高等学校教学参考书

概率论讲义

(第二版)

沈恒范 编

人民教育出版社

概率论讲义 (第二版) 沈恒范 编 人民教育出版社

高等学校教学参考书

概率论讲义

（第二版）

沈恒范 编

人民教育出版社

本书第二版是作者参照高等学校工科数学教材编审委员会于1980年审订的《工程数学教学大纲》有关概率论部分进行了修改和补充，同时考虑到某些专业对数理统计基本内容的需要，遂把原来的最后一章作了适当充实，改编成现在的后四章，即参数估计、假设检验、方差分析、回归分析；前五章的内容是随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量、大数定律与中心极限定理。

担任本书第二版审稿的系林少宫教授。

本书行文流畅、叙述详细、内容适当、例题较多、书末还附有习题答案，便于教学，可作为高等工业院校教材、函授教材或教学参考书，也可作为工程技术人员自学之用。

责任编辑 丁鹤龄

高等学校教学参考书

概率论讲义

（第二版）

沈恒范 编

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 8.375 字数 201,000

1966年4月第1版

1982年12月第2版 1983年5月第1次印刷

印数 000,001—60,500

书号 13012·0805 定价 0.90 元

第二版序言

本书第一版自1966年出版以来，曾被很多高等学校选用为教材或教学参考书．这次修订主要是根据各校在教学过程中提出的意见，并参照高等学校工科数学教材编审委员会1980年审订的《工程数学教学大纲(草案)》有关概率论部分进行了修改和补充．

考虑到某些专业设置《概率论与数理统计》课程的需要，适当增加了数理统计的基本内容，把第一版的最后一章补充改写成现在的第六、七、八、九各章．对其余章节也作了必要的修订，同时对第一版中某些习题答案和印刷错误进行了校正．

本书编写和修订过程中，得到吉林工业大学数学教研室全体同志的支持和帮助，罗舜英同志参加了修订工作，黄耀宏、刘承胤、赵忠柏等同志对修订稿提出了不少有益的意见，编者谨致以诚挚的谢意．

限于编者的水平，本书一定还存在不少缺点和错误，希望读者批评指正．

沈恒范

1982年4月

目　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件·频率与概率

概率论是研究随机现象(偶然现象)的规律性的科学.

人们在自己的实践活动中,常常会遇到随机现象. 例如,远距离射击较小的目标,可能击中,也可能击不中,每一次射击的结果是随机(偶然)的. 自动车床加工出来的机械零件,可能是合格品,也可能是废品. 进行任何实验,把得到的实验数据在坐标图纸上用点表示出来,我们可以看到,这些点(假设它们足够多)通常不是位于一条曲线上,而是散布在某一带形区域内,这就是所谓实验点的随机散布.

在事物的联系和发展过程中,随机现象是客观存在的. 但是,在表面上是偶然性在起作用的地方,这种偶然性又始终是受事物内部隐藏着的必然性所支配的.

形而上学对于事物的联系有两种极端相反的看法,他们把一切事物的发展,或者都看做是必然的,而否认任何偶然性的作用;或者都看做是偶然的,而否认有必然的规律存在. 辩证唯物论肯定了事物的发展过程中必然性和偶然性的对立的统一,即一切事物的联系和发展既包含着必然性的方面,也包含着偶然性的方面,它们是互相对立而又互相联系的.

但是,现实世界上事物的联系是非常复杂的,因而在事物的发展过程中时刻都有偶然因素存在,必然性经常通过无数的偶然性表现出来.

科学的任务就在于,要从看起来是错综复杂的偶然性中揭露出潜在的必然性,即事物的客观规律性. 这种客观规律性是在大

量现象中发现的.

在科学研究或工程技术中，我们经常遇到，在不变的条件下重复地进行多次实验或观测. 抽去这些实验或观测的具体性质，就得到概率论中试验的概念. 所谓试验就是一定的综合条件的实现，我们假定这种综合条件可以任意多次地重复实现. 大量现象就是很多次试验的结果.

当一定的综合条件实现时，也就是在试验的结果中，所发生的现象叫做事件. 如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，则这一事件叫做必然事件；相反地，如果某事件一定不发生，则叫做不可能事件.

在试验的结果中，可能发生，也可能不发生的事件，叫做随机事件(偶然事件). 例如，任意抛掷钱币时，徽花向上是随机事件；远距离射击时，击中目标是随机事件；自动车床加工机械零件时，加工出来的零件为合格品是随机事件；等等.

