样条边界元法

秦荣 著

SBEM

广西科学技术出版社

样条边界元法

秦 荣 著

广西科学技术出版社

样条边界元法

秦荣著

*

广西科学技术出版社出版、发行
（南宁市河堤路14号）
广西大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张14.875 字数332,000
1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷
印数：1—2,000册

ISBN 7—80565—044—6
o·4
定价：5.90元

内 容 介 绍

本书阐述样条边界元法及其应用，共十二章。内容包括样条边界元法的基本原理和基本方法，以及其在位势、弹性力学、板壳、热弹性、振动、几何非线性、材料非线性、断裂力学、接触、电磁场、地应力及工程结构等问题中的应用。书中既有理论分析，又有应用实例。大量计算结果表明，样条边界元法是很有发展前途的方法。

本书对固体力学、结构力学、流体力学、计算力学、土建、水建、桥梁、航空、船舶、采矿、地下工程及机械工程等专业的研究生、大学高年级学生、教师、研究人员、工程技术人员都适用。对学理科的有关人员也有参考价值。

前　　言

在实现四个现代化的过程中，各行各业都有许多重要的工程建设项目。在这些工程的设计中包含许多复杂的力学问题，例如：（1）矿山工程中的竖井，国防工程中的导弹发射井，生命线工程中的管道……需要考虑圆柱壳体与周围介质的动力相互作用；（2）在地下工程中，要确定地应力问题，它直接影响着地下工程的设计及施工；（3）在水利及水力发电工程中，设计坝体时，要考虑水与坝的耦合作用，土坝渗流问题；（4）在船舶工程、建筑工程、桥梁工程、机械工程、海洋工程及航空航天工程中，都含有板壳问题、断裂问题及流体力学问题；（5）在各种工程中，都含弹性力学问题、塑性问题、热应力问题、振动问题；（6）在电气工程中，需要对电磁场进行分析；（7）在医学工程中，含有心脏力学、颅骨损伤、腰脊劳损及生物流体力学……因为这些力学问题的理论分析是非常困难的，甚至是不可能的，因此只得采用数值方法。目前常用的数值方法有下列几种：差分法；有限元法；有限条法；加权残数法；样条函数方法和边界元法。

边界元法是近二十年来在边界积分方程解法及有限元法的基础上发展起来的一个数值方法。这个方法的主要优点是适用范围广，所需要的输入数据简单，精确度高，能解决有限元法难以解决的问题。边界元法可以将三维问题化为二维问题，将二维问题化为一维问题。如果选择适当的函数表示边界未知量，则三维问题可以化为一维问题。对于无限域问题，用边界元法解题也非常有效。由于边界元法有上述优点，因此目前国内外对这个方法的研究日益增多，应用日益广泛。在国际上，自1978年开始，到

1987年已召开了九次国际边界元法会议；在国内，1985年召开了第一届全国工程中的边界元法会议，并决定1988年在南宁召开第二届全国工程中的边界元法会议。对边界元法的研究虽然时间不长，但已有很多成果。边界元法也有自己的缺点，需要进一步研究和开发。近几年来，作者在上述方法的基础上，提出一个样条边界元法。这个方法程序简单，输入数据少，内存少，适应小机解大题，比一般边界元法优越，是一种经济有效的方法。

本书共有十二章，第一章主要介绍一些与样条边界元法有关的基本概念，作为掌握本书所述方法的一个基础。

第二章主要介绍建立边界积分方程的方法。建立边界积分方程的途径，目前有三种，第一种是利用偏微分方程的基本解；第二种是利用偏微分方程的完备解；第三种是利用柯西积分公式。本章介绍其中几种方法，包括直接法和间接法，而且还介绍了将区域积分化为边界积分的方法。

第三章主要介绍位势问题的样条边界元法。在工程中，许多问题可归结为位势问题，例如，热传导问题，渗流问题，动水压力问题，转扭问题及电磁场问题。利用样条边界元法计算位势问题非常简便。

第四章主要介绍弹性力学问题的样条边界元法。在工程中，许多问题可归结为求解弹性力学问题，例如，坝体应力分析，岩体地应力问题，断裂力学问题，地下结构问题及固体的接触问题。本章列有空腹重力坝的计算例题。

第五章主要介绍板壳的样条边界元法。在许多工程中都有板壳问题，例如，油罐、水池、桥梁、建筑、水利、船舶、飞机、海洋工程等都含有板壳。本章介绍的内容包括开孔板壳、中厚板及薄壳的孔边应力集中问题。

第六章主要介绍热弹性问题的样条边界元法。热应力现象普遍发生在工业建设及国防建设中，许多工程设计需要考虑热应力

问题，例如核电站、火箭、超音速飞机、大型水坝及大跨度桥梁的设计，都需要考虑热应力的影响因素。随着我国四个现代化的发展，热应力问题的分析越来越显得重要。

第七章主要介绍振动的样条边界元法。振动现象普遍发生在自然界。在工程设计中，许多工程结构不仅要作静力分析，而且还要作动力分析，例如，高层建筑要考虑地震和风振的影响；大型水坝要考虑地震的影响；桥梁工程不仅要考虑地震的影响，而且还要考虑桥上动荷载的影响；国防工程要有防御能力，必须考虑炸弹及核武器攻击的影响。

