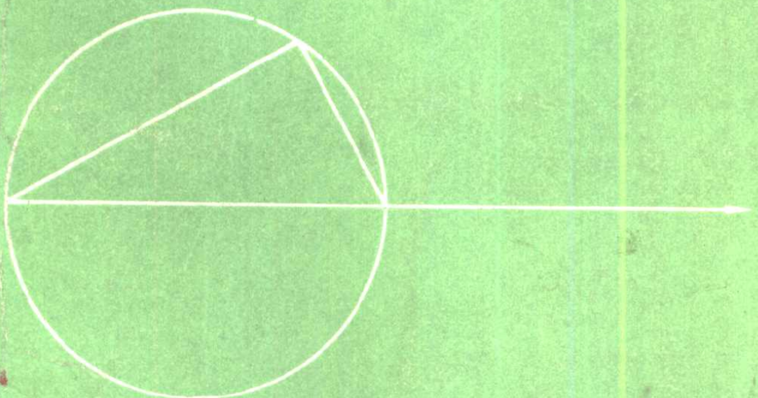
攻读硕士学位研究生

高等数学试题选解

1978—1981

上 册



陕西科学技术出版社

攻读硕士学位研究生

高等数学试题选解

(1978—1981)

上　册

游兆永　蒋传章
张文修　张韻琴　等编

陕西科学技术出版社

攻读硕士学位研究生

高等数学试题选解

（1978—1981）

下　册

游兆永　蒋传章
张文修　张韵琴　等编

陕西科学技术出版社

内 容 提 要

《高等数学试题选解》是攻读硕士学位研究生的入学考试中的题目和解答。它来源于全国一百多所高等院校几年来的部分考题。所选题目有一定代表性和典型性。全书分为高等数学、数学分析、线性代数、计算方法、概率论与数理统计，以高等数学为主。它既适合于报考研究生的同志复习参考，也可供大学生自学和练习。

编 者 的 话

本书习题选自一九七八年至一九八一年全国一百多所高等院校的硕士研究生入学考试的高等数学试题。全书共五部分，主要有：高等数学、数学分析、线性代数、计算方法、概率论和数理统计。约500多题，均作了较为详细解答。由于题目来源广泛，形式多样，既有一定的代表性，又有一定的难度；既包括了基本概念、基本理论和基本方法，又包括了具有各种技巧的综合性题目。可供报考研究生的同志参考，也可作为大学学生及自学高等数学的同志复习和练习之用。

参加本书解题和编写工作的还有西安交通大学数学系1978～1980年度的研究生：程正兴、徐成贤、赵汝怀、凌永祥、吴可法、徐宗本、林熙、朱林户、谢昌芸、陈小君、罗俊明、姜宗乾、徐瑜等同志。

由于我们水平所限，不足和错误之处望批评指正。

编 者 1981年12月

于西安交通大学

目　　录

上　　册

下　　册

Ⅰ、高等数学

一、函数、极限、连续

1. 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$；　　(2) $u=\arccos\frac{x}{x+y}$.

解：(1) 要使 y 有意义，须$\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$，

即$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，就是$-x^2+5x-4\geqslant 0$，解之，得$1\leqslant x\leqslant 4$，于是得到函数 y 的定义域。

(2) u有意义时，$\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$，

即
$$x^2\leqslant (x+y)^2,$$
$$0\leqslant y(y+2x),$$
故当 $y\geqslant 0$ 时，$y\geqslant -2x$；$y\leqslant 0$ 时，$y\leqslant -2x$，为所求的定义域。

2. 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=$？

解：$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=2-2\sin^2\frac{x}{2}$

故　$f(x)=2-2x^2$.　　$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x$

3. 若 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，并且已知当 $y=1$ 时有

$z=x$，试求函数$f(x)$的分析表达式以及 z 的分析表达式。

解：将条件 $y=1$ 时 $z=x$ 代入 z 的表达式

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1),$$

得 $$x-1=f(\sqrt[3]{x}-1) \quad (1)$$

设 $\sqrt[3]{x}-1=t$，则 $x=(1+t)^3$代入(1)得

$$f(t)=(1+t)^3-1=t^3+3t^2+3t,$$

从而得 $f(x)$的分析表达式为

$$f(x)=x^3+3x^2+3x,$$

由(1)得 z 的分析表达式为

$$z=\sqrt{y}+x-1\ 。$$

4． 证明：定义在对称区间$(-l,l)$内的任何函数$f(x)$必可以表示成偶函数$H(x)$与奇函数$G(x)$之和的形式，且这种表示法是唯一的。

证：令 $H(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，

$$G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

则$H(x)$与$G(x)$分别为定义在$(-l,l)$内的偶函数与奇函数，且$f(x)=H(x)+G(x)$。

如果还存在偶函数$H_1(x)$与奇函数$G_1(x)$，使

$$f(x)=H_1(x)+G_1(x),$$

则有：$$H(x)+G(x)=H_1(x)+G_1(x),$$

从而：$$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x). \quad (1)$$

以$-x$代入(1)式得：$H(-x)-H_1(-x)=G_1(-x)-G(-x)$

即 $$H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x). \quad (2)$$

(1)+(2)得 $2H(x)-2H_1(x)=0$，即$H(x)=H_1(x)$，于是，由(1)得$G(x)=G_1(x)$，唯一性得证。

5. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在$[x_1, x_n]$内必有ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$$

