数学分析习题集题解

曹 敏 谦

上海交通大学应用数学系

本解答系根据李荣涑译Б.Л.吉米多维奇著“数学分析习题集”(修订本)而作。由于篇幅较多，拟分册陆续出版。第一章分两册，第1册包括§1—§4；第2册包括§5—§10。

前　言

吉米多维奇所著“数学分析习题集”（修订本）是一本较完整的数学分析习题集。它不仅包含了数学分析的基本概念、基本理论和基本运算技巧方面的大量问题，也包含着部分富有启发性的典型问题，同时对问题的顺序也大多经过仔细推敲。故自该书问世以来，深受数学教学工作者的重视，即便是二十多年后的今天，它仍不失为理工科高等院校师生极为有益的参考书。

多年来，由于教学上的需要，我怀着学习的目的，陆续试解了习题集中的全部问题。在解题的过程中，也发现了习题集（包括原本和译本）里的问题和答案中的一些错误（译本所占错误的比重较大），这些错误虽则大多是印刷所引起的，但正是由于这些错误，常使人们在解题时感到困惑，在本题解中，都尽可能给予订正。

近一年来，在校系领导的关心和校内外同志的鼓励下，决定将题解整理出版，供数学教学工作者参考。

本题解，特别是计算题的解法，本来只需给出简要步骤，省略大部分运算过程，但考虑到便于阅读以及仓促节删上的困难等两方面原因，故仍采用详解的形式。由于本人水平所限，证明中的错误或是解法不够精炼等问题必然不少，恳切希望同志们给予批评指教，俾能订正提高。

范伟民同志协助解答了部分难题，并对某些问题的证明或解法提供了许多宝贵意见。范伟民，孙薇荣，谢如彪，裘义端，吴登益等同志分别校阅了全部题解，章仰文同志描绘了全部图

形，我系许多同志，对于本解答的出版，都给了很大的帮助。在此，谨向他们表示感谢。此外，在出版过程中，蒙本校教材组及印刷厂同志的大力支持，也一并表示谢意。

编者谨识　　一九七九年夏

原书第三版序言

在这第三版基本上没有什么改变，仅对个别问题的叙述更加确切并改正了答案中的一些错误。

我对于 И.А. 瓦因什金及 М.Л. 斯摩尔扬斯基两位副教授协助校正答案在此表示衷心的感谢。

Б.П. 吉米多维奇

莫斯科 1956 年

原书第二版序言

在这第二版中接受了许多教师的意见，增加很多有关数学分析各主要章节的计算性的习题。增加的习题和例题有一千以上，大部分是关于求极限、微分法、不定积分与定积分、级数与变量代换的问题。同时根据各种考虑，删去了一些题目。由于材料叙述的方便在第四与第五两章内改变了个别几节的先后次序。此外，在习题集中某些地方的标题也更明确了。与从前一样，在习题中特别注意措辞的准确性，并详细地说明某些公式成立的条件。为了使用的方便，在习题集里采用了问题的统一编号。在书末添有附录，其中包含重要常数及最常用的函数表。

国立莫斯科（罗蒙洛索夫）大学数学分析教研室主任 Н.Д. 阿伊任什达特及 З.М. 克什克拉副教授予先校阅第二版的手稿，特此感谢。

Б.П. 吉米多维奇

1953 年于莫斯科

目　录

目　　录

第一章　分析引论

第一编　单变量函数

第一章　分析引论

§1. 实数

1°. **数学归纳法**　为了证明某定理对任意的自然数 n 为真，只须证明下面两点就够了：(1) 这定理对 $n=1$ 为真，(2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真，则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真。

2°. **分割**　假设分有理数为 A 和 B 两类，使其满足于下列条件：(1) 两类均非空集，(2) 每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3) 属于 A 类(**下类**)的任一数小于属于 B 类(**上类**)的任何数，这样的一个分类法称为**分割**。(a) 若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数。(б) 若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数。有理数和无理数统称为**实数**①。

3°. **绝对值**　假若 x 为实数，则用下列条件确定的非负数 $|x|$，称为 x 的**绝对值**：

$$|x|=\begin{cases} x, & 若\ x\geqslant 0, \\ -x, & 若\ x<0。\end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，有以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|。$$

4°. **上确界和下确界**　设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合。若：(1) 每一个 $x\in X$② 满足不等式

① 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数。

② 符号 $x\in X$ 表示 x 属于集合 X。

$$x \geqslant m,$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon>0$，存在有 $x' \in X$，使

$$x' < m+\varepsilon,$$

则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X 的**下确界**。

同样，若：

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leqslant M,$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon>0$，存在有 $x'' \in X$，使

$$x'' > M-\varepsilon,$$

则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集合 X 的**上确界**。

若集合 X 下方无界，则通常说

$$\inf\{x\}=-\infty;$$

若集合 X 上方无界，则认为

$$\sup\{x\}=+\infty。$$

5°. **绝对误差和相对误差** 设 a $(a \neq 0)$ 是被测的量的准确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta=|x-a|$$

