

● 非线性科学丛书 ●

分岔与奇异性

陆启韶 编著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

52.3
383
12

非线性科学丛书

分岔与奇异性

陆启韶 编著

朱照宣 李邦河 审阅

上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”的一种, 阐述非线性系统分岔的基本概念、主要方法和一些重要应用, 并讨论奇异性理论在静态分岔中的应用; 附录中还简要介绍了微分动力系统, 作为研究分岔的数学基础。全书深入浅出, 注意系统性, 并有大量图例, 以利读者迅速进入分岔理论及应用课题的研究。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读, 也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由朱照宣、李邦河审阅。

非线性科学丛书

分岔与奇异性

陆启韶 编著

朱照宣 李邦河 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路393号)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 6 字数 151,000

1995年9月第1版 1995年9月第1次印刷

印数 1—3200本

ISBN 7-5428-1091-X/O·58 定价: (精装本) 10.50元

Advanced Series In Nonlinear Science
Bifurcation and Singularity

Lu QI-shao

Department of Applied Mathematics and Physics
Beijing University of Aeronautics and Astronautics
Beijing 100083, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 1995

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：(按姓氏笔画为序)

丁 鄂 江	文 志 英	朱 照 宣
刘 式 达	刘 寄 星	孙 义 燧
杨 清 建	李 邦 河	张 洪 钧
张 景 中	陈 式 刚	周 作 领
赵 凯 华	胡 岗	顾 雁
倪 皖 荪	徐 京 华	郭 柏 灵
陶 瑞 宝	谢 惠 民	蒲 富 恪
霍 裕 平	魏 荣 爵	

43791

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中，非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧。诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

分岔是非线性科学的一个重要分支。它的近代发展有着深刻的数学和应用背景,并且与非线性科学的其他分支密切相关。现在,分岔研究已不只局限在数理科学的范围内,而且在其他自然科学、社会科学和工程技术领域中发挥着日益显著的作用。本书以深入浅出的形式,并通过大量图例,较系统地介绍分岔的基本概念、主要方法和一些重要应用,以使读者通过本书能初步窥视分岔的全貌,在较短的时间里了解和掌握分岔的基本内容,为以后深入研究分岔理论打下良好的基础。

本书的第1章通过在数学和应用方面的许多例子,初步阐述了分岔的基本概念,并为下面各章做好必要的准备。第2章介绍了研究分岔的一些主要方法。第3章较详细地讨论了奇异性 and 对称性理论及其在静态分岔问题中的应用。第4章着重研究动态分岔问题,特别是霍普夫分岔、普适开折和模态相互作用等。阅读本书时,读者应具备理工科大学本科的数理知识。至于研究分岔中需用到的一些现代数学知识,本书在适当的章节中将简要作些介绍。附录中专门介绍微分动力系统的基本概念,供对这些内容不够熟悉的读者参考。

在本书的编写过程中,作者通过有关的论著、讨论和交流,受到国内外许多非线性科学家的教益。郝柏林教授、郑伟谋教授关心和支持本书的出版;朱照宣教授、李邦河教授认真审阅原稿并提出宝贵意见,在此谨向他们表示深切的谢意。对于书中疏漏不足之处,恳望广大读者给予批评指正。

陆 启 韶

1994年5月于北京航空航天大学

Abstract

Basic concepts and main theoretical methods of bifurcation in nonlinear systems are systematically introduced along with the applications in science and technology. The fundamental knowledge of differential dynamical systems is attached as an appendix. This book is intended for students, researchers and engineers who are interested in and devoted to nonlinear science.

目 录

非线性科学丛书出版说明

前言

第 1 章 分岔概述	1
§ 1 引言	1
§ 2 分岔的基本概念	3
§ 3 分岔的一些应用	17
§ 4 突变、自组织与分岔	33
第 2 章 分岔理论的基本方法	37
§ 5 引言	37
§ 6 LS 约化方法	40
§ 7 中心流形方法	47
§ 8 PB 范式方法	52
第 3 章 奇异性理论和静态分岔	65
§ 9 奇异性理论方法	65
§ 10 单变量静态分岔	80
§ 11 有对称性的静态分岔	93
第 4 章 动态分岔和模态相互作用	109
§ 12 霍普夫分岔	109
§ 13 其他动态分岔	123
§ 14 动态分岔的普适开折	129
§ 15 模态相互作用	139
附录 微分动力系统基础	145
索引	165
科学家中外译名对照表	169
参考文献	171

