

高职高专教材

经济应用数学基础(三)

# 概率论与 数理统计

(经济类与管理类)

周誓达 编著

 中国人民大学出版社

高职高专教材  
经济应用数学基础(三)

# 概率论与数理统计

(经济类与管理类)

周誓达 编著

中国人民大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

经济应用数学基础. 3, 概率论与数理统计/周晔达编著.

北京: 中国人民大学出版社, 2000

高职高专教材. 经济类与管理类

ISBN 7-300-03619-8/O · 44

I. 经...

II. 周...

III. ①概率论-高等教育:职业教育-教材②数理统计-高等教育:职业教育-教材

IV. F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 51527 号

高职高专教材

经济应用数学基础(三)

**概率论与数理统计**

(经济类与管理类)

周晔达 编著

---

出版发行: 中国人民大学出版社

(北京海淀路 157 号 邮编 100080)

发行部: 62514146 门市部: 62511369

总编室: 62511242 出版部: 62511239

E-mail: rendafx@public3. bta. net. cn

经 销: 新华书店

印 刷: 三河市新世纪印刷厂

---

开本: 850×1168 毫米 1/32 印张: 11.625

2000 年 11 月第 1 版 2000 年 11 月第 1 次印刷

字数: 288 000

---

定价: 15.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

# 前 言

本套经济应用数学基础教材是为高职高专经济类与管理类各专业编著的教材,包括《微积分》、《线性代数与线性规划》及《概率论与数理统计》.这是一套很有特色的教材,其特点是:紧密结合经济工作的需要,充分注意逻辑思维的规律,突出重点,说理透彻,循序渐进,通俗易懂.

《概率论与数理统计》共分五章,介绍了经济工作所需要的随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、几种重要的概率分布、中心极限定理以及参数估计、假设检验、回归分析,书首附有预备知识排列组合.本书着重讲解基本概念、基本理论及基本方法,培养学生解决实际问题的能力与熟练操作运算能力.

经济类与管理类毕竟不是数学系,本着“打好基础,够用为度”的原则,本书去掉了对于经济工作并不急需的某些内容与某些定理的严格证明,而用较多篇幅详细讲述那些急需的内容,讲得从容,讲得透彻,实现“在战术上以多胜少”的策略.本书不求深、不求全,只求实用,重视在经济上的应用,注意与专业课接轨,体现“有所为,必须有所不为”.

基础课毕竟不是专业课,本着“服务专业,兼顾数学体系”的原则,本书不盲目攀比难度,做到难易适当,深入浅出,举一反三,融会贯通,达到“跳一跳就能够着苹果”的效果.本书在内容编排上做到前后呼应,前面的内容在后面都有归宿,后面的内容在前面都有伏笔,充分利用形象直观说明问题,适当注意知识面的拓宽,使得“讲起来好讲,学起来好学”.

质量是教材的生命,质量是特色的反映,质量不过硬,教材就

站不住脚。本书在质量上坚持高标准,不但内容正确无误,而且编排科学合理,尤其在概率基本公式的论证上,在连续型随机变量概率密度的引进上,以及在假设检验与回归分析的处理上都有许多独到之处,便于理解与掌握。衡量教材质量的一项重要标准是减少以至消灭差错,本书整个书稿包括附录常用统计数值表在内都经过再三校对、验算,尽可能杜绝任何形式的差错,对读者认真负责。

例题、习题是教材的窗口,集中展示了教学意图。本书对例题、习题给予高度重视,例题、习题都经过精心设计与编选,它们与概念、理论、方法的讲述完全配套,其中除计算题与经济应用题外,尚有考察基本概念与基本运算技能的填空题与单项选择题。填空题要求将正确答案直接填在空白处;单项选择题是指在四项备选答案中,只有一项是正确的,要求将正确备选答案前面的字母填在括号内。书末附有全部习题答案,便于检查学习效果。