第八章主要介绍几何非线性问题的样条边界元法及摄动——样条边界元法。

第九章主要介绍塑性问题的样条边界元法。塑性问题是一个材料非线性问题，普遍发生在工业建设及国防建设中。如果在工程设计中考虑塑性因素，则可以挖掘材料潜力，提高结构承载能力，使工程经济合理和安全可靠。

第十章主要介绍各种方法的联合应用。各种方法都有自己的优缺点，在实际工作中可以将各种方法相互配合应用。例如：有限元—样条边界元法，解析解—样条边界元法。这样可以发扬优点，避免缺点。杂交出优势。

第十一章主要介绍热传导问题的样条边界元法，不仅对热传导问题及扩散问题适用，而且对波动问题也适用。

第十二章主要介绍几个应用问题，包括断裂力学问题，接触问题，电磁场问题，轴对称弹性体问题，流体与固体耦合动力问题，圆柱厚壳与岩土介质耦合动力问题，结构与地基的相互作用，电磁场与固体的耦合问题及扁壳的简化计算方法。

本书取材主要是作者自己的研究成果。这些成果大多数在国内外已公开发表，反应很好，有的还获得优秀科研成果奖。

样条边界元法应用很广，对弹性力学、塑性力学、断裂力

学、板壳力学、岩体力学、地质力学、生物力学、流体力学、电磁场、热传学、结构动力学及各种工程中的力学问题等方面都适用。

在本书的写作过程中，得到国内许多老前辈和同志们的热情关怀和大力支持；在本书的出版过程中，得到广西区教委会、广西综合设计院、广西力学学会、广西科学技术出版社、工程力学杂志社及广西大学印刷厂的热情帮助和大力支持，现借此机会表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，错误和缺点在所难免，请读者帮助指正。

秦 荣

1987年9月于广西大学

目　　录

第一章　基本概念

本章主要介绍一些与样条边界元法有关的基本概念，作为掌握本书所述方法的一个基础。

§1.1　样条边界元法

科技问题中的边界积分方程可归结为下列积分方程：

$$u(P)+\int_{\Gamma}G(P,s)u(s)ds=f(P) \qquad (1.1)$$

式中，$G(P,s)$ 及 $f(P)$ 都是已知函数，s 为边界曲线的弧坐标，P 是边界Γ上的任一点，$u(s)$是边界未知函数。

积分方程（1.1）的精确求解是很困难的，本书采用数值积分法进行求解[1]。为此，在边界Γ上作一个均匀分划(图1.1)：

$$s_0<s_1<s_2<\cdots<s_N$$

$$s_i=s_0+ih,$$

$$h=s_{i+1}-s_i=l/N$$

式中，l 为边界Γ 的周长；s_i 为边界结点 i 的弧坐标；$i=0$，1，2，…，N。

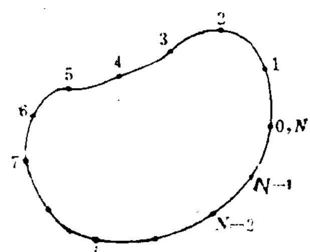

图1.1

式（1.1）的解可以用 B 样条函数来逼近，即

$$u(s)=\sum_{i=0}^{N}u_i\phi_i(s) \qquad (1.2)$$

将式（1.2）代入式（1.1）可得：

$$u(P)+\sum_{i=0}^{N}\left(\int_{\Gamma}G(P,\ s)\phi_i(s)ds\right)u_i=f(P)$$

(1.3)

式中$u_i=u(s_i)$；$\phi_i(s)$为B样条函数构成的基函数，在本章§1.2及§1.3中有所介绍，详见文献[2]。

如果设$P=s_j$（$j=0，1，2，\cdots，N$），则式（1.3）可变为

$$u(s_j)+\sum_{i=0}^{N}H_{ji}u_i=f(s_j) \tag{1.4}$$

$$j=0,1,2,\cdots,N$$

式中 $$H_{ji}=\int_{\Gamma}G(s_i,\ s)\phi_i(s)ds \tag{1.5}$$

式（1.5）可以用数值积分法进行计算，一般采用高斯求积公式计算。由式（1.4）可得：

$$[A]\{u\}=\{f\} \tag{1.6}$$

式中 $\{u\}=[u_0\quad u_1\quad u_2\quad\cdots\quad u_N]^T$

$$\{f\}=[f(s_0)\quad f(s_1)\quad f(s_2)\quad\cdots\quad f(s_N)]^T$$

$$[A]=[I]+[H] \tag{1.7}$$

$$[H]=[H_{ji}]\quad i,j=0,1,2,\cdots N \tag{1.8}$$

其中$[I]$为$(N+1)(N+1)$的单位矩阵。

$[A]$是一个$(N+1)(N+1)$的矩阵。可以证明，$[A]$是一个非奇异矩阵。因此，式（1.6）有唯一的解。利用式（1.6）求出$\{u\}$后，由式（1.2）很容易求出边界积分方程式（1.1）的解。我们把这个方法称为样条边界元法。计算结果表明，样条边界元法是一个经济有效的方法。