Contents

Preface

CHAPTER 1 Summaries of Bifurcation..... 1

§ 1 Introduction 1

§ 2 Basic Concepts of Bifurcation..... 3

§ 3 Some Applications of Bifurcation..... 17

§ 4 Catastrophe, Self-Organization and Bifurcation... 33

CHAPTER 2 Basic Methods in Bifurcation

Theory 37

§ 5 Introduction 37

§ 6 The Method of Liapunov-Schmidt Reduction..... 40

§ 7 The Method of Center Manifold..... 47

§ 8 The Method of Poincare-Birkhoff Normal Form... 52

CHAPTER 3 Singularity Theory and Static

Bifurcations 65

§ 9 The Method of Singularity Theory..... 65

§ 10 Static Bifurcations with single variable..... 80

§ 11 Static Bifurcations with symmetry..... 93

CHAPTER 4 Dynamic Bifurcations and Mode

Interactions.....109

§ 12 Hopf Bifurcation.....109

§ 13 Other Dynamic Bifurcations.....123

§ 14 Universal Unfoldings of Dynamic Bifurcations...129

§ 15 Mode Interactions.....139

APPENDIX Elements of Differential Dynamical

Systems.....145

Subject Index	165
Author Index	169
Bibliography	171

第 1 章

分岔概述

§1 引言

对于含参数的系统,当参数变动并经过某些临界值时,系统的定性性态(例如平衡状态或周期运动的数目和稳定性等)会发生突然变化.这种变化称为分岔(bifurcation).分岔是一类常见的重要非线性现象,并与其他非线性现象(如混沌、突变、分形、拟序结构等)密切相关.因此,在非线科学中分岔研究占有重要地位.

分岔问题起源于研究一些力学失稳现象.早在18世纪中叶,伯努利(Daniel Bernoulli)和欧拉(L. Euler)等人就已研究过杆件在纵向压力作用下的屈曲问题.1834年,雅可比(C. G. J. Jacobi)在研究自引力介质的椭球形旋转液体星的平衡图形时,首先引进“abzweigung”(德文“分岔”)这个术语.1885年,庞卡莱(H. J. Poincaré)提出旋转液体星平衡图形的演化过程的分岔理论.1883年,雷诺(O. Reynolds)发现在临界雷诺数时层流转变为湍流的现象,从此开创了流动稳定性的研究.固体力学的屈曲和流体力学的转换一直是推动分岔研究的重要动力.本世纪30年代,范德波(B. Van der Pol),安德罗诺夫(A. A. Андронов)等人在非线性振动研究中即已发现大量分岔现象.然而,在相当长时间里,研究分岔主要是在应用领域中进行的.直到本世纪60年代,微分动力系统、突变、奇异性、非线性分析等方面逐渐形成了现代数学理论,电子计算机和有效计算手段相继出现,尤其是不同领域中混沌现象的发现,促使分岔理论迅速发展,并且在力学、物理学、化学、生物学、生态学、医学、控制、工程技术以至社会科学中得到

了广泛应用。

在介绍分岔的基本概念之前,我们先看两个简单的例子。

【例1】考虑方程 $\mu x - x^3 = 0$ 的解随参数 μ 变化的情况, 其中 $x, \mu \in \mathbb{R}$ 。

当 $\mu \leq 0$ 时, 此方程有唯一解 $x=0$; 当 $\mu > 0$ 时, 此方程有三个解: $x=0$ 和 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 。图 1-1 表明了方程的解随参数 μ 变化的情况。解的数目在 $\mu=0$ 处发生突然变化, 因此方程出现分岔 (通常称为“叉形分岔”)。

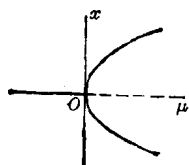


图 1-1

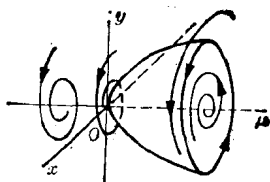


图 1-2

【例2】考虑微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)], \\ \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

的解随参数 $\mu \in \mathbb{R}$ 变化的情况。

在极坐标系中, 此方程组可写成

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

利用初等积分法, 不难得到

$$r = \begin{cases} \sqrt{\mu(1 + Oe^{-2\mu t})^{-1}}, & \text{当 } \mu \neq 0 \text{ 时;} \\ \sqrt{(2t + O)^{-1}}, & \text{当 } \mu = 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\theta = t - t_0.$$