证明： 设n个数$a_1, a_2,\cdots,a_n$中最大值为A，最小值为a，则有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\frac{A+A+\cdots+A}{n}=A,$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{a+a+\cdots+a}{n}=a.$$

即有 $$a\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant A. \tag{1}$$

设$f(x_1)$，$f(x_2),\cdots f(x_n)$中最大值为M，最小值为m，且设$f(x_i)=m$，$f(x_j)=M$，由不等式(1)有

$$f(x_i)=m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M$$
$$=f(x_j),$$

由介值定理，在x_i与x_j之间(从而在$[x_1,x_n]$)存在一点ξ，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

6. 设 $2\geqslant u_1>0$; $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$，$n=1,2,\cdots$.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$存在否？

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=?$

解：（1）用归纳法易证 $2\geqslant u_n>0$；

再由 $u_n^2-u_{n+1}^2=u_n^2-u_n-2=(u_n-2)(u_n+1)\leqslant0$，可知 $u_n\leqslant u_{n+1}$，根据单调数列极限存在准则，知 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 存在。

(2) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=A$，则

$$A=\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2+u_n}=\sqrt{2+A}$$

∴ $A^2=2+A$

∴ $A=2$或-1，但$A=-1$不可能，故$A=2$

7. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a 和b。

解： 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b+1}{x+1}=0$$

必须$\begin{cases}1-a=0\\a+b=0\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=-1$

8. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{2x^3}$

解：(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(n^2+n)}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{6x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{12x}=\frac{1}{12}.$$

9. 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x-5}{x^3}}{\sin\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3-3x^2(3x-5)}{x^6}}{\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)\left(-2\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6+15\frac{1}{x}}{-2\cos\frac{1}{x^2}}=3.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x/100}}$

解： $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{x/100}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\frac{1}{100}e^{x/100}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{\left(\frac{1}{100}\right)^2e^{x/100}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6(100)^3}{e^{x/100}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{e^{x/100}}=-\infty$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x/100}}$不存在。

10. 计算极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{a+b+b^2+\cdots+b^n}\qquad |a|<1,|b|<1。$$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+\cdots+a^n}{a+b+\cdots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{a+\frac{b(1-b^n)}{1-b}}$$

$$=\frac{\frac{1}{1-a}}{a+\frac{b}{1-b}}$$

$$= \frac{1-b}{(1-a)(a-ab+b)}.$$

11. 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\ \frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

(2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 5}\frac{1-(x-4)}{(x-5)(1+\sqrt{x-4})}$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-1}{1+\sqrt{x-4}}=-\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

12. 研究 $f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$ 当 $x\to 0$ 时的极限。

解： $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{1/x}}=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{1/x}} = 1$$

故当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在。

13. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$.

解： 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\cos x - 1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x\cos x}{-\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - x\sin x}{-\cos x} = -2$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x^4+\cdots+x^{2n}-n}{x-1}$.

解： 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)+(x^4-1)+\cdots+(x^{2n}-1)}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1}[(x+1)+(x^3+x^2+x+1)+\cdots+$$

$$+(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+x+1)]$$

$$= 2+4+\cdots+2n = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

14. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^k x}{x^\alpha}$ $(\alpha>0$, k 为正整数$)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^2x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2x-\sin^2x}{x^2\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=2$；

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2x+2x\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^2x-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^kx}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{k\ln^{k-1}x}{\alpha x^\alpha}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)\ln^{k-2}x}{\alpha^2x^\alpha}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{k!}{\alpha^kx^\alpha}=0.$$

(3) 令 $y=(\sin x)^x$，　则 $\ln y=x\ln\sin x$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}x\ln\sin x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$ 故 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x=1$

15. 已知：$x_1=1, x_2=1+\frac{x_1}{1+x_1}, \cdots x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$。

求：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解：显然 $x_n>0$　$(n=1,2,3,\cdots)$

$$x_2-x_1=\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{1}{2}>0 \quad 故\ x_2>x_1$$

设　$x_k>x_{k-1}$ 则：

$$x_{k+1}-x_k=\left(1+\frac{x_k}{1+x_k}\right)-\left(1+\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\right)$$

$$=\frac{x_k}{1+x_k}-\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}$$

$$=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}>0$$

所以 $x_{k+1}>x_k$ 故 $\{x_n\}$ 单调增加，又

$$x_n=2-\frac{1}{1+x_{n-1}}<2$$

故 $\{x_n\}$ 有上界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $a>0$ 对

$x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限得：

$$a=1+\frac{a}{1+a}$$

$$a^2-a-1=0$$

所以：$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（因 a 非负，故根号前取正号）

即：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_1^x\sqrt{t+\frac{1}{t}}\,dt}{x\sqrt{x}}=?$

解：在$[1,\infty)$上恒有$\sqrt{t+\frac{1}{t}}>\sqrt{t}$

且有$\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x\sqrt{t}\,dt=\infty$，所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x\sqrt{t+\frac{1}{t}}\,dt=\infty$

显然，当$x\to\infty$时，$\dfrac{\int_1^x\sqrt{t+\frac{1}{t}}\,dt}{x\sqrt{x}}$属于$\dfrac{\infty}{\infty}$型，故可用罗彼塔法则

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

17. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \mathrm{arctg}\,t\,dt}{x^2}$

解：$原式=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{t\cdot\mathrm{arctg}\,t\Big|_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{dt^2}{1+t^2}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x^2}$$