特邀华北光学仪器厂第一科研设计所葛利达同志验算习题答案,谨在此表示衷心的感谢。

热烈欢迎各位教师与广大读者提出宝贵意见,本书将不断改进与完善,更好地为科教兴国战略服务。

**周哲达**

2000年8月15日于北京

# 目 录

预备知识 排列组合	1
<b>第一章 随机事件及其概率</b>	<b>10</b>
§ 1.1 随机事件的概念	10
§ 1.2 随机事件的概率	23
§ 1.3 加法公式	34
§ 1.4 乘法公式	42
§ 1.5 全概公式	57
习题一	67
<b>第二章 随机变量及其数字特征</b>	<b>74</b>
§ 2.1 离散型随机变量的概念	74
§ 2.2 离散型随机变量的数字特征	84
§ 2.3 连续型随机变量的概念	94
§ 2.4 连续型随机变量的数字特征	109
§ 2.5 随机变量数字特征的性质	121
习题二	131
<b>第三章 几种重要的概率分布</b>	<b>140</b>
§ 3.1 二项分布	140
§ 3.2 泊松分布	153
§ 3.3 均匀分布	164
§ 3.4 指数分布	172
§ 3.5 正态分布	181
习题三	198

<b>第四章</b>	<b>中心极限定理与参数估计</b> .....	205
	§ 4.1 切贝谢夫不等式 .....	205
	§ 4.2 大数定律与中心极限定理 .....	213
	§ 4.3 样本分布 .....	225
	§ 4.4 参数的点估计 .....	240
	§ 4.5 参数的区间估计 .....	253
	习题四.....	267
<b>第五章</b>	<b>假设检验与回归分析</b> .....	271
	§ 5.1 假设检验的概念 .....	271
	§ 5.2 一个正态总体的假设检验 .....	278
	§ 5.3 两个正态总体的假设检验 .....	294
	§ 5.4 相关分析 .....	306
	§ 5.5 回归分析 .....	321
	习题五.....	333
	习题答案.....	339
<b>附录</b>	<b>常用统计数值表</b> .....	348
	附表一 泊松分布概率值表.....	348
	附表二 标准正态分布函数表.....	349
	附表三 $t$ 分布双侧分位数表 .....	350
	附表四 $\chi^2$ 分布上侧分位数表 .....	351
	附表五 $F$ 分布上侧分位数表.....	352
	附表六 $R$ 分布双侧分位数表.....	362
	参考书目.....	363

## 预备知识 排列组合

学习概率论与数理统计要用到排列组合的基本知识,更重要的是要用到排列组合的思维方法,因此将排列组合的内容归纳总结如下.

### 1. 基本原理

**例 1** 从甲村到乙村共有两类方式:第 1 类方式是走旱路,有 3 条路线;第 2 类方式是走水路,有 2 条路线,如图 0-1. 问从甲村到乙村共有多少种走法?

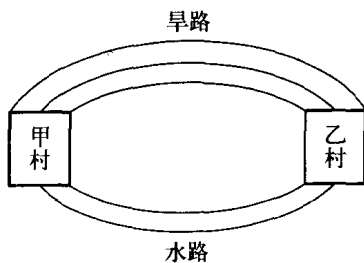


图 0-1

**解:**完成从甲村到乙村这件事情,走旱路与走水路这两类方式是并列的,沿着它们中的每一条路线都可以到达目的地,因此共有

$$3+2=5$$

种走法.

这样的例子是很多的,概括起来,就得到加法原理.

**加法原理** 完成一件事情共有  $r$  类方式,其中第 1 类方式有  $m_1$  种方法,第 2 类方式有  $m_2$  种方法, $\dots$ ,第  $r$  类方式有  $m_r$  种方



法,则完成这件事情共有

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r$$

种方法.

**例 2** 从甲村到丙村必须经过乙村,而从甲村到乙村有 5 条路线,从乙村到丙村有 4 条路线,如图 0—2. 问从甲村到丙村共有多少种走法?

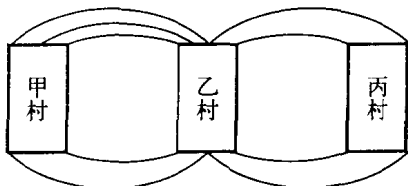


图 0—2

**解:**完成从甲村到丙村这件事情,必须依次经过两个步骤:第 1 个步骤是从甲村到乙村,有 5 条路线;第 2 个步骤是从乙村到丙村,有 4 条路线. 只有这两个步骤都完成了,才能到达目的地,缺少哪一个步骤都不行. 由于从甲村到乙村的每一条路线都对应于从甲村到丙村的 4 条路线,因此从甲村到丙村共有

$$5 \times 4 = 20$$

种走法.

这样的例子是很多的,概括起来,就得到乘法原理.