称为绝对误差，而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的*相对误差*。

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半，则说 x 有 n *位准确的数字*。

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立（1—5 题）：

1. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$。

证：显然 $n=1$ 时等式成立。

今设 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 成立。两端各加 $(n+1)$，得

$$1+2+\cdots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}。$$

故由归纳法知：对于任何自然数 n，

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

成立。

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

证： 显然当 $n=1$ 时等式成立。

今设 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 成立。两端各加 $(n+1)^2$，得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+n+1\right]$$

$$=\frac{n+1}{6}[n(2n+1)+6n+6]$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}。$$

故由归纳法知：对于任何自然数 n，

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

成立。

3． $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$。

证：显然当 $n=1$ 时等式成立。

今设 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ 成立。两端各加 $(n+1)^3$，得

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^3$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}[n^2+4(n+1)]$$

$$=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2=[1+2+\cdots+n+(n+1)]^2。$$

故由归纳法知：对于任何自然数 n，

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

成立。

4． $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$。

证：显然当 $n=1$ 时等式成立。

今设 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 成立。两端各加 2^n，得

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n=2^n-1+2^n=2\cdot2^n-1=2^{n+1}-1。$$

故由归纳法知：对于任何自然数 n，

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$

成立。

5． 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$。求证

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数，由此推出牛顿的二项式公式。

证：$(a+b)^{[1]}=a+b=a^{[1]}+b^{[1]}$，故当 $n=1$ 时等式成立。

今设 $(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$ 成立，则

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{[n+1]} &= (a+b)^{[n]}(a+b-nh) \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]} (a+b-nh) \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]} [a-(n-m)h] \\
&\quad + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]} (b-mh) \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m+1]} b^{[m]} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m+1]} \\
&= C_n^0 a^{[n+1]} b^{[0]} + C_n^1 a^{[n]} b^{[1]} + \cdots + C_n^{n-1} a^{[2]} b^{[n-1]} \\
&\quad + C_n^n a^{[1]} b^{[n]} + C_n^0 a^{[n]} b^{[1]} + C_n^1 a^{[n-1]} b^{[2]} \\
&\quad + \cdots + C_n^{n-1} a^{[1]} b^{[n]} + C_n^n a^{[0]} b^{[n+1]}\text{。}
\end{aligned}
$$

由于 $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}(k=0,1,2,\cdots,n)$，故

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{[n+1]} &= C_{n+1}^0 a^{[n+1]} b^{[0]} + C_{n+1}^1 a^{[n]} b^{[1]} + C_{n+1}^2 a^{[n-1]} b^{[2]} \\
&\quad + \cdots + C_{n+1}^n a^{[1]} b^{[n]} + C_{n+1}^{n+1} a^{[0]} b^{[n+1]} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^{[n+1-m]} b^{[m]}\text{。}
\end{aligned}
$$

故由归纳法知：对于任何自然数 n，

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}$$

成立。

特别地，取 $h=0$，即得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m\text{。}$$

6、 证明贝努里不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 x_1，x_2，…，x_n 是符号相同且大于 -1 的数。

证：当 $n=1$ 时，要证的不等式显然成立。

今设 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$

成立。两端同乘$(1+x_{n+1})$，由于$x_{n+1}\geqslant -1$，则$1+x_{n+1}\geqslant 0$，故

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\\&\quad\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})\\&\quad=1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+x_{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)。\end{aligned}$$

由于x_1，x_2，$\cdots$，x_n，x_{n+1}符号相同，故$x_{n+1}(x_1+x_2+$ $+\cdots+x_n)\geqslant 0$，由此得

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\\&\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}\end{aligned}$$

成立。

7. 证明若$x>-1$，则不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\ \ (n>1)$$

为真，且仅当$x=0$时等号成立。

证：设$x>-1$，且$x\neq 0$，则

$$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x,$$

故当$n=2$时不等式为真。

今设$(1+x)^n>1+nx$为真。两端乘$(1+x)$，因为

$1+x>0$，故得

$$\begin{aligned}&(1+x)^{n+1}>(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2\\&\quad>1+(n+1)x。\end{aligned}$$

故由归纳法知：当$n>1$，$x>-1$且$x\neq 0$时，$(1+x)^n>1+nx$。

明显地，当$x=0$时，$(1+x)^n$与$1+nx$化为等式。

8. 证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad 当 n>1。$$

提示 利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \quad (n=1,2,\cdots)。$$

证：容易验证，$2!<\left(\frac{2+1}{2}\right)^2$。故当 $n=2$ 时不等式成立。

今设 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$。两端同乘$(n+1)$，得

$$(n+1)!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n(n+1)=\frac{1}{2^n}(n+1)^{n+1}。\qquad (1)$$

利用第 7 题得

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2,$$

故 $(n+1)^{n+1}<\frac{1}{2}(n+2)^{n+1}$，代入(1)式得

$$(n+1)!<\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}。$$

故由归纳法知：当 $n>1$ 时， $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$。

证法 2. 利用众所周知的不等式：

$$a>0,\ b>0,\ 且\ a\neq b,\ 则\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}。$$