§1.2 B样条函数

因为样条边界元法与B样条函数有关，因此本节介绍B样条函数的一些基本概念，作为掌握样条边界元法的一个基础。

n次B样条函数可以利用下列表达式确定[2]：

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\left(x+\frac{n+1}{2}-k\right)_+^n\Big/n! \tag{1.9}$$

式中 $\binom{n+1}{k}=\dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$， $0!=1$。

当$n=1$时，由式（1.9）可得：

$$\varphi_1(x)=\binom{2}{0}(x+1)_+-\binom{2}{1}x_++\binom{2}{2}(x-1)_+$$
$$=(x+1)_+-2x_++(x-1)_+$$

由此可得

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-1,0]\\ 1-x, & x\in[0,1]\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

$\varphi_1(x)$称为一次B样条函数，它的曲线形状如图1.2a所示。

当$n=2$时，由式（1.9）可得：

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}\left[\binom{3}{0}\left(x+\frac{3}{2}\right)_+^2-\binom{3}{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)_+^2\right.$$
$$\left.+\binom{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)_+^2-\binom{3}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)_+^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)_+^2-3\left(x+\frac{1}{2}\right)_+^2+3\left(x-\frac{1}{2}\right)_+^2\right.$$

$$-\left(x-\frac{3}{2}\right)_+^2\Big]$$

由此可得：

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}\begin{cases}\left(\frac{3}{2}+x\right)^2, & x\in\left[-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right]\\ \left(\frac{3}{2}+x\right)^2-3\left(\frac{1}{2}+x\right)^2, & x\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]\\ \left(\frac{3}{2}-x\right)^2, & x\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]\\ 0, & |x|\geqslant 3/2\end{cases}$$

$\varphi_2(x)$称为二次B样条函数，它的曲线形状如图1.2b所示。

当$n=3$时，由式（1.9）可得：

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{6}\Big[(x+2)_+^3-4(x+1)_+^3+6x_+^3-4(x-1)_+^3+(x-2)_+^3\Big]$$

由此可得：

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{6}\begin{cases}(x+2)^3, & x\in[-2,\ -1]\\ (x+2)^3-4(x+1)^3, & x\in[-1,\ 0]\\ (2-x)^3-4(1-x)^3, & x\in[0,\ 1]\\ (2-x)^3, & x\in[1,\ 2]\\ 0, & |x|\geqslant 2\end{cases}$$

$\varphi_3(x)$称为三次B样条函数，它的曲线形状如图1.2c所示。

B样条函数有下列几个主要特性：

（1）分段光滑性，$\varphi_n(x)$是一个分段的n次项式。

（2）对称性，$\varphi_n(-x)=\varphi_n(x)$。

（3）可微性，$\varphi_n(x)\in C_{n-1}(-\infty,\ \infty)$。

（4）紧凑性，$\varphi_n(x)$在区间$\left[-\frac{n+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right]$之外恒等于零。

（5）可以线性组合。

（6）$\varphi_n(x+c)$ 与 $\varphi_n(x)$之间，彼此只差一个平移[2]。

为了今后计算方便起见，$\varphi_2(x)$可以写成下列形式：

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}\begin{cases}0, & x\leqslant -2\\ (x+2)^2, & x\in[-2,-1]\\ (x+2)^2-3(x+1)^2, & x\in[-1,0]\\ (x-1)^2, & x\in[0,1]\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases} \tag{1.10}$$

它的曲线形状如图1.2d所示，与图1.2b只差一个平移。

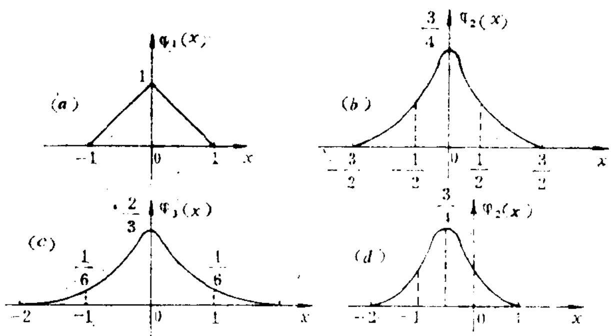

图1.2

如果对于给定的区间$[a,b]$作一个均匀分划：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$$

$$x_i=x_0+ih,\ h=x_{i+1}-x_i=(b-a)/N$$

则 $$\varphi_n\left(\frac{x-x_i}{h}\right)=\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{h}-i\right)$$

也是一个B样条函数，记为$\varphi_{ni}(x)$。这时