**乘法原理** 完成一件事情必须依次经过  $l$  个步骤,其中第 1 个步骤有  $n_1$  种方法,第 2 个步骤有  $n_2$  种方法, $\cdots$ ,第  $l$  个步骤有  $n_l$  种方法,则完成这件事情共有

$$n_1 n_2 \cdots n_l$$

种方法.

在应用基本原理时,必须注意加法原理与乘法原理的根本区别. 若完成一件事情有多类方式,其中每一类方式的任一种方法都

可以完成这件事情,这时则用加法原理;若完成一件事情必须依次经过多个步骤,缺少其中任一个步骤都不能完成这件事情,这时则用乘法原理.

## 2. 排列

### (1)元素不重复的排列

**例 3** 用数字 5,7,9 可以组成多少个数字不重复的两位数?

**解:**组成数字不重复的两位数,必须依次经过两个步骤:第 1 个步骤是确定十位数,这时数字 5,7,9 都可以放在十位上,从而有 3 种方法;第 2 个步骤是确定个位数,由于要求个位数与十位数不能重复,这时只能从所给三个数字去掉十位数后剩余两个数字中挑选一个放在个位上,从而有 2 种方法. 只有这两个步骤都完成了,才能组成数字不重复的两位数,缺少哪一个步骤都不行. 根据乘法原理,所以组成数字不重复的两位数共有

$$3 \times 2 = 6$$

种方法,即可以组成 6 个数字不重复的两位数,它们是

$$57, 59, 75, 79, 95, 97$$

在例 3 中,可以将数字 5,7,9 称为元素,组成数字不重复的两位数就是从这三个元素中每次取出 2 个不同元素排队,排在前面的是十位数,排在后面的是个位数. 由于这样的排列与数字不重复的两位数是一一对应的,因此求数字不重复两位数的个数等价于求这样排列的个数.

**定义 0.1** 从  $n$  个不同元素中,每次取出  $m$  个( $m \leq n$ )不同元素排成一列,所有这样排列的个数称为排列数,记作  $P_n^m$ .

如何计算排列数  $P_n^m$ ?从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个不同元素排成一列,必须依次经过  $m$  个步骤:第 1 个步骤是确定排列第 1 位置上的元素,这时是从  $n$  个不同元素中取出 1 个放在这个位置上,有  $n$  种方法;第 2 个步骤是确定排列第 2 位置上的元素,考虑到排列第 1 位置上已经占用了 1 个元素,这时是从剩余的  $n-1$  个不同

元素中取出 1 个放在这个位置上,有  $n-1$  种方法;……;第  $m$  个步骤是确定排列第  $m$  位置上的元素,考虑到排列前  $m-1$  个位置上已经占用了  $m-1$  个元素,这时是从剩余的  $n-(m-1)=n-m+1$  个不同元素中取出 1 个放在这个位置上,有  $n-m+1$  种方法. 根据乘法原理,共有

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

种方法. 由于一种方法对应一个排列,所以所有这样排列的个数即排列数

$$P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

若  $m < n$ , 则称排列为选排列;若  $m = n$ , 则称排列为全排列,这时

$$P_n^n = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

**例 4** 根据排列数的计算公式,有

$$P_5^2 = 5 \times 4 = 20$$

$$P_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

$$P_6^1 = 6$$

$$P_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

**例 5** 从 10 人中选举正副组长各 1 名,问共有多少种选举结果?

**解:** 从 10 人中选举正副组长各 1 名,可以认为从 10 人中选出 2 人排队,不妨规定排在前面的是正组长,排在后面的是副组长,这样的排列共有  $P_{10}^2$  个. 由于一个排列对应一种选举结果,所以共有

$$P_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$$

种选举结果.

值得注意的是,在甲、乙都当选的情况下,甲为正组长、乙为副组长与乙为正组长、甲为副组长是两种选举结果.

(2) 元素可重复的排列

元素可重复包括元素重复与元素不重复两种情况,不能认为元素可重复就是元素重复,元素可重复的排列是指在排列中允许出现相同元素.