通常我们用字母 A, B, C, … 表示随机事件，而用字母 U 表示必然事件，V 表示不可能事件.

例 已知一批产品共 100 个，其中有 95 个合格品和 5 个次品. 检查产品质量时，从这批产品中任意抽取 10 个来检查，则在抽出的 10 个产品中，“次品数不多于 5 个”这一事件是必然事件 U；“次品数多于 5 个”这一事件是不可能事件 V；而事件 A:“没有次品”，B:“恰有一个次品”，C:“有 2 个或 3 个次品”，D:“次品数少于 4 个”等等都是随机事件.

用数字表示大量现象中的规律性时，联系到下面的概念.

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 叫做随机事件 A 的相对频率(简称频率)，记作 $W(A)$；用公式表示如下：

$$W(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

显然，任何随机事件的频率是介于0与1之间的一个数：

$$0 \leqslant W(A) \leqslant 1. \tag{1.2}$$

对于必然事件，在任何试验序列中，我们有 $m=n$，所以必然事件的频率恒等于1：

$$W(U)=1. \tag{1.3}$$

对于不可能事件，我们有 $m=0$，所以不可能事件的频率恒等于0：

$$W(V)=0. \tag{1.4}$$

经验证明，当试验重复多次时，随机事件 A 的频率具有一定的稳定性；就是说，在不同的试验序列中，当试验次数充分大时，随机事件 A 的频率常在一个确定的数字附近摆动.

例如，我们来看下面的实验结果，表中 n 表示抛掷钱币的次数，m 表示徽花向上的次数，$W=\frac{m}{n}$ 表示徽花向上的频率.

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	W	m	W	m	W
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从上表我们可以看出，当抛掷钱币的次数较少时，徽花向上的频率是不稳定的；但是，随着抛掷钱币次数的增多，频率越来越明显地呈现出稳定性. 如上表最后一列所示，我们可以说，当抛掷钱币的次数充分多时，徽花向上的频率大致是在0.5这个数的附近

摆动.

由随机事件的频率的稳定性可以看出，随机事件发生的可能性可以用一个数来表示. **这个刻划随机事件 A 在试验中发生的可能性程度的、小于一的正数叫做随机事件 A 的概率**，记作 $P(A)$. 当试验次数充分大时，随机事件 A 的频率 $W(A)$ 正是在它的概率 $P(A)$ 的附近摆动. 在上面的例子中，我们可以认为徽花向上的概率等于 0.5.

因为必然事件的频率恒等于 1，所以我们说，**必然事件的概率等于一**：

$$P(U)=1. \tag{1.5}$$

又因为不可能事件的频率恒等于 0，所以**不可能事件的概率等于零**：

$$P(V)=0. \tag{1.6}$$

这样，任何事件 A 的概率满足不等式

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \tag{1.7}$$

应该指出，随机事件的频率是与我们已进行的试验有关的，而随机事件的概率却是完全客观地存在着的. 在实际进行的试验中，随机事件的频率可以看作是它的概率的随机表现. 随机事件的概率表明，试验中综合条件与随机事件之间有完全确定的特殊的联系，它从数量上说明了必然性与偶然性的辩证的统一.

还应指出，随机事件的概率反映了大量现象中的某种客观属性，这种客观属性是与我们认识主体无关的. 不应该把概率看作认识主体对于个别现象的信念程度. 有时一个人说某事件“可能发生”或“很少可能发生”，这仅表示说话的人对该事件发生的可能性的一个判断而已. 因为个别现象不是发生，就是不发生，所以就个别现象来谈概率是没有任何现实意义的.

直接估计某一事件的概率是非常困难的，甚至是不可能的，仅

在比较特殊的情况下才可以直接计算随机事件的概率. 通常我们把在多次重复试验中随机事件 A 的频率 $W(A)$ 当作概率 $P(A)$ 的近似值. 一般说来, 概率 $P(A)$ 这个单凭经验的估值, 当试验次数越多时就越准确. 相反地, 如果已知事件 A 的概率, 我们就能够以一定程度的可靠性来预测事件 A 在将要进行的试验中发生的频率, 这种预测至少当试验次数很大时是可能的.

§1.2 事件的关系及运算

为了研究随机事件及其概率, 我们首先说明事件之间的各种关系:

(1) 如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生, 则称事件 B 包含事件 A, 或称事件 A 包含于事件 B, 记作

$$B \supset A \quad 或 \quad A \subset B.$$

例如, 在图 1 中, 设事件 A 表示点随机地落在小圆内, 事件 B 表示点随机地落在大圆内, 则我们有 $A \subset B$.