由此得

$$\sqrt{1\cdot n}<\frac{n+1}{2},\ \sqrt{2\cdot(n-1)}<\frac{n+1}{2},\ \cdots,$$

$$\sqrt{n\cdot 1}<\frac{n+1}{2}。$$

两端分别相乘，即得 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$。

9. 证明不等式

$$2!4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n \quad 当\ n>1。$$

证： 直接验算可得 $2!\cdot4!>(3!)^2$，故当 $n=2$ 时不等式成立。

今设 $2!4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n$ 成立。两端同乘 $(2n+2)!$，得

$$\begin{aligned}
&2!4!\cdots(2n)!(2n+2)!>[(n+1)!]^n(2n+2)!\\
&=[(n+1)!]^n(n+1)!(n+2)\cdots(2n+2)\\
&>[(n+1)!]^n\cdot(n+1)!\cdot(n+2)^{n+1}\\
&=[(n+2)!]^{n+1}。
\end{aligned}$$

故当 $n>1$ 时，$2!4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n$。

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}。$$

证： 容易验证 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，故当 $n=1$ 时不等式成立。

今设 $\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 成立。两端同乘 $\frac{2n+1}{2n+2}$，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\ \frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\ \frac{2n+1}{2n+2}\\
&=\sqrt{\frac{2n+1}{(2n+2)^2}}。 \qquad (1)
\end{aligned}$$

由于当 $x>0$ 时，$\frac{x-1}{x}<\frac{x}{x+1}$，故得$\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{2n+2}{2n+3}$，即

$\frac{2n+1}{(2n+2)^2}<\frac{1}{2n+3}$，将此代入(1)，得

$$\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\ \frac{2n+1}{2n+2}<\sqrt{\frac{1}{2n+3}}。$$

故由归纳法知：当 $n>1$ 时，

$$\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}。$$

11. 设 c 为正整数，而不为整数的平方，且 A/B 为确定实数 c 的分割，其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数。求证在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数。

证：于 A 类中任取一正有理数 a，则 $a^2<c$（由于 c 为正整数，且不为整数的平方，故 $a^2\neq c$）。设 $c-a^2=r$。现选取正有理数 $x<1$，使 $(a+x)^2<c$。为此只需

$$c-(a+x)^2=r-2ax-x^2>r-(2a+1)x>0,$$

即 $0<x<\frac{r}{2a+1}$。故在$(0,\ \delta)$中$\left[其中\ \ \delta=\min\left(1,\frac{c-a^2}{2a+1}\right)\right]$任取一有理数 x，都可使$(a+x)^2<c$，即 $a+x$ 属于 A 类且 $a+x>a$，故 A 类中无最大数。

于 B 类中任取一有理数 b，设 $s=b^2-c$。现选取正有理数 $y<b$，使$(b-y)^2>c$。为此只需

$$(b-y)^2-c=s-2by+y^2>s-2by>0,$$

即 $0<y<\frac{s}{2b}$。故在$(0,\ \varepsilon)$中$\left[其中\ \ \varepsilon=\min\left(b,\ \frac{b^2-c}{2b}\right)\right]$任取一有理数 y，都可使$(b-y)^2>c$，此即 $b-y$ 属于 B 类且

$b-y<b$，故B类中无最小数。

12．确定数$\sqrt[3]{2}$的分割A/B用下面的方法来作成：A类包含所有的有理数a，而$a^3<2$；B类包含所有其余的有理数。证明在A类中无最大数。而在B类中也无最小数。

证：于A类中任取一正有理数a，且设$r=2-a^3$。现选取正有理数$x<1$，使$(a+x)^3<2$。为此只需

$$2-(a+x)^3=r-3a^2x-3ax^2-x^3>r-(3a^2+3a+1)x>0,$$

即$0<x<\frac{r}{3a^2+3a+1}$。故在$(0,\delta)$中$\left[\text{其中}\ \delta=\min\left(1,\frac{2-a^3}{3a^2+3a+1}\right)\right]$任取一有理数$x$，都可使$(a+x)^3<2$，此即$a+x$属于$A$类且$a+x>a$，故$A$类中无最大数。

于B类中任取一有理数b，且设$s=b^3-2$。现选取正有理数$y<b$，使$(b-y)^3>2$。为此只需

$$\begin{aligned}(b-y)^3-2&=s-3b^2y+3by^2-y^3>s-3b^2y-y^3\\&>s-4b^2y>0,\end{aligned}$$

即$0<y<\frac{s}{4b^2}$。故在$(0,\varepsilon)$中$\left[\text{其中}\ \varepsilon=\min\left(b,\frac{b^3-2}{4b^2}\right)\right]$任取一有理数$y$，都可使$(b-y)^3>2$，此即$b-y$属于$B$类且$b-y<b$，故$B$类中无最小数。

13．作出适当的分割，然后证明等式：

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$。

(б) $\sqrt{2}\ \sqrt{3}=\sqrt{6}$。

证：(a) 把有理数分为A_1和B_1两类。

若$b_1>0$且$b_1^2>2$，则规定$b_1\in B_1$，凡不属于B_1的有理数$a_1\in A_1$，因而或者$a_1\leqslant 0$，或者$a_1^2<2$。