**例 6** 北京市电话号码为八位,问电话局 8461 支局共有多少个电话号码?

**解:**由于 8461 支局电话号码前四位为 8461,因此只需确定后四位的数字,就组成 8461 支局电话号码.显然,在电话号码中允许出现相同数字.

组成 8461 支局电话号码,必须依次经过 4 个步骤:第 1 个步骤是确定电话号码第五位上的数字,这时是从 0 至 9 这 10 个数字中取出 1 个放在这个位置上,有 10 种方法;第 2 个步骤是确定电话号码第六位上的数字,考虑到在电话号码中允许出现相同数字,这时也是从 0 至 9 这 10 个数字中取出 1 个放在这个位置上,有 10 种方法;第 3 个步骤是确定电话号码第七位上的数字,也有 10 种方法;第 4 个步骤是确定电话号码第八位上的数字,也有 10 种方法.这是从 10 个不同元素中每次取出 1 个元素的元素可重复排列,根据乘法原理,共有

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

种方法.由于一种方法对应一个电话号码,所以 8461 支局共有 10 000 个电话号码.

**例 7** 邮政大厅有 4 个邮筒,现将 3 封信逐一投入邮筒,问共有多少种投法?

**解:**将 3 封信逐一投入邮筒,必须依次经过 3 个步骤:第 1 个步骤是将第一封信投入 4 个邮筒中的 1 个邮筒,有 4 种方法;第 2 个步骤是将第二封信投入 4 个邮筒中的 1 个邮筒,也有 4 种方法;第 3 个步骤是将第三封信投入 4 个邮筒中的 1 个邮筒,也有 4 种方法,这是从 4 个不同元素中每次取出 1 个元素的元素可重复排列.根据乘法原理,共有

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

种方法,即共有 64 种投法.

### 3. 组合

**例 8** 从 10 人中选举 2 名代表参加座谈会,问共有多少种选举结果?

**解:**这个问题同例 5 中选举正副组长各 1 名是不一样的,尽管都是选出 2 人,但在选举正副组长各 1 名时,这 2 人须排队,不妨规定排在前面的是正组长,排在后面的是副组长;而在选举 2 名代表时,这 2 人不须排队.

设从 10 人中选举 2 名代表共有  $x$  种选举结果. 考虑从 10 人中选举正副组长各 1 名的排列问题,在例 5 中已经得到共有  $P_{10}^2$  种选举结果,还可以依次经过下面两个步骤解决这个问题:第 1 个步骤是从 10 人中选出 2 人,相当于从 10 人中选举 2 名代表,已设有  $x$  种方法;第 2 个步骤是当选的 2 人分工,相当于 2 人排队,有  $P_2^2$  种方法. 根据乘法原理,共有  $xP_2^2$  种方法,即共有  $xP_2^2$  种选举结果. 于是有关系式

$$xP_2^2 = P_{10}^2 \quad \checkmark$$

得到

$$x = \frac{P_{10}^2}{P_2^2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

所以从 10 人中选举 2 名代表共有 45 种选举结果.

这是容易理解的,如甲、乙当选,对于选举正副组长各 1 名,有两种选举结果;而对于选举 2 名代表,却只是一种选举结果. 说明选举正副组长各 1 名的每两种选举结果对应于选举 2 名代表的一种选举结果,由于选举正副组长各 1 名共有 90 种选举结果,所以选举 2 名代表当然有 45 种选举结果.

**定义 0.2** 从  $n$  个不同元素中,每次取出  $m$  个 ( $m \leq n$ ) 不同元素并成一组,所有这样组的个数称为组合数,记作  $C_n^m$ .

如何计算组合数  $C_n^m$ ? 考虑从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个不同元素的排列问题, 共有  $P_n^m$  种方法, 还可以依次经过下面两个步骤解决这个问题: 第 1 个步骤是从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个不同元素并成一组, 有  $C_n^m$  种方法; 第 2 个步骤是取出的  $m$  个不同元素排成一列, 有  $P_m^m$  种方法. 根据乘法原理, 共有  $C_n^m P_m^m$  种方法. 于是有关系式

$$C_n^m P_m^m = P_n^m$$

所以得到

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 1}$$

同时规定  $C_n^0 = 1$ .

**性质** 组合数满足关系式

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

**证:** 将组合数  $C_n^m$  表示为

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 1} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 1}{m(m-1)\cdots 1 \cdot (n-m)\cdots 1} \\ &= \frac{n!}{m! (n-m)!} \end{aligned}$$

从而可将组合数  $C_n^{n-m}$  表示为

$$\begin{aligned} C_n^{n-m} &= \frac{n!}{(n-m)! [n-(n-m)]!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)! m!} \end{aligned}$$

所以得到

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

当  $m > \frac{n}{2}$  时, 利用组合性质计算组合数  $C_n^m$ , 可以减少计算量.