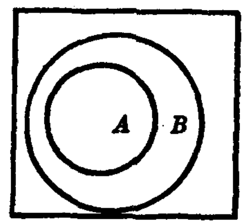

图 1

(2) 如果事件 B 包含事件 A, 且事件 A 包含事件 B, 即二事件 A 与 B 中任一事件的发生必然导致另一事件的发生, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记作

$$A = B.$$

(3) "二事件 A 与 B 中至少有一事件发生"这一事件叫做事件 A 与事件 B 的和, 记作

$$A \cup B.$$

例如, 在图 2 中, 设试验是让点随机地落在矩形区域内, 事件 A 表示点落在左边的圆内(图 2(a)), 事件 B 表示点落在右边的圆内(图 2(b)), 则事件 $A \cup B$ 表示点落在任一圆内(图 2(c)).

"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一事件发生"这一事件叫

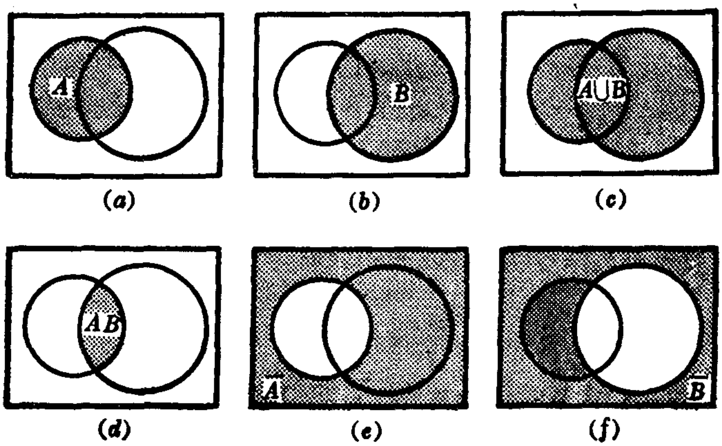

图 2

做事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{（简记为} \bigcup_{i=1}^{n} A_i\text{）}.$$

(4) "二事件 A 与 B 都发生"这一事件叫做事件 A 与事件 B 的积，记作

$$A \cap B \quad \text{或} \quad AB.$$

例如，在图 2 中，事件 $A \cap B$ 就表示随机点落在二圆的公共部分内（图 2(*d*)）.

"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都发生"这一事件叫做事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记作

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \quad \text{或} \quad A_1 A_2 \cdots A_n \text{（简记为} \bigcap_{i=1}^{n} A_i\text{）}.$$

(5) 如果二事件 A 与 B 不可能同时发生，即

$$AB = V,$$

则称二事件 A 与 B 是互不相容的（或互斥的）.

通常把二互不相容事件 A 与 B 的和记作

$$A + B.$$

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意二事件不可能同时发生，即

$$A_iA_j=V\ (1\leqslant i<j\leqslant n),$$

则称这 n 个事件是互不相容的(或互斥的).

通常把 n 个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n\ (\text{简记为}\sum_{i=1}^{n}A_i).$$

(6) 如果二事件 A 与 B 是互不相容的，并且它们中必有一事件发生，即二事件 A 与 B 中有且仅有一事件发生，即

$$A\cup B=U,\quad AB=V,$$

则称事件 A 与 B 是对立的(或互逆的)，称 B 是 A 的对立事件(或逆事件)，同样 A 也是 B 的对立事件(或逆事件)，记作

$$B=\bar{A}\ \text{或}\ A=\bar{B}.$$

例如，在图 2 中，事件 $\bar{A}$ 表示随机点落在左圆之外(图 2(e))，事件 $\bar{B}$ 表示随机点落在右圆之外(图 2(f)).

(7) 如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生，即

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=U,$$

则称这 n 个事件构成完备群.

以后对我们特别重要的是互不相容的完备事件群. 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足下面的关系式:

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=U,\ A_iA_j=V\quad(1\leqslant i<j\leqslant n),$$

则称这 n 个事件构成互不相容的完备群.

例 任意抛掷一颗骰子，设事件 A_i 表示出现 i 点($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)，则六个事件 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 构成互不相容的完备群，即

$$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6=U.$$

设事件 B 表示出现偶数点，事件 C 表示出现的点数能被 3 整除，则我们有

$$A_2 \subset B,\ A_4 \subset B,\ A_6 \subset B;$$

$$A_3 \subset C,\ A_6 \subset C;$$

$$B = A_2 + A_4 + A_6;$$

$$C = A_3 + A_6;$$

$$B \cup C = A_2 + A_3 + A_4 + A_6;$$

$$BC = A_6;$$

$$\overline{B} = A_1 + A_3 + A_5;$$

$$\overline{C} = A_1 + A_2 + A_4 + A_5;$$

等等.