其中 O 和 t_0 由初始条件决定。图 1-2 表示当参数 μ 取不同数值时此方程组在 x - y 相平面上轨线分布情况 (即相图)。可以看到, $(0, 0)$ 始终是唯一的平衡点。对 $\mu \leq 0$, 相平面上的轨线当 $t \rightarrow +\infty$ 时都盘旋地趋于原点, 即 $(0, 0)$ 是渐近稳定的焦点; 当 $\mu > 0$

时, 轨线当 $t \rightarrow +\infty$ 时盘旋地趋于闭轨 $r = \sqrt{\mu}$, 即 $(0, 0)$ 变成不稳定的焦点, 与此同时出现一个稳定的极限环 (即渐近稳定的孤立闭轨) $r = \sqrt{\mu}$. 显然, 方程组 (1.1) 的解的定性行为 (即相图的拓扑结构) 在 $\mu = 0$ 处发生突然变化, 因此出现分岔 (通常称为“霍普夫分岔”).

从上面的例子可以初步看到, 在各种静态和动态问题中, 存在不同形式的分岔现象. 本章将简要介绍分岔的一些基本概念、常见类型和重要应用例子, 为以后各章的深入研究打下基础.

§ 2 分岔的基本概念

为了便于理解, 本节主要介绍有限维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的含参数动力系统分岔的一些基本概念. 这里包括由 O^r (其中 $r \geq 1$) 向量场 $f: U \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ 给出的连续动力系统

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \mu \in J \subseteq \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

其中 U, J 是开集, x 是状态变量, μ 是分岔参数 (亦称“控制变量”), 以及由 O^r (其中 $r \geq 1$) 同胚

$$g: U \times J \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto g(x, \mu) \\ x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \mu \in J \subseteq \mathbb{R}^m \quad (2.2)$$

给出的离散动力系统 $\{g^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. 这里介绍的分岔概念, 可推广到有限维或无限维微分流形上的动力系统. 更详细的数学表述, 请参看本书附录的第 161 页.

当参数 μ 连续地变动且通过 $\mu_0 \in J$ 时, 如果系统 (2.1) 或 (2.2) 失去结构稳定性, 即系统的定性性态 (即拓扑结构) 发生突然变化, 则称该系统在 μ_0 处出现分岔. μ_0 称为分岔值. 全体分岔值组成的集合称为该系统在参数空间中的分岔集. 为了清楚地描述由分岔所引起系统的定性性态变化的情况, 我们可在 (x, μ) 空间中画出该系统的极限集 (如平衡点 (不动点)、闭轨 (周期轨线)、不变环面等) 随参数 μ 变化的图形. 这种图形称为分岔图. 它反

映了动力系统的定性性态随参数变化的情况。

一般说,完整的分岔分析需要了解动力系统的全局拓扑结构,这是十分复杂,甚至是难以做到的。实际应用中,有时只需考虑在某个平衡点(不动点)附近动力系统拓扑结构的变化,即只研究在它们的邻域内局部向量场(或微分同胚)的分岔。这类分岔问题称为局部分岔。如果分岔分析涉及向量场的大范围拓扑结构,则称为全局分岔。当然,向量场的“局部”和“非局部”性质是密切相关的,局部分岔本身也是全局分岔分析的重要内容。

下面以单参数动力系统为例,介绍一些典型的分岔问题。我们分向量场和映射两种情形进行讨论,并设参数 μ 是标量,即

$$\mu \in \mathbb{R}.$$

§ 2.1 向量场的分岔

1. 平衡点分岔

设当 $\mu = \mu_0$ 时系统(2.1)有非双曲平衡点 x_0 ,即 $f(x_0, \mu_0) = 0$,且对 x 的导算子 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 有实部为0的特征值,则向量场 $f(x, \mu)$ 当 $\mu = \mu_0$ 时是结构不稳定的, μ_0 是一个分岔值。这时,对向量场 $f(x, \mu_0)$ 作适当的小扰动,可以使点 x_0 附近的轨线拓扑结构发生变化,例如平衡点的产生(或消失)、时变状态(如周期轨线、同宿或异宿轨线等)的出现。这种分岔称为平衡点分岔,它属于局部分岔的范畴。

首先考虑非双曲平衡点的一种最简单情形。此时, $D_x f(x_0, \mu_0)$ 只有一个零特征值,而其他特征值有非零实部。

[例1] 考虑平面系统

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \dot{y} = -y. \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

当 $\mu = 0$ 时,此系统有非双曲平衡点 $O(0, 0)$ 。因为其向量场 $f(x, y, \mu)$ 在该处的导算子 $Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 有零特征值。此系统对 $\mu < 0$ 无平衡点;对 $\mu = 0$ 有一个在 origin 处的平衡点(鞍结