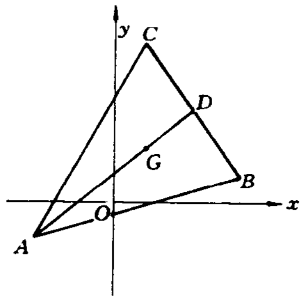


图 1-13

师：因为△ABC 的 3 个顶点坐标已经给出，说明三角形重心是固定的，又因为 D 是 BC 的中点，因此 D 点坐标确定了. 只要根据重心到顶点的距离是到该顶点对边中点距离的 2 倍，即求出重心 G 的坐标. 解题前还是应先确定 A、G、D 谁是分点、起点、终点，避免出错. 这题怎样确定呢？

生：定 G 分 AD 较好.

师：对，这样 λ 是正整数，计算简便.

解　设 BC 边的中点为 D，则 D 点坐标是 $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$，又因为 AD 是中线，且 $\frac{AG}{GD}=2$，所以 G 的坐标是

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_1+x_3}{2}}{1+2},$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}.$$

整理后得重心 G 的坐标

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

师：这个重心坐标的结论，使我们见到了数学和谐的对称美.

5. 引导学生小结

在使用定比分点公式时，

1）只有当 $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ 与 $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ 同时成立时，$P(x, y)$ 才是定比分点.

2）当已知 P 为 $\overline{P_1P_2}$ 的定比分点时，可通过其一个关系式求 λ 的值.

3）公式中的 λ，当起点、终点、分点确定时也随之确定，但对具体问题，为了计算方便，起点、终点、分点又可视问题灵活选择，使运算简便.

6. 作业：

1）课本：第 10 页练习 1，2，3，习题一，5，6（2)，7（2)、(3)，13，14.

2）补充题：

①已知点 A (3, −4) 与 B (−1, 2), 点 P 在直线 AB 上, 且 $|PA|=2|PB|$, 求点 P 坐标.

答 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ 或 (−5, 8).

②已知△ABC 的顶点 A (4, 1)、B (7, 5)、C (−4, 7), 则∠A 的平分线的长是多少? 答 $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

③已知 A (a, 0)、B (b, 0), C 点分 AB 所成的比为 $\frac{4}{3}$, D 点分 AB 所成的比为 $-\frac{4}{3}$, 求 CD 的长度 $\left(答\frac{24}{7}|a-b|\right)$.

设计说明

定比分点坐标公式是解析几何中的重要公式, 通过这个公式的教学, 除了在教学中渗透"形数结合"这种解析几何中常用的数学方法外, 还应充分展示这个公式的思想价值、联想类比等重要数学思想. 如在推导公式过程中利用投影法转化思想, 把二维问题转化为一维问题, 这种射影手段、转化思想在教学中不可忽视, 它是研究数学问题的重要方法.

在今后的学习中可以向学生介绍这样一个重要性质, 如果 $[a, b]$ 是 x 轴上的区间, $[0, 1]$ 是 y 轴上的一区间, 点 P_1 (a, 0), P_2 (b, 1), 那么对 $x\in[a, b]$, 必存在 $y\in[0, 1]$, 使得点 P (x, y) 在 $\overline{P_1P_2}$ 上.

我们设 P (x, y) 分 $\overline{P_1P_2}$ 为定比 λ ($\lambda>0$),

所以 $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{x-a}{b-x}$,

由定比分点公式可得

$y'=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{x-a}{b-a}$.

因为 $a\leqslant x\leqslant b$, 所以 $y'\in[0, 1]$, 取 $y=y'$, 即存在 $y\in[0, 1]$, 使得 P (x, y) 在 $\overline{P_1P_2}$, 这个性质通过定比分点公式可建立任一区间 $[a, b]$ 到 $[0, 1]$ 上的映射, 即 $f(x)=\frac{x-a}{b-a}$, $x\in[a, b]$, 从而为三角代换法解题提供了方便.

在直线参数方程中有:

直线 l 上有两点 P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), 则 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\end{cases}$ ($\lambda\in\mathbf{R}$)

立体几何中, 已知棱台上、下底面积为 S_1, S_2, 设 P 为其高上一点, 且将高自上而下分成的比为 λ, 过 P 作一平行于底的截面, 则截面面积 S 满足

$S=\frac{\sqrt{S_1}+\lambda\sqrt{S_2}}{1+\lambda}$

代数中, ①已知 $a>b>0$, 求证 $\frac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$ 不能介于 $\frac{a-b}{a+b}$ 和 $\frac{a+b}{a-b}$ 之间;

②证明: 不等式 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{\tan 3\alpha}{\tan\alpha}\leqslant 3$ 对任何 α 皆成立;

③函数 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域是________ (1989 年数学高考题);

等题目都可用定比分点公式去解.

解 ①令 $x_1=\dfrac{a-b}{a+b}$，$x_2=\dfrac{a+b}{a-b}$，$x'=\dfrac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$，且分别对应于数轴上的 P_1、P_2、P 三点，则 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 的比为

$$\lambda=\frac{x'-x_1}{x_2-x'}=\frac{\dfrac{a\sin x+b}{a\sin x-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a\sin x+b}{a\sin x-b}}=\frac{b-a}{b+a}.$$

因为 $a>b>0$，所以 $\lambda<0$，即 P 为外分点.

所以 $\dfrac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$ 不能介于 $\dfrac{a-b}{a+b}$ 与 $\dfrac{a+b}{a-b}$ 之间.

因此，通过定比分点教学寻找不同知识点、不同章节以及不同学科之间的规律联系之所在，无疑是培养和提高学生数学思维方法和解题能力的重要手段.

(北京市新源里中学　戴志年)

直线的倾角和斜率

教学目标

1. 通过教学，使学生正确理解倾角及斜率的概念，熟练掌握已知两点坐标求这两点所在直线斜率的公式及结合三角函数与反三角函数知识进行斜率与倾角间的互化运算；

2. 在讲授中培养学生思维的严谨性，注意学生语言表述能力的训练；

3. 充分利用斜率和倾角是从数与形两方面刻画直线相对于 x 轴倾斜程度的两个量这一事实，在教学中培养学生数形结合的思想.

教学重点与难点

教学重点在于使学生明确直线的倾角与斜率这两个概念，熟练掌握已知两点坐标求这两点所在直线斜率的公式.

教学难点，一方面在于如何使学生深刻理解直线的倾角及斜率这两个概念，另一方面在于如何培养学生自觉应用数形结合思想考虑和解决问题.

教学过程

一、新课引入

师：如何确定一条直线？

生：两点确定一条直线.

(在黑板上点出两点，利用教鞭演示两点确定一条直线.)

师：如果直线只通过其中一点，要确定这条直线还要增加什么条件？

生：这条直线的方向，也就是倾斜程度.

(教师在黑板演示)

师：好，今天我们就共同来研究如何刻画直线的倾斜程度.

(板书课题：直线的倾角及斜率)

二、讲授内容

师：我们习惯用角来刻画方向、倾斜程度，请看下列 4 张图，我们选择哪个角来描述直线的倾斜程度？我们希望这个角符合习惯，并且能够保证平面上任何一条直线都有唯一的角与之相对应.

生：(异口同声地) 选 α 角来刻画直线的倾斜程度.