由上述事件之间的关系不难证明下面的一些性质:

1. 对于任意的事件 A，我们有

$$\overline{\overline{A}} = A, \tag{1.8}$$

$$A + \overline{A} = U, \tag{1.9}$$

$$A\overline{A} = V. \tag{1.10}$$

由对立事件的定义可知，这些等式显然成立.

2. 对于任意的二事件 A 与 B，我们有

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}. \tag{1.11}$$

事实上，事件 $A \cup B$ 表示二事件 A 与 B 中至少有一事件发生，它的对立事件显然就是 A 与 B 都不发生，即 $\overline{A}\,\overline{B}$. 所以等式(1.11)成立.

这一性质可以推广到更多个事件的情形. 对于任意的 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，我们有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i. \tag{1.12}$$

等式(1.11)及(1.12)表明: 若干个事件的和的对立事件就是

各个事件的对立事件的积.

3. 对于任意的二事件 A 与 B, 我们有

$$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}. \tag{1.13}$$

事实上, 事件 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 表示二事件 A 与 B 中至少有一事件不发生, 它的对立事件就是 A 与 B 都发生, 即 AB. 所以等式(1.13)成立.

这一性质也可以推广到更多个事件的情形. 对于任意的 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, 我们有

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i. \tag{1.14}$$

等式(1.13)及(1.14)表明: **若干个事件的积的对立事件就是各个事件的对立事件的和.**

4. 对于任意的三事件 A, B, C, 我们有

$$(A\cup B)C=AC\cup BC. \tag{1.15}$$

事实上, $(A\cup B)C$ 表示二事件 A 与 B 中至少有一事件与事件 C 同时发生, 即事件 A 与 C 同时发生, 或事件 B 与 C 同时发生, 或事件 A、B、C 同时发生; 而 $AC\cup BC$ 也表示事件 A 与 C 同时发生, 或事件 B 与 C 同时发生, 或事件 A、B、C 同时发生, 所以等式(1.15)成立.

这一性质不难推广到更多个事件的情形. 对于任意的事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 及 B, 我们有

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)B=\bigcup_{i=1}^{n}(A_iB). \tag{1.16}$$

§1.3 概率的古典定义

前面我们提到, 仅在比较特殊的情况下才可以直接计算随机事件的概率, 这种计算是以下述概率的古典定义为基础的.

在叙述概率的古典定义以前, 我们先引进一些辅助概念.

10 $C_3^2 = 3/10$ C_3^1 C_2^1

如果试验时，由于某种对称性条件，使得若干个随机事件中每一事件发生的可能性在客观上是完全相同的，则称这些事件是等可能的.

例如，任意抛掷一枚钱币，“徽花向上”与“字向上”这两个事件发生的可能性在客观上是相同的，也就是等可能的；又如，抽样检查产品质量时，一批产品中每一个产品被抽到的可能性在客观上是相同的，因而抽到任一产品是等可能的.

如果试验的所有可能的结果可以表为由若干个互不相容且等可能的事件构成的完备群，则这些事件叫做试验的基本事件.

例如，任意抛掷一枚钱币时，“徽花向上”与“字向上”就是两个基本事件；又如，从 0, 1, 2, …, 9 十个数字中任意抽取一个数字，设事件 A_i 表示抽到数字 $i(i=0, 1, 2, \cdots, 9)$，则 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_9$ 就是十个基本事件.

现在我们叙述概率的古典定义：

设试验的所有可能的结果可以表为由 N 个互不相容且等可能的事件构成的完备群，其中有且仅有 M 个事件是包含于随机事件 A 的(即当且仅当这 M 个事件中任一事件发生时，事件 A 发生)，**则随机事件 A 所包含的基本事件数 M 与基本事件的总数 N 的比值叫做随机事件 A 的概率**，记作 $P(A)$：

$$P(A)=\frac{M}{N}. \tag{1.17}$$

例 1 从 0, 1, 2, …, 9 十个数字中任取一个数字，求取得奇数数字的概率.

解 基本事件的总数 $N=10$. 设事件 A 表示取得奇数数字，则它所包含的基本事件数 $M=5$. 因此，所求的概率

$$P(A)=\frac{5}{10}=0.5.$$