**例 9** 根据组合数的计算公式,有

$$C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$C_8^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

$$C_4^1 = \frac{4}{1} = 4$$

根据组合性质,有

$$C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

$$C_3^3 = C_3^0 = 1$$

对于实际问题,必须正确判别是排列问题还是组合问题,关键在于要不要计较所取出元素的先后顺序,即要不要将所取出元素排队. 若要排队,则是排列问题;若不要排队,则是组合问题.

**例 10** 9 个球中有 5 个黑球与 4 个白球,问:

- (1) 任取 4 个球,共有多少种取法?
- (2) 任取 4 个球中恰好有 1 个黑球,有多少种取法?
- (3) 任取 4 个球中至少有 3 个黑球,有多少种取法?
- (4) 任取 4 个球中至多有 1 个黑球,有多少种取法?

**解:** 由于在取球时不计较所取出球的先后顺序,即不需要将它们排队,因此这个问题是组合问题.

(1) 从 9 个球中任取 4 个球,共有

$$C_9^4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

种取法.

(2) 任取 4 个球中恰好有 1 个黑球,意味着所取 4 个球中有 1 个黑球与 3 个白球,完成这件事情必须依次经过两个步骤:第 1 个

步骤是从 5 个黑球中取出 1 个黑球,有  $C_5^1$  种取法;第 2 个步骤是从 4 个白球中取出 3 个白球,有  $C_4^3$  种取法. 根据乘法原理,有

$$C_5^1 C_4^3 = C_5^1 C_4^1 = 5 \times 4 = 20$$

种取法.

(3)任取 4 个球中至少有 3 个黑球,包括恰好有 3 个黑球与恰好有 4 个黑球两类情况,完成这件事情有两类方式:第 1 类方式是任取 4 个球中恰好有 3 个黑球,即所取 4 个球中有 3 个黑球与 1 个白球,有  $C_5^3 C_4^1$  种取法;第 2 类方式是任取 4 个球中恰好有 4 个黑球,即所取 4 个球中有 4 个黑球与 0 个白球,有  $C_5^4 C_4^0$  种取法. 根据加法原理,有

$$C_5^3 C_4^1 + C_5^4 C_4^0 = C_5^2 C_4^1 + C_5^1 C_4^0 = 40 + 5 = 45$$

种取法.

(4)任取 4 个球中至多有 1 个黑球,包括恰好有 1 个黑球与没有黑球两类情况,完成这件事情有两类方式:第 1 类方式是任取 4 个球中恰好有 1 个黑球,即所取 4 个球中有 1 个黑球与 3 个白球,有  $C_5^1 C_4^3$  种取法;第 2 类方式是任取 4 个球中没有黑球,即所取 4 个球中有 0 个黑球与 4 个白球,有  $C_5^0 C_4^4$  种取法. 根据加法原理,有

$$C_5^1 C_4^3 + C_5^0 C_4^4 = C_5^1 C_4^1 + C_5^0 C_4^0 = 20 + 1 = 21$$

种取法.



# 第一章 随机事件及其概率

## § 1.1 随机事件的概念

在自然界与经济领域内有两类现象：一类是条件完全决定结果的现象，称为确定性现象，如在边长为  $2m$  时，正方形的面积一定等于  $4m^2$ ；树上苹果成熟后，在地心引力作用下一定下落；在标准大气压下，水被加热到  $100\text{ }^\circ\text{C}$  时一定沸腾等。另一类是条件不能完全决定结果的现象，称为非确定性现象，或称为随机现象，如掷一枚均匀硬币，可能出现正面，也可能不出现正面；从一批产品中任取 1 件产品，可能是次品，也可能不是次品；从一本书中任取 1 页，其印刷错误可能是 3 个，也可能不是 3 个等。随机现象都带有不确定性，但这仅仅是随机现象的一个方面，随机现象还有规律性的一面，如在相同条件下，对随机现象进行大量观测，其可能结果就会出现某种规律性等。概率论与数理统计是研究随机现象规律性的一门科学。

在概率论与数理统计中，做事情称为试验，具有以下两个特点的试验称为随机试验：

1. 在相同条件下可以重复进行，且每次试验的可能结果不止一个；
2. 不能准确预言每次试验所出现的结果，但可以知道可能出现的全部结果。

随机试验简称为试验，每次试验的一个可能结果称为基本事件，记作  $\omega_1, \omega_2, \dots$ ，全部基本事件的集合称为基本事件空间，